







ARITHMETICA

UNIVERSALIS.

ARITHMETICA
UNIVERSALIS;
SIVE DE
COMPOSITIONE
ET
RESOLUTIONE
ARITHMETICA.

Auctore IS. NEWTON, Eq. Aur.

Cum Commentario

JOHANNIS CASTILLIONEI,

in almo Lycæo Trajectino Philosophiæ, Mathescos & Astronomiæ Professoris Ordinarii &c.

TOMUS SECUNDUS.



AMSTELODAMI,
Apud MARCUM MICHAELEM REY,
MDCCLXI.

ARITHMETICA UNIVERSALIS
SIVE DE
COMPOSITIONE
ET
RESOLUTIONE
ARITHMETICA
LIBER.

PARS ALTERA



CAPUT I.

Quomodo æquationes resolvendæ sunt.

Postquam igitur in quæstionis alicujus solutione ad æquationem perventum est, & æquatio illa debite ordinata est & reducta; ubi quantitates quæ per species designantur & pro datis habentur, revera dantur in numeris, pro ipsis substituendi sunt numeri illi in æquatione, & habebitur æquatio numeralis, cujus radix extracta tandem satisfaciet quæstioni. Ut si in sectione anguli in quinque partes æquales, sumendo r pro radio circuli, q pro subtensa complementi anguli propositi ad duos rectos, & x pro subtensa complementi quintæ partis anguli illius, pervenissem ad hanc æquationem

$$x^5 - 5rrx^3 + 5r^4x - r^4q = 0.$$

Ubi in casu aliquo particulari dantur in numeris radius r, & linea dati anguli complementum subtendens q; ut quod radius sit 10 & subtensa 3, substituo numeros illos in æquatione pro r & q, & provenit æquatio numeralis

$$x^5 - 500x^3 + 50000x - 30000 = 0,$$

cujus radix tandem extracta erit x, ſeu linea complementum quintæ partis anguli illius dati ſubtendens.

CAP. II.

De natura radicum æquationis.

I. **R**adix *vero numerus eſt qui ſi in æquatione pro litera vel ſpecie radicem ſignificante ſubſtituatur, efficiet omnes terminos evaneſcere.* Sic æquationis

$$x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0,$$

unitas eſt radix, quoniam ſcripta pro x producit

$$1 - 1 - 19 + 49 - 30,$$

hoc eſt nihil. Sed æquationis ejuſdem plures eſſe poſſunt radices. Nam ſi in hac eadem æquatione

$$x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0,$$

pro x ſcribas numerum 2, & pro poteſtatibus x ſimiles poteſtates numeri 2, producetur

$$16 - 8 - 76 + 98 - 30,$$

hoc eſt nihil. Atque ita ſi pro x ſcribas numerum 3 vel numerum negativum -5, utroque caſu producetur nihil, terminis affirmativis & negativis in hiſce quatuor caſibus ſe mutuo deſtruentibus. Proinde cum numerorum 1, 2, 3 & -5, quilibet ſcriptus in æquatione pro x impleat conditionem ipſius x, efficiendo ut termini omnes æquationis conjunctim æquentur nihilo, erit quilibet eorum radix æquationis.

II. Et ne mireris eandem æquationem habere poſſe *plures radices*, ſciendum eſt *plures eſſe poſſe ſolutiones ejuſdem problematis.*

Ut ſi circulorum duorum datorum quæreretur *interſectio*; *duæ* ſunt eorum interſectiones, atque adeo quæſtio admittit *duo reſponſa*; & proinde æquatio interſectionem determinans habebit *duas radices*, quibus interſectionem utramque determinet, *ſi modo nihil in datis ſit quo reſponſum ad unam interſectionem determinetur.*

TAB. VIII. Fig. 8. Sic & ſi arcus APB pars quinta AP invenienda eſſet, quamvis animum forte advertas tantum ad arcum APB, tamen æquatio qua quæſtio ſolvetur, determinabit quintam partem arcuum omnium qui terminantur ad puncta A & B; nempe quintam partem arcuum ASB, APBSAPB, ASBPASB, & APBSAPBSAPB, æque ac quintam partem arcus APB; quæ quintæ partes, ſi dividas totam circumferentiam in æquales quinque partes PQ, QR, RS, SF, FP, erunt AF, AQ, AFS, AQR. Quoniam igitur quærendo quintas partes arcuum quos recta AB ſubtendit, ad caſus omnes determinandos circumferentia tota ſecari debet in quinque punctis P, Q, R,

R, S, F, ideo æquatio ad omnes casus determinandos habebit radices quinque. Nam quintæ partes horum omnium arcuum pendent ab iisdem datis, & per ejusdem generis calculum inveniuntur; ita ut in eandem semper æquationem incideris sive quæras quintam partem arcus APB, sive quintam partem arcus ASB, sive alterius cujusvis ex arcubus quintam partem. Unde si æquatio qua quinta pars arcus APB determinatur, non haberet plures radices quam unam, dum quærendo quintam partem arcus ASB incidimus in eandem illam æquationem, sequeretur majorem hunc arcum habere eandem quintam partem cum priore qui minor est, eo quod subtensa ejus per eandem æquationis radicem exprimitur. *In omni igitur problemate necesse est æquationem qua respondetur, tot habere radices, quot sunt quæsitæ quantitatis casus diversi ab iisdem datis pendentes & eadem argumentandi ratione determinandi.*

III. *Potest vero æquatio tot habere radices quot sunt dimensiones ejus, & non plures.*

Sic æquatio

$$x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0,$$

quatuor habet radices 1, 2, 3, & -5; non autem plures. Nam quilibet ex his numeris scriptus in æquatione pro x efficiet terminos omnes se mutuo destruere, ut dictum est; præter hos vero nullus est numerus cujus substitutione hoc eveniet.

IV. *Ceterum numerus & natura radicum ex generatione æquationis optime intelligetur.*

Ut si scire vellemus quomodo generetur æquatio cujus radices sint 1, 2, 3, & -5, supponendum erit x ambigue significare numeros illos, seu esse

$$x = 1, \; x = 2, \; x = 3, \; \& \; x = -5,$$

vel quod perinde est,

$$x - 1 = 0, \; x - 2 = 0, \; x - 3 = 0, \; \& \; x + 5 = 0;$$

Et multiplicando hæc in se, prodibit multiplicatione $x - 1$, in $x - 2$, hæc æquatio

$$xx - 3x + 2 = 0,$$

quæ duarum est dimensionum ac duas habet radices 1 & 2. Et hujus multiplicatione in $x - 3$ prodibit

$$x^3 - 6xx + 11x - 6 = 0,$$

æquatio trium dimensionum totidemque radicum, quæ iterum multiplicata per $x + 5$ fit

$$x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0,$$

ut supra. Cum igitur hæc æquatio generetur ex quatuor Factoribus,

$$x - 1,\ x - 2,\ x - 3,\ \&\ x + 5,$$

in ſe continuo ductis, ubi factorum aliquis nihil eſt, quod ſub omnibus fit nihil erit; ubi vero horum nullus nihil eſt, quod ſub omnibus continetur nihil eſſe non poteſt. Hoc eſt, non poteſt

$$x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30,$$

eſſe nihilo æquale ut oportet, niſi his quatuor caſibus ubi eſt $x - 1 = 0$, vel $x - 2 = 0$, vel $x - 3 = 0$, vel denique $x + 5 = 0$, proinde ſoli numeri 1, 2, 3, & -5 valere poſſunt x ſeu radices eſſe æquationis. Et ſimile eſt ratiocinium de omnibus æquationibus. Nam tali multiplicatione imaginari poſſumus omnes generari, quamvis Factores ab invicem ſecernere ſolet eſſe difficillimum, & ipſum eſt quod æquationem reſolvere & radices extrahere. Habitis enim radicibus habentur Factores.

V. *Radices vero ſunt duplices*, affirmativæ, *ut in allato exemplo* 1, 2, & 3, *&* negativæ, *ut* -5. *Ex his vero aliquæ non raro evadunt* impoſſibiles. Sic æquationis

$$xx - 2ax + bb = 0,$$

radices duæ, quæ ſunt

$$a + \sqrt{(aa - bb)},\ \&\ a - \sqrt{(aa - bb)}$$

reales quidem ſunt ubi aa majus eſt quam bb, at ubi aa minus eſt quam bb, evadunt impoſſibiles eo quod $aa - bb$ tunc evadat negativa quantitas, & negativæ quantitatis radix quadratica eſt impoſſibilis. Omnis enim radix poſſibilis ſive affirmativa ſit, ſive negativa, ſi per ſeipſam multiplicetur, producet quadratum affirmativum; proinde impoſſibilis erit quæ quadratum negativum producere debet. Eodem argumento colligitur æquationem

$$x^3 - 4xx + 7x - 6 = 0,$$

unam quidem realem radicem habere quæ eſt 2, duas vero impoſſibiles,

$$1 + \sqrt{-2},\ \&\ 1 - \sqrt{-2}.$$

Nam quælibet ex his

$$2,\ 1 + \sqrt{-2},\ \&\ 1 - \sqrt{-2}$$

ſcripta in æquatione pro x, efficiet omnes ejus terminos ſe mutuo deſtruere; ſunt vero

$$1 + \sqrt{-2},\ \&\ 1 - \sqrt{-2}$$

numeri impoſſibiles, eo quod extractionem radicis quadraticæ ex numero negativo -2 præſupponant.

VI.

VI. *Æquationum vero radices sæpe impossibiles esse æquum est, ne casus problematum, qui sæpe impossibiles sunt, exhibeant possibiles.*

Ut si rectæ & circuli intersectio determinanda esset, & pro circuli radio & rectæ a centro ejus distantia ponantur literæ duæ; ubi æquatio intersectionem definiens habetur, si pro litera designante distantiam rectæ a centro ponatur numerus minor radio, intersectio possibilis erit; sin major, fiet impossibilis; & æquationis radices duæ quæ intersectiones duas determinant, debent esse perinde possibiles vel impossibiles ut rem ipsam vere exprimant. Atque ita si circulus CDEF, & ellipsis ACBF se mutuo secent in punctis C, D, E, F, & ad rectam aliquam positione datam AB, demittantur perpendicula CG, DH, EI, FK, & quærendo longitudinem alicujus e perpendiculis, perveniatur tandem ad æquationem, æquatio illa ubi circulus secat ellipsim in quatuor punctis, habebit quatuor radices reales quæ erunt quatuor illa perpendicula. Quod si circuli radius, manente centro ejus, minuatur donec, punctis E & F coalescentibus, circulus tandem tangat ellipsim, ex radicibus duæ illæ quæ perpendicula EI & FK jam coincidentia exprimunt, evadent æquales. Et si circulus adhuc minuatur ut ellipsim in puncto EF ne quidem tangat sed secet tantum in alteris duobus punctis C, D, tunc ex quatuor radicibus duæ illæ quæ perpendicula EI, FK, jam facta impossibilia, exprimebant, fient una cum perpendiculis illis impossibiles. Et hoc modo in omnibus æquationibus augendo vel minuendo terminos earum, ex inæqualibus radicibus duæ primo æquales, deinde impossibiles evadere solent. Et inde fit quod radicum impossibilium numerus semper sit par. TAB. VIII. Fig. 9.

VII. *Sunt tamen radices æquationum aliquando possibiles ubi schema impossibiles exhibet. Sed hoc fit ob limitationem aliquam in schemate quod ad æquationem nil spectat.*

Ut si in semicirculo ABD datis diametro AB, & linea inscripta AD, demissoque perpendiculo DC, quærerem diametri segmentum AC, foret $\frac{ADq}{AB} = AC$. Et per hanc æquationem AC realis exhibetur quantitas ubi linea inscripta AD major est quam diameter AB; per schema vero AC tunc evadit impossibilis. Nimirum in schemate linea AD supponitur inscribi in circulo, atque adeo diametro circuli major esse non potest; in æquatione vero nihil est quod a conditione illa pendeat. Ex hac sola linearum conditione colligitur æquatio, quod sint AB, AD, & AC continue proportionales. Et quoniam æquatio non complectitur omnes conditiones schematis, non necesse est ut omnium conditionum teneatur limitibus. Quicquid amplius est in schemate quam in æquatione, potest illud limitibus arctare, hanc non item. Qua de causa ubi æquationes sunt imparium dimensionum, adeoque radices omnes impossibiles habere non possunt; schemata quantitatibus a quibus radices omnes pendent, sæpe limites imponunt, quos transgredi servatis schematum conditionibus impossibile est. TAB. VIII. Fig. 10.

VIII. *Ex radicibus vero quæ reales sunt, affirmativæ & negativæ ad plagas oppositas solent tendere.*

TAB. VIII. Fig. 9. Sic in Figura nona quærendo perpendiculum CG, incidetur in æquationem cujus duæ erunt affirmativæ radices CG ac DH a punctis C & D tendentes versus unam plagam, & duæ negativæ EI & FK, tendentes a punctis E & F versus plagam oppositam. Aut si in linea AB ad quam perpendicula demittuntur, detur aliquod punctum P, & pars ejus PG, a puncto illo dato ad perpendiculorum aliquod CG se extendens, quæratur, incidemus in æquationem quatuor radicum PG, PH, PI, PK, quarum quæsita PG, & quæ a puncto P ad easdem partes cum PG tendunt (ut PK) affirmativæ erunt, quæ vero tendunt ad partes contrarias (ut PH, PI) negativæ.

IX. *Ubi æquationis radices nullæ impossibiles sunt*, numerus radicum *affirmativarum & negativarum ex* signis terminorum æquationis cognosci potest. Tot *enim sunt radices* affirmativæ *quot signorum in continua serie* mutationes *de* + *in* — & — *in* +; *ceteræ* negativæ *sunt*.

Ut in æquatione

$$x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0,$$

ubi terminorum signa se sequuntur hoc ordino

$$+ \quad - \quad - \quad + \quad -$$

variationes secundi — a primo +, quarti + a tertio —, & quinti — a quarto +, indicant tres affirmativas esse radices, adeoque quartam negativam esse. At ubi radices aliquæ *impossibiles* sunt regula non valet, nisi quatenus impossibiles illæ, quæ nec negativæ sunt nec affirmativæ, pro *ambiguis* habeantur. Sic in æquatione

$$x^3 + pxx + 3ppx - q = 0,$$

signa indicant unam esse affimativam radicem & duas negativas. Finge $x = 2p$ seu $x - 2p = 0$, & multiplica æquationem priorem per hanc $x - 2p = 0$, ut una adhuc radix affirmativa addatur prioribus, & prodibit hæc æquatio

$$x^4 - px^3 + ppxx - \frac{6p^3}{q}x + 2pq = 0,$$

quæ habere deberet duas affirmativas ac duas negativas radices, habet tamen, si mutationem signorum spectes, affirmativas quatuor. Sunt ergo *duæ impossibiles* quæ pro ambiguitate sua, priori casu negativæ, posteriori affirmativæ esse videntur.

Verum quot radices impossibiles sunt, cognosci fere potest per hanc regulam.

X. *Constitue seriem fractionum quarum denominatores sunt numeri in hac progressione* 1, 2, 3, 4, 5, &c. *pergendo ad numerum usque qui est dimensionum æquationis; numeratores vero eadem series numerorum in ordine contrario. Divide unamquamque fractionem posteriorem per priorem. Fractiones prodeuntes colloca super*

per

per terminis mediis æquationis. Et sub quolibet mediorum terminorum, si quadratum ejus ductum in fractionem capiti imminentem sit majus quam rectangulum terminorum utrinque consistentium, colloca signum +; sin minus, signum —. Sub primo vero & ultimo termino colloca signum +. Et tot erunt radices impossibiles quot sunt in subscriptorum serie mutationes de + in — & — in +.

Ut si habeatur æquatio

$$x^3 + pxx + 3ppx - q = 0:$$

Divido seriei hujus $\frac{3}{1}$. $\frac{2}{2}$. $\frac{1}{3}$. fractionum secundam $\frac{2}{2}$ per primam $\frac{3}{1}$, & tertiam $\frac{1}{3}$ per secundam $\frac{2}{2}$, & fractiones prodeuntes $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{3}$ colloco super mediis terminis æquationis ut sequitur.

$$\begin{array}{ccccccc} & & \frac{1}{3}. & & \frac{1}{3}. & & \\ x^3 & + & pxx & + & 3ppx & - q & = 0 \\ + & & - & & + & + & \end{array}$$

Dein quoniam quadratum secundi termini pxx ductum in imminentem fractionem $\frac{1}{3}$, nimirum $\frac{ppx^4}{3}$, minus est quam primi termini x^3 & tertii $3ppx$ rectangulum $3ppx^4$, sub termino pxx colloco signum —. At quia tertii termini $3ppx$ quadratum $9p^4xx$ ductum in imminentem fractionem $\frac{1}{3}$, majus est quam nihil, atque adeo multo majus quam secundi termini pxx, & quarti $-q$ rectangulum negativum, colloco sub tertio illo termino signum +. Dein sub primo termino x^3 & ultimo $-q$ colloco signa +. Et signorum subscriptorum quæ in hac sunt serie + — + + mutationes duæ, una de + in —, alia de — in + indicant duas esse radices impossibiles. Sic & æquatio

$$x^3 - 4xx + 4x - 6 = 0,$$

duas habet radices impossibiles.

$$\begin{array}{ccccccc} & & \frac{1}{3}. & & \frac{1}{3}. & & \\ x^3 & - & 4xx & + & 4x & - 6 & = 0 \\ + & & + & & - & + & \end{array}$$

Æquatio item

$$x^4 - 6xx - 3x - 2 = 0,$$

duas

duas habet.

$$\begin{array}{cccccccccc} & & \frac{3}{8} & & \frac{4}{9} & & \frac{3}{8} & & & \\ x^4 & & * & - & 6xx & - & 3x & - & 2 & = 0 \\ + & & + & & + & & - & & + & \end{array}$$

Nam hæc fractionum ſeries $\frac{4}{1} . \frac{3}{2} . \frac{2}{3} . \frac{1}{4}$. dividendo ſecundam per primam, tertiam per ſecundam, & quartam per tertiam, dat hanc ſeriem $\frac{3}{8} . \frac{4}{9} . \frac{3}{8}$ ſuper mediis æquationis terminis collocandam. Dein ſecundi termini, qui hic nihil eſt, quadratum ductum in fractionem imminentem $\frac{3}{8}$ producit nihil, quod tamen majus eſt quam rectangulum negativum $-6x^6$ ſub terminis utrinque poſitis x^4 & $-6xx$ contentum. Quare ſub termino illo deficiente ſcribo $+$. In ceteris pergo ut in exemplo ſuperiori; & ſignorum ſubſcriptorum prodit hæc ſeries $+ + + - +$, ubi duæ mutationes indicant duas radices impoſſibiles. Et ad eundem modum in æquatione

$$x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 2xx - 5x - 4 = 0,$$

deteguntur impoſſibiles duæ.

$$\begin{array}{cccccccccccc} & & \frac{2}{5}. & & \frac{1}{2}. & & \frac{1}{2}. & & \frac{2}{5}. & & & \\ x^5 & - & 4x^4 & + & 4x^3 & - & 2xx & - & 5x & - & 4 & = 0 \\ + & & + & & - & & + & & + & & + & \end{array}$$

XI. Ubi termini duo vel plures ſimul deſunt, ſub primo terminorum deficientium collocandum eſt ſignum $-$, ſub ſecundo ſignum $+$, ſub tertio ſignum $-$, & ſic deinceps, ſemper variando ſigna, niſi quod ſub ultimo terminorum ſimul deficientium ſemper collocandum eſt ſignum $+$ ubi termini deficientibus utrinque proximi habent ſigna contraria. Ut in æquationibus

$$\begin{array}{cccccccc} x^5 & + & ax^4 & * & * & * & + a^5 & = 0, \\ + & & + & - & + & - & + & \end{array}$$

&

$$\begin{array}{cccccccc} x^5 & + & ax^4 & * & * & * & - a^5 & = 0, \\ + & & + & - & + & + & + & \end{array}$$

quarum prior quatuor, poſterior duas habet impoſſibiles radices. Sic & æquatio

x^7

$$\begin{array}{cccccccccc} & \frac{3}{7}. & \frac{5}{9}. & & \frac{3}{5}. & \frac{3}{5}. & \frac{5}{9}. & \frac{3}{7}. & & \\ x^7 & -2x^6 & +3x^5 & & -2x^4 & +x^3 & * & * & -3 & =0 \\ + & - & + & & - & + & - & + & + & \end{array}$$

sex habet impossibiles.

XII. Hinc etiam cognosci potest utrum radices impossibiles inter affirmativas radices lateant an inter negativas. Nam signa terminorum signis subscriptis variantibus imminentium indicant tot affimativas esse impossibiles quot sunt ipsorum variationes, & tot negativas quot sunt ipsorum successiones sine variatione. Sic in æquatione

$$\begin{array}{ccccccc} x^5 & -4x^4 & +4x^3 & -2xx & -5x & -4 & =0 \\ + & + & - & + & + & + & \end{array}$$

quoniam signis infra scriptis variantibus $+ - +$, quibus radices duæ impossibiles indicantur, imminentes termini

$$-4x^4 + 4x^3 - 2xx,$$

signa habent $- + -$, quæ per duas variationes indicant duas affirmativas radices; ideo radices duæ impossibiles inter affirmativas latebunt. Cum itaque omnium æquationis terminorum signa

$$+ - + - - -$$

per tres variationes indicent tres esse affirmativas radices, & reliquas duas negativas esse, & inter affirmativas lateant duæ impossibiles, sequitur æquationis unam esse radicem vere affirmativam, duas negativas, ac duas impossibiles. Quod si æquatio fuisset

$$\begin{array}{ccccccc} x^5 & -4x^4 & -4x^3 & -2xx & -5x & -4 & =0 \\ + & + & - & - & + & + & \end{array}$$

tunc termini subscriptis signis prioribus variantibus $+ -$ imminentes, nimirum $-4x^4 - 4x^3$ per signa sua non variantia $-$ & $-$ indicant unam ex negativis radicibus impossibilem esse; & termini signis subscriptis posterioribus variantibus $- +$ imminentes, nimirum $-2xx - 5x$ per signa sua non variantia $-$ & $-$ indicant aliam ex negativis radicibus impossibilem esse. Quamobrem cum æquationis signa

$$+ - - - - -$$

per unam variationem indicent unam affirmativam radicem, ceteras quatuor negativas esse; sequitur unam esse affirmativam, duas negativas, ac duas impossibiles. Atque hæc ita se habent ubi non sunt plures impossibiles radices quam per regulam allatam deteguntur. Possunt enim plures esse, licet id perraro eveniat.

COMMENTARIUS

AD

CAPUT II.

Jam & ex rei natura, & ex tot superius evolutis exemplis constat dari quæstiones, seu problemata arithmetica, & geometrica.

Hic de arithmeticis agit Auctor; sed quæ dicam, utrisque possunt aptari.

1. Æquatio igitur *est aggregatum plurium quantitatum notarum, & quæsitarum quomodocunque mixtarum, quod totum est nihilo par, & quod oritur ex omnibus problematis legibus algebraice expressis.*

2. Igitur quantitas quæsita, ubi æquationis ope reperitur, satisfacit omnibus problematis legibus.

3. Et si plures sint quantitates ita comparatæ, plures quoque per æquationem invenientur; ut vidimus sectione III. Cap. I. Nis. 17 &c ..45. pag. 109.

4 Inventio autem harum quantitatum per æquationem dicitur æquationis *resolutio.*

5. Quantitates vero sic inventæ dicuntur *æquationis radices.*

6. Sed cum tota æquatio nihilo par sit, nec datæ quantitates mutentur; quæsitæ vero eædem sint ante, & postquam nobis notæ sunt (nos enim, non illæ mutationem patimur) liquet quod si *radix in æquatione pro litera vel specie radicem significante substituatur, efficiet omnes terminos evanescere* &c: quæ est Newtoniana radicis descriptio. N°. I.

Hinc ostendendum sibi proponit Auctor.

1. Æquationem tot habere posse radices, quot dimensiones, & non plures.

2. Æquationes generari per continuam radicum multiplicationem.

3. Radices esse aut reales aut imaginarias; realium vero alias esse affirmativas seu veras, alias negativas seu falsas.

4. Cur aliquando radices æquationis sint imaginariæ.

5. Quid indicent radices affirmativæ, quid negativæ.

6. Quot radices affirmativas, quot negativas habeat æquatio ab imaginariis immunis.

7. Si vero quas habeat imaginarias, quot imaginarias habeat.

Horum capitum nonnulla jam explicavimus; alia melius & brevius me explicaturum confido, si mutem Auctoris ordinem. Quare totum hoc caput, non per partes, ut hactenus feci, sed explicatione continua explanare conabor.

7. Potestas, cujus index est numerus par, positiva est, seu radix sit positiva, seu negativa (Tom. I. Sect. I. Cap. V. N°. 80. pag. 22.) Ergo omnis radix formæ $\sqrt[2n]{-a}$, est impossibilis, quod pro radicibus quadratis, vel quando $n = 1$, sæpius jam observavimus.

8. Cum

8. Cum autem potestatis negativæ, cujus index est numerus impar, radix inveniri possit, constat.

1. Omnem quantitatem impossibilem esse radicalem, cujus exponens est par.

2. Omnes quantitates impossibiles revocari ad formam $b\sqrt{-1}$. Nam est $-a = +a.-1$, & $\sqrt[2n]{-a} = \sqrt[2n]{+a}\,.\,\sqrt[2n]{-1}^{\,n}$. Semper autem possibilis est quantitas $\sqrt[2n]{+a}$; ea ergo exponatur per b, & fiet $\sqrt[2n]{-a} = b\sqrt{-1}$. Est enim $\sqrt[2n]{-1}^{\,n} = \sqrt{-1}$.

9. Aggregatum ex quantitatibus possibilibus & ex quantitatibus impossibilibus est impossibile. Cum enim adsit pars impossibilis, patet aggregatum definiri non posse, atque ideo esse impossibile.

10. Quantitates impossibiles algebraicæ omnes revocantur ad formam $a \pm b\sqrt{-1}$. Nam hujusmodi quantitas concrescit ex quantitatibus possibilibus & ex impossibilibus, vel additione, vel subductione, vel multiplicatione, vel divisione; nam elevatio ad potestatem cujus exponens est numerus integer, recidit in multiplicationem.

Jam $c + e\sqrt{-1} \pm f + g\sqrt{-1}$, facile revocatur ad indicatam formam, cum sit $c + e\sqrt{-1} \pm f + g\sqrt{-1} = c \pm f + (e+g)\sqrt{-1}$ quæ quantitas, ponendo

$$c \pm f = a \ \& \ e + g = b, \text{ fit } a + b\sqrt{-1}$$

Pariter

$$(c + e\sqrt{-1})(f + g\sqrt{-1}) = cf + ef\sqrt{-1} + cg\sqrt{-1} - eg = cf - eg + (ef + cg)\sqrt{-1} = a + b\sqrt{-1}$$

ponendo

$$cf - eg = a \ \& \ ef + cg = b$$

denique

$$\frac{c + e\sqrt{-1}}{f + g\sqrt{-1}} = \frac{(c + e\sqrt{-1})(f - g\sqrt{-1})}{(f + g\sqrt{-1})(f - g\sqrt{-1})} =$$

$$\frac{cf + ef\sqrt{-1} - cg\sqrt{-1} + eg}{ff + gg} = a + b\sqrt{-1}$$

ponendo

$$\frac{cf + eg}{ff + gg} = a \ \& \ \frac{ef - cg}{ff + gg} = b.$$

Vera est propositio etiam de quantitatibus transcendentibus, sed de his nunc non loquimur.

 11. Ra-

11. Radix æquationis est impossibilis vel imaginaria, quando ejus pars aliqua est imaginaria, cujus formula est supra inventa $a + b\sqrt{-1}$. N° 9.10.

12. Radix est possibilis vel realis, quando ejus nulla pars est imaginaria, etiamsi contineat partem radicalem, sed possibilem.

13. Radices reales esse posse vel affirmativas, vel negativas, jam sæpe superius vidimus. Reales inquam, semper enim comparari potest pars rationalis a cum irrationali $\sqrt{c}$, quando hæc realis est, sed non cum irrationali $b\sqrt{-1}$, quæ nullo pacto potest definiri.

14. Hinc patet optime distribui radices.

1. In rationales, & in irrationales. *Rationalis* est quæ nullam habet partem irrationalem; *irrationalis* quæ vel tota vel pro parte irrationalis est.

2. Irrationales vel surdæ dividuntur in *possibiles*, ut $a \pm \sqrt{b}$; $a \pm \sqrt[3]{\pm b}$ &c; & in *impossibiles*, quarum forma est $a \pm b\sqrt{-1}$.

3. In reales & imaginarias. *Reales* sunt quæ vel rationales sunt, vel irrationales quidem, sed possibiles. *Imaginariæ* sunt tantum irrationales & impossibiles.

4. Tandem reales aliæ sunt *positivæ* aut *veræ*, aliæ *negativæ* aut *falsæ*.

15. Quid accidat in genere si ex eadem incognita & ex singulis cognitis $x \pm \alpha = 0$; $x \pm \beta = 0$; $x \pm \gamma = 0$, &c. efficiantur æquationes simplices, & hæ invicem ducantur, vidimus Tom. I. N° 111-114. pag. 28. Constat autem aggregatum futurum æqualem nihilo.

16. Æquatio dicitur *affecta*, quando alios habet terminos præter altissimum incognitæ, & terminum omnino cognitum, qui a nonnullis vocatur *homogeneum comparationis*. Sic $x^m \pm ax^n \ldots \pm b = 0$ est æquatio affecta, seu unus adsit terminus, præter primum x^m & ultimum b, seu plures.

17. Si æquatio affecta constat ex Factoribus simplicibus formæ $x \pm \alpha$ (seu α sit realis seu imaginaria) in se ductis, & si hæc æquatio exprimat omnes conditiones problematis, constat ex æquationibus simplicibus formæ $x \pm \alpha = 0$. Nam ex continua multiplicatione æquationum simplicium, $x = \mp \alpha$; $x = \mp \beta$; &c. ad numerum m, oritur æquatio non affecta $x^m = A$, ubi $A = \alpha\beta\gamma$ &c. ad eundem numerum m.

18. Ex continua multiplicatione æquationum simplicium $x + \alpha = 0$; $x + \beta = 0$; &c. ad numerum p; & $x + \mu = \nu$; $x + \xi = \pi$, &c, ad numerum n (pono autem $p + n = m$) oritur quidem æquatio affecta

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} \ldots + T = 0,$$

sed quæ non exprimit omnes conditiones problematis; quandoquidem ν; π; &c, quæ non sunt in primo membro æquationum simplicium, non sunt in primo membro æquationis affectæ hinc oriundæ: nam hujus primum membrum conficitur ex primis illarum membris in se ductis. Sed neque sunt in secundo membro, quia hoc est $= 0$; siquidem $x + \alpha = 0$; $x + \beta = 0$ &c, multiplicando dant factum $X = 0$; sed $x + \mu = \nu$; $x + \xi = \pi$ &c, dant

dant factum Z $=$ $\nu\pi$ &c; & multiplicando ordine hæc facta, habetur XZ $=$ o. $\nu\pi$ &c. $=$ o. Desunt ergo prorsus in æquatione composita literæ ν; π; &c; quæ ideo non exprimit omnes conditiones problematis. Utrumque est contra hypothesim. Patet autem utrumque fieri secundum hypothesim, si assumantur Factores simplices formæ $x \pm \alpha = 0$; id est æquatio potest habere tot radices, quot dimensiones.

19. Non autem potest habere plures; nam hæ expressæ per totidem æquationes simplices inter se multiplicari deberent, ut conficiatur æquatio complectens omnes leges problematis (Tom. I. Sect. III. Cap. I. N^{is} 44. &c. pag. 112. &c) & hinc oriretur æquatio plurium dimensionum, quam proposita. Quare proposita haberet minorem dimensionum numerum, per hypothesim, & non minorem quia exponere debet omnes conditiones problematis.

20. Nunc, si æquationes simplices sint formæ $x - \alpha = 0$; id est si omnes radices sint affirmativæ, (nam si $x - \alpha =$, profecto est $x = \alpha$,) atque ideo omnes reales (N^{is} 12. & 13.); tunc æquatio hinc oriunda habebit omnes terminos aliquam sedem numero imparem occupantes (primum, tertium, quintum, septimum, &c.) affirmativos; reliquos autem negativos. (Tom. I. Sect. I. Cap. V. N°. 114. pag. 28; & N^{is} 77.79. pag. 22.). Nam omnis terminus, præter ultimum, est aliqua potestas quantitatis x (Tom. I. Sect. I. Cap. V. N^{is} 111. & 112. pag. 28.), quæ est semper positiva, quia radix x est positiva. Coefficiens primi termini est unitas; coefficiens tertii, quinti, septimi, &c. termini, est ordine aggregatum ex factis binorum, quaternorum, senorum &c. Factorum secundorum (ibidem N°. 114.); quæ facta sunt positiva, quia Factores sunt quidem negativi, sed numero pares; & aggregatum ex factis positivis est positivum. Sed coefficiens termini secundi, quarti, sexti, &c, est ordine aggregatum ex singulis Factoribus secundis, ex factis ternorum, quinorum, septenorum, &c. Factorum secundorum, qui semper numero impari sumendi sunt, atque ideo semper præbent facta negativa.

21. Si vero æquationes simplices, sint formæ $x + \alpha =$; id est si omnes radices æquationis affectæ sint negativæ, æquatio habebit omnes terminos positivos; quod per se patet.

22. Æquatio, cujus omnes radices sunt positivæ, aut omnes negativæ, semper completa est, vel nullo termino caret, quia non sunt in coefficientibus singulorum terminorum facta contrariis signis affecta, quæ se mutuo destruere possint.

23. Æquatio completa ordinis m, habet radices numero m, terminos autem numero $m + 1$. Quapropter si ea omnes habeat radices positivas, habebit signorum permutationes ad numerum m; & si ea habeat omnes radices negativas, habebit successiones ad eundem numerum m. Signorum autem *permutationem* voco duorum signorum proximorum alternationem, quando nempe primum signum est $+$ & sequens est $-$, aut contra, quando primum est $-$ & sequens est $+$. Successionem autem dico, quando signa duo proxima sunt vel utraque positiva, vel utraque negativa.

24. Sunt, in æquatione, cujus radices sunt omnes positivæ, tot permutatio-

tationes, quot radices; & in æquatione, cujus radices sunt omnes negativæ, tot successiones quot radices.

25. Sint m; n; p; numeri integri & positivi, & sit m non minor quam $n+p$; & sit m numerus Factorum omnium; ac habeantur omnia facta diversa ex Factorum diversorum numero n, atque hæc singula ducantur in aliquod factum ex p Factoribus, qui non sunt in multiplicandis factis ex n Factoribus, hinc orientur omnia facta diversa ex $n+p$ Factoribus, quæ possunt complecti Factores postremo sumtos,

Ex. gr. sit $m = 8$, & omnes Factores sint

$$a;\ b;\ c;\ d;\ e;\ f;\ g;\ h;$$

ponatur $n = 1 = p$; omnia facta diversa ex Factorum diversorum numero n, erunt Factores ipsi, e quibus eligatur unum a; manebunt Factores diversi, præter a, ad numerum $m - 1 = 7$; nempe

$$b;\ c;\ d;\ e;\ f;\ g;\ h;$$

qui si ducantur in a, fient septem facta in quibus est a, nempe

$$ab;\ ac;\ ad;\ ae;\ af;\ ag;\ ah.$$

Nunc e septem reliquis eximatur b, manebunt sex Factores diversi,

$$c;\ d;\ e;\ f;\ g;\ h.$$

qui singuli ducti in b dabunt sex facta ex binis Factoribus continentia b, id est

$$bc;\ bd;\ be;\ bf;\ bg;\ bh.$$

Pariter, omnia facta ex binis, in quibus non est a, sunt

$$\begin{array}{rrrrrr} bc; & bd; & be; & bf; & bg; & bh. \\ & cd; & ce; & cf; & cg; & ch. \\ & & de; & df; & dg; & dh. \\ & & & ef; & eg; & eh. \\ & & & & fg; & fh. \\ & & & & & gh. \end{array}$$

quæ ducta in a, dabunt omnia facta ex ternis Factoribus comprehendentia a. Idem facile intelligitur de superioribus factis, quæ fiunt multiplicando factum aliquod per Factorem unius dimensionis.

Sumatur nunc factum duarum dimensionum ab; omnia facta ex binis Factoribus carentia tum a, tum b, sunt

cd; *ce*; *cf*; *cg*; *ch*.
de; *df*; *dg*; *dh*.
ef; *eg*; *eh*.
fg; *fh*.
gh.

quæ si multiplicentur per factum *ab*, habebuntur omnia facta ex quaternis, complectentia factum *ab*. Et sic de ceteris.

Evidens autem in genere est theorema propositum. Factum constans ex Factoribus diversis, numero *p*, sit A; & omnia facta diversa, quæ confici possunt ex *n* Factoribus diversis, sint B; C; D; E; &c. Erunt profecto AB; AC; AD; AE; &c. omnia facta diversa, quæ haberi poterunt ex $n+p$ Factoribus diversis, & quæ continebunt idem factum A.

Omnes Factores diversi sunt numero *m*; ex his auferuntur Factores numero *p*, ut conficiatur factum A; supersunt ergo Factores diversi $m-p$, qui *n*.. cui jungendi sunt, quot modis possunt, ut obtineantur omnia facta diversa ex *n* Factoribus; B; C; D; E; &c. Horum autem numerus est

$$\frac{m-p \,.\, m-p-1 \,.\, m-p\;2 \,\ldots\ldots\, m-p-n+1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,\ldots\ldots\, n}$$

ut constat conferendo numeros 109. & 121. Sect. I. Cap. V. pag. 27. & 29. Tomi I. Ergo eadem series

$$\frac{m-p \,.\, m-p-1 \,.\, m-p-2 \,\ldots\ldots\, m-p-n+1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, \ldots\ldots\, n \,.}$$

exprimet numerum factorum diversorum AB; AC; AD; AE; &c.

26. Si vero cuncta facta diversa B; C; D; E; &c. ex *n* Factoribus, multiplicentur per *a* unum ex *p* Factoribus ipsius A, tunc habebuntur omnia facta diversa ex $n+1$ Factoribus, quæ illum Factorem *a* complecti possunt; nec complectuntur reliquos factores ipsius A.

Sint, ex. gr.

cde; *cdf*; *cdg*; *cdh*; *cef*; *ceg*; *ceh*; *def*; *deg*; *deh*; *efg*; *efh*; *dfg*; *dfh*;
efg; *efh*; *egh*; *dgh*; *egh*; *fgh*;

omnia facta diversa ex ternis Factoribus, quæ obtineri possunt multiplicando ex octo Factoribus

a; *b*; *c*; *d*; *e*; *f*; *g*; *h*;

sex posteriores; & sit $A = ab$. Illa facta ex ternis ducta in *a*, conficient omnia facta ex quaternis, quæ complecti possunt Factorem *a*, nec tamen complectuntur Factorem *b*. Si vero eadem facta ex ternis ducantur in *b*, obtinebuntur omnia facta diversa ex quaternis quæ complecti possunt *b*, nec tamen complectuntur *a*.

Quod

Quod si factum A esset unius dimensionis, & omnia facta ex n Factoribus, quæ haberi possunt multiplicando n .. nos ex $m-1$ Factoribus, ducantur in A (aut a), habebuntur omnino omnia facta diversa ex $n+1$ Factoribus, quæ complectuntur Factorem A (aut a).

α; β; γ; δ; &c.

27. Si omnia facta diversa ex p Factoribus diversis, ducantur in omnia facta diversa A; B; C; D; &c. ex n Factoribus diversis, qui non sunt in prioribus factis α; β; γ; δ; &c, unum idemque factum $\alpha\delta$, repetitum invenietur toties quoties indicat fractio

$$\frac{p+n \,.\, p+n-1 \,.\, p+n-2 \,.\, p+n-3 \,\ldots\, p+1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, n}.$$

Ex. gr. sit $p=3$; $n=4$, atque ideo $p+n=7$ factum *abcdefg* ex septem Factoribus diversis, componetur ex uno facto ternorum Factorum, & ex uno quaternorum, modis $35 = \frac{7 \,.\, 6 \,.\, 5 \,.\, 4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} = 7 \,.\, 5$., nempe ex *abc . defg; abd . cefg; abe . cdfg; abf . cdeg; abg . cdef; acd . befg; ace. bdfg; acf . bdeg; acg . bdef; ade . bcfg; adf . bceg; adg . bcef; aef . bcdg; aeg . bcdf; afg . bcde; bcd . aefg; bce . adfg; bcf . adeg; bcg . adef; bde. acfg; bdf . aceg; bdg . acef; bef . acdg; beg . acdf; bfg . acde; cde . abfg; cdf . abeg; cdg . abef; cef . abdg; ceg . abdf; cfg . abde; def . abcg; deg. abcf; dfg . abce; efg . abcd.*

Sic autem demonstrari potest theorema. Hujusmodi factum habebit omnino Factores $p+n$, e quibus sumi debent n quot modis diversis fieri potest, (ut nempe habeantur omnia facta diversa ex n Factoribus); sed e quantitatibus numero $p+n$, sumi possunt n, modis

$$\frac{p+n \,.\, p+n-1 \,.\, p+n-2 \,.\, p+n-3 \,\ldots\, p+1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, n}$$

Harum combinationum quævis dat factum ex n Factoribus, quod ductum in factum ex p Factoribus, qui non sunt in primo facto, dat factum ex $n+p$ Factoribus, quod factum erit semper idem, quia iidem sunt Factores $n+p$. Ergo idem factum repetitum invenietur modis &c.

Observandum, quod idem modorum numerus inveniretur, si consideraretur factum ex p Factoribus, qui desumuntur a totali Factorum numero $n+p$. Tunc enim numerus hic esset, ponendo n minorem quam p

$$\frac{p+n \,.\, p+n-1 \,.\, p+n-2 \,\ldots\, p+1 \,.\, p \,.\, p-1 \,.\, p-2 \,\ldots\, n+2 \,.\, n+1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,\ldots\, n-1 \,.\, n \,.\, n+1 \,.\, n+2 \,\ldots\, p+1 \,.\, p},$$

ubi unitatem æquat fractio

$p \,.\, p$

$$\frac{p \,.\, p-1 \,.\, p-2 \,.\, p-3 \ldots n+3 \,.\, n+2 \,.\, n+1}{n+1 \,.\, n+2 \,.\, n+3 \,.\, n+4 \ldots p-2 \,.\, p-1 \,.\, p},$$

quæ unitas cum per multiplicationem non mutet numerum cui juncta eſt, is relinquitur qualis erat in N°. præcedente; cui facile aptatur idem ratiocinium quando p minor eſt quam n.

29. Si numerus alteruter n vel p, puta p, fiat unitas, & ſit $n+1 = m$; tunc omnia facta diverſa ex $m-1 = n$ Factoribus ducta in ſingulos Factores qui ab iis abſunt, præbebunt idem factum m... ies repetitum. Quandoquidem fractio Ni. 28. tunc fiet

$$\frac{n+1 \,.\, n \,.\, n-1 \,.\, n-2 \,.\, n-3 \ldots\ldots 5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \ldots n-3 \,.\, n-2 \,.\, n-1 \,.\, n}$$

in qua ad unitatem revocatur fractio

$$\frac{n \,.\, n-1 \,.\, n-2 \,.\, n-3 \ldots\ldots 5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2}{2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \ldots\ldots n-3 \,.\, n-2 \,.\, n-1 \,.\, n},$$

manet ergo $\frac{n+1}{1} = m$.

30. Quando radices omnes ſunt rationales oſtenſum eſt Sect. I. Cap. V. N°. 114. pag. 28. Tomi I. eſſe coefficientem cognitum ſecundi termini ſummam omnium radicum; coefficientem termini tertii ſummam omnium factorum ex binis radicibus; coefficientem quarti termini ſummam omnium factorum ex ternis radicibus; in genere coefficientem termini locum n occupantis in æquatione eſſe ſummam omnium factorum ex $n-1$ radicibus. Nunc videndum eſt quid accidat quando radices aliquæ ſunt irrationales, & quando ſunt imaginariæ.

31. Ex eo quod coefficiens termini ſecundi eſt ſumma omnium radicum, fluit hunc coefficientem eſſe vere *ſummam*, ſi radices ſint vel omnes poſitivæ, vel omnes negativæ; ſed eſſe *differentiam*, ſi radicum aliquæ ſint poſitivæ, aliquæ negativæ; & hanc differentiam habituram ſignum ſummæ majoris; id eſt negativum ſi ſumma radicum poſitivarum ſit major quam ſumma radicum negativarum, & contra.

32. Ideo, ſi ſumma radicum poſitivarum æquet ſummam radicum negativarum, coefficiens termini ſecundi erit o, aut deficiet terminus ſecundus, Et ſi terminus ſecundus deficiat, æqualis erit ſumma radicum poſitivarum ſummæ radicum negativarum. Secus enim ſupereſſet harum ſummarum differentia, & coefficiens ſecundi termini non poſſet eſſe $= 0$.

33. Idem, verbis mutatis, intelligitur de coefficientibus reliquorum terminorum.

34. Quando æquatio libera eſt ab irrationalibus oportet ut irrationales ſe deſtruant in coefficiente ſecundi termini; ſi quæ ſunt in Factoribus.

35. Si eſt $a+b\sqrt[n]{A} = c+d\sqrt[n]{B}$; erit $a = c$; & $b\sqrt[n]{A} = d\sqrt[n]{B}$.

Non enim, sed, si fieri potest, sit $a = c + e$, & $a - c = e$. Quia erat ex hypothesi

$$a + b\sqrt[n]{A} = c + d\sqrt[n]{B}; \text{ erit } a - c + b\sqrt[n]{A} - d\sqrt[n]{B} = 0 = e + b\sqrt[n]{A} - d\sqrt[n]{B}.$$

Fiat nunc ut b ad d sic $\sqrt[n]{B}$ ad $\sqrt[n]{C}$; eritque $b\sqrt[n]{C} = d\sqrt[n]{B}$; ac

$$e + b(\sqrt[n]{A} - \sqrt[n]{C}) = 0; \text{ vel } \frac{e}{b} = \sqrt[n]{C} - \sqrt[n]{A}$$

id est differentia duarum surdarum æqualis quantitati rationali, quod est absurdum.

36. Fortius vera est propositio si $\sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{A}$ tunc enim $a + b\sqrt[n]{A} - c - d\sqrt[n]{A} = 0$; & $\frac{a-c}{d-b} = \sqrt[n]{A}$.

37. Quare si polynomium aliquod constet e pluribus terminis rationalibus, & e pluribus surdis, sitque totum polynomium $= 0$; summa tum rationalium tum irrationalium pariter seorsim $= 0$.

38. Eodem pacto ostendemus quod si polynomium constet & pluribus terminis realibus & pluribus imaginariis, sitque totum polynomium $= 0$; erit summa realium seorsim $= 0$; & summa imaginariorum pariter seorsim $= 0$

39. Radices imaginariæ revocantur (per N^{um}. 10.) ad formam

$$m + n\sqrt{-1} \text{ vel } m + n\sqrt{-p}$$

& radices reales, ut constat, ad formam

$$m + n\sqrt{+1} \text{ vel } m + n\sqrt{p}$$

ubi m & n sunt quantitates quælibet, vel rationales, vel surdæ; complexæ vel incomplexæ, sed reales. Earum formam, qua conficere possint æquationem rationalem, nunc non quærimus, tantum solliciti de radicibus quadraticis.

40. Omne factum ex pari numero Factorum, quorum singuli continent quantitatem $n\sqrt{+p}$, complectitur rationalem ipsius $n\sqrt{+p}$ expressionem, nempe factum ex binis secundam, e quaternis quartam, e senis sextam &c. potestatem ejus radicalis vel primam, secundam, tertiam, ipsius p.

41 Omne factum ex impari Factorum numero complectitur ipsam radicalem; nempe summa radicum, ipsam radicalem; factum ex ternis, quinis, septenis, radicalem eandem ductam in ejusdem secundam, quartam, sextam &c. potestatem.

42. Si quantitas surda est realis, ejus potestates omnes sunt rationales positivæ, seu sit $+n\sqrt{p}$, seu $-n\sqrt{p}$. Est enim $(\pm n\sqrt{p})^{2r} = +n^{2r}p^{r}$. Sed po-

potestates impares sunt irrationales positivæ, si sit $+n\sqrt{p}$; nam $(+n\sqrt{p})^r = +n^r p^{\frac{r}{2}}$; & negativæ si sit $-n\sqrt{p}$, quia $(-n\sqrt{p})^r = -n^r \cdot p^{\frac{r}{2}}$.

43. Si quantitas surda est imaginaria & r numerus par, quantitas $n^{2r}p^r$ est rationalis & positiva; secus vero rationalis negativa; ita ut ejus potestates secunda, quarta, sexta, octava, decima, duodecima &c; sint alterne negativæ & positivæ. Nam

$$(\pm n\sqrt{-1})^2 = +n^2 \cdot -1 = -n^2; \ (\pm n\sqrt{-1})^4 = +n^4 \cdot -1 \cdot -1 = +n^4.$$

$$(\pm n\sqrt{-1})^6 = (\pm n\sqrt{-1})^4 \cdot (\pm n\sqrt{-1})^2 = +n^4 \cdot -n^2 = -n^6 \ \&c.$$

Harum vero exponentes sunt

$$2 = 2.1; \ 4 = 2.2; \ 6 = 2.3; \ 8 = 4.2; \ 10 = 2.5; \ 12 = 6.2 \ \&c.$$

itaque est, ordine

$$r = 1; \ r = 2; \ r = 3; \ r = 4; \ r = 5; \ r = 6 \ \&c.$$

44. Si quantitas surda est imaginaria, & r numerus impar, est $(\pm n\sqrt{-p})^r$ quantitas imaginaria & alterne positiva & negativa. Sit enim $r = 2s+1$, erit $(\pm n\sqrt{-p})^r = \pm n^{2s+1} \cdot -p^{s+\frac{1}{2}}$. Cum autem sit, ordine, $s = 1$; $s = 2$; $s = 3$ &c. hi reddent ipsas $+n^{2s+1}$ alterne negativas & positivas; sed ipsas $-n^{2s+1}$ alterne positivas & negativas.

45. Si æquatio

$$o = O + Nx + Mx^2 + Lx^3 + Kx^4 + Ix^5 + Hx^6 + \&c.$$

sit divisibilis per $x + m + n\sqrt{p} = o$, erit divisibilis etiam per $x + m - n\sqrt{p}$.

Cum enim æquatio proposita dividi possit per $x + m + n\sqrt{p} = o$, est

$$x = -m - n\sqrt{p}, \ \& \text{ est } -m - n\sqrt{p}$$

una radicum æquationis. Ergo ea substituta pro x, dabit quantitatem nihilo æqualem. Sed hæc substitutio præbet

$$o = O - Nm + M(m^2 + n^2p) - L(m^3 + 3mn^2p) + K(m^4 + 6m^2n^2p + n^4p^2)$$

$$- Nn\sqrt{p} + 2Mmn\sqrt{p} - L(3m^2n\sqrt{p} + n^3p\sqrt{p}) + K(4m^3n\sqrt{p} + 4mn^3p\sqrt{p})$$

$$- I(m^5 + 10m^3n^2p + 5mn^4p^2) + \&c.$$

$$- I(5m^4n\sqrt{p} + 10m^2n^3p\sqrt{} + n^5p^2\sqrt{p}) + \&c.$$

Est ergo (N°. 35.)

o =

$$0 = -Nn\sqrt{p} + 2Mmn\sqrt{p} - L(3m^2n\sqrt{p} + n^3p\sqrt{p}) +$$

$$K(4m^3n\sqrt{p} + 4mn^3p\sqrt{p}) - I(5m^4n\sqrt{p} + 10m^2n^3p\sqrt{p} + n^5p^2\sqrt{p}) + \&c.$$

quæ æquatio dividi poteſt tum per $+n\sqrt{p}$, tum per $-n\sqrt{p}$. Eſt ergo utraque radix hujus æquationis.

46. Obſervandum non ideo confici poſſe, ergo $n\sqrt{p} = 0$, nam eadem æquatio non complectitur omnes conditiones problematis, cum ſit tantum pars propoſitæ, quæ omnes complectebatur.

47. Eadem propoſitio demonſtrari poteſt etiam ex eo quod ipſa pars

$$0 = O - Nm + M(m^2 + n^2p) - L(m^3 + 3mn^2p) + \&c.$$

continent tantum poteſtates pares ipſius $n\sqrt{p}$; altera vero pars

$$0 = -Nn\sqrt{p} + 2Mmn\sqrt{p} - L(3m^2n\sqrt{p} + n^3p\sqrt{p}) + \&c.$$

omnes poteſtates impares ejusdem $-n\sqrt{p}$. Ergo hæc eadem pars altera diviſa per $-n\sqrt{p}$, continebit tantum ejuſdem poteſtates pares. Tum vero utraque æquatio obtinetur omnino eadem, ſeu ponatur $+n\sqrt{p}$, ſeu $-n\sqrt{p}$. Ergo &c.

48. Si quantitas realis $\pm n\sqrt{p}$ fieret imaginaria $\pm n\sqrt{-p}$, æquatio orietur eadem, præter aliquot ſigna mutata ſecundum oſtenſa N^is^ 42. 43. 44. Quæ ſignorum mutatio vim præcedentis non infringit. Igitur

49. Siqua æquatio Factorem habet $x \pm m + n\sqrt{p} = 0$, eadem habet etiam Factorem $x \pm m - n\sqrt{p} = 0$ & ſi qua æquatio Factorem habet $x \pm m + n\sqrt{-p} = 0$, eadem habet etiam Factorem $x \pm m - n\sqrt{-p} = 0$ & viciſſim.

Idem etiam ſic oſtendi poteſt. Quoniam æquatio propoſita dividi poteſt per $x \pm m + n\sqrt{\pm p} = 0$, una e quantitatibus ſolventibus æquationem propoſitam continetur in hac æquatione ſimplici; ergo etiam aliæ quantitates, quæ cum hac neceſſario junctæ ſunt, ſiquæ ſunt, ſolvunt æquationem propoſitam. Atqui ſi $x \pm m + n\sqrt{\pm p} = 0$, neceſſario $x \pm m = -n\sqrt{\pm p}$, & $xx \pm 2mx + mm = nn . \pm p$. Hujus autem æquationis radices neceſſario ſunt $x = \mp m + n\sqrt{\pm p}$ & $x = \mp m - n\sqrt{\pm p}$. Ergo &c.

50. Quare hujusmodi æquatio dividi poteſt per Factorem trinomialem

$$xx \pm 2mx + mm \mp nnp = 0 = (x \pm m + n\sqrt{\pm p})\ (x \pm m - n\sqrt{\pm p})$$

51. Tunc autem, ſi radices ſunt reales, habebitur $-nnp$; nam $+n\sqrt{p} . -n\sqrt{p} = -nnp$. Sed, ſi radices ſunt imaginariæ, habebitur $+nnp$; quia $+n\sqrt{-p} . -n\sqrt{-p} = -nn . -p = +nnp$.

52. Factor trinomialis N^i^. 50. ſemper eſt realis & immunis a radicali quadratica $\sqrt{\pm p}$.

53. Ex demonſtratis ſub N^is^. 47. 48. fluere videtur quod abſurda eſt æquatio præbens unum e duobus Factoribus ibi deſcriptis, & non alterum. Ideo ſi qua æquatio comperiatur habere radicem unam $x = \pm m + n\sqrt{\pm p}$, aut

aut necessario habebit aliam $\beta = \pm m - n\sqrt{p}$; aut falsa erit hypothesis præbens $\alpha = \pm m + n\sqrt{\pm p}$, & excludens $\beta = \pm m - n\sqrt{\pm p}$.

54. Æquatio ordinis imparis $2s+1$ habet ultimum terminum conflatum ex Factoribus $2s+1$. Ergo æquatio ordinis imparis, si rationalis est, non potest habere Factores omnes formæ

$$x \pm m \pm n\sqrt{\pm p} = 0$$

Nam ultimus terminus necessario esset irrationalis.

55. Quare omnis æquatio ordinis imparis habet saltem unam radicem realem, &c, si plures habet reales, earum numerus est semper impar.

56. Æquatio ordinis paris $2s$, habet ultimum terminum conflatum ex Factoribus numero $2s$. Eadem confici potest ex s Factoribus trinomialibus descriptis N°. 50. Sed ubi radices singulorum Factorum trinomialium sunt imaginariæ, hi Factores ultimum terminum habent positivum. Ergo

57. Si æquatio ordinis paris $2s$ habet omnes radices imaginarias, habet ultimum terminum positivum. Et si æquatio ordinis paris $2s$ habet ultimum terminum negativum, ea habet saltem duos Factores reales, formæ

$$x \pm m + n\sqrt{p} = 0 \text{ \& } x \pm m - n\sqrt{p} = 0$$

58. Sed ultimus terminus Factoris trinomialis hinc orti est $mm - nnp$, qui positivus est quando m superat $n\sqrt{p}$, vel quando utraque radix æquationis $\mp m \pm n\sqrt{p}$, est positiva; & si hujusmodi essent omnes ultimi termini omnium Factorum trinomialium, darent ultimum terminum æquationis compositæ positivum. Ergo, quando ultimus terminis æquationis compositæ, ordinis paris, negativus est, ultimus terminus unius saltem Factoris trinomialis negativus est, atque ideo m est minor quam $n\sqrt{p}$. Tunc autem $x \pm m + n\sqrt{p} = 0$ dat $x = \mp m - n\sqrt{p}$, quæ radix est negativa; & $x \pm m - n\sqrt{p} = 0$ præbet $x = \mp m + n\sqrt{p}$, quæ radix est positiva, Igitur

59. Omnis æquatio ordinis paris habens ultimum terminum negativum, habet saltem duas radices reales, alteram positivam, alteram negativam.

60. Cum vero ultimi termini Factorum binomialium, formæ $-qq$, dent factum positivum, si eorum numerus est par, negativum si impar; constat omnem æquationem ordini paris $2s$, habens ultimum terminum negativum, habere radicum realium numerum impariter parem, nempe duas, quod ostendimus, vel, si plures, aut sex, aut decem, &c. numquam quatuor, octo &c.

61. Quævis radix realis $\sqrt[n]{A}$, geometrice potest determinari, quærendo $n-1$ medias proportionales inter unitatem & A. Sic $\sqrt[3]{A}$ invenitur prima duarum proportionalium inter 1 & A, est enim

$$1 \text{ ad } \sqrt[3]{A} \text{ ut } \sqrt[3]{A} \text{ ad } \sqrt[3]{AA} \text{ ut } \sqrt[3]{AA} \text{ ad } \sqrt[3]{A^3} = A$$

Pariter $\sqrt[4]{A}$; $\sqrt[5]{A}$ &c, eſt prima trium, quatuor &c. proportionalium inter. & A.

Hæ mediæ proportionales vel per curvarum interſectionem, vel mechanice per inſtrumenta, poſſunt ſemper inveniri. Licet ergo quamlibet quantitatem realem exponere ſine ſigno, etiamſi non ſemper ex datis in æquatione liceat exponere valorem incognitæ ſine ſigno, quinimo etiamſi aliquando nullo pacto poſſimus exponere. Aliud eſt æquationem ſolvere, ideſt exponere per datas in æquatione valorem incognitæ, aut invenire quantitatem ſimplicem, cujus poteſtates poſitæ pro incognitæ poteſtatibus reſpondentibus, reddant æquationem nihilo æqualem, aut tandem quæ juncta ſimbolo incognitæ per ſignum aptum, æquationem dividat ſine reſiduo: aliud eſt inquirere quid accidat quando omnes radices æquationis ſunt reales.

62. Cum poni poſſit $\sqrt[n]{A} = a$, quando $\sqrt[n]{A}$ eſt quantitas realis, patet idem fieri poſſe quando $\sqrt[n]{A} = \sqrt[r]{B} \pm \sqrt[s]{C} \pm \sqrt[t]{D} \pm$ &c. Nam ex N°. LXXXIII. Sect. I. Cap. VIII. Tom. I. pag. 76, omnes radicales revocari poſſunt ad eundem exponentem m. Singulæ radicales exponi poſſunt ſine ſigno per β; γ; δ, & harum aggregatum per unicum ſimbolum, quomodocunque ea junctæ ſint per ſigna + & —.

63. Idem fieri poteſt quando ſunt radicales radicalium, ut ſi eſſet $\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{(B \pm \sqrt[r]{(C-D+\sqrt[s]{E})})}$; ex gr. ſi haberetur $\sqrt[7]{(ab+\sqrt[5]{(cd-ef+\sqrt[3]{G})})}$. Nam inveniri poteſt valor ipſius $\sqrt[s]{E} = \alpha$; deinde valor $\sqrt[r]{(C-D+\alpha)} = \beta$; ac tandem valor ipſius $\sqrt[n]{(B \pm \beta)}$.

64. Ponamus igitur æquationem ordinis m, habentem omnes radices reales, conflari ex æquationibus ſimplicibus

$$x+a=0;\ x+b=0;\ x+c=0;\ x+d=0 \text{ \&c}$$

donec numerus Factorum ſimplicium ſit m, quandoquidem hoc fieri poteſt, ſeu adſint radicales meræ, ſeu radicales & rationales, ſeu meræ rationales.

65. Conſtat coefficientem ſecundi termini, vel x^{m-1}, eſſe harum ſummam

$$a+b+c+d+e+f+ \text{\&c} = A$$

& coefficientem tertii termini, vel ipſius x^{m-2} eſſe ſummam factorum ex binis, nempe

$$a(b+c+d+e+f+g+\text{\&c}) + b(c+d+e+f+g+\text{\&c}) +$$

$$c(d+e+f+g+\text{\&c}) + d(e+f+g+\text{\&c}) + e(f+g+\text{\&c}) + \text{\&c.} = B$$

66.

66. Nunc dico quod si A $= 0$, erit, in hac hypothesi, B quantitas negativa. Enim sit

$$a + b + c + d + e + f + g + \&c = 0$$

erit

$$a = -b - c - d - e - f - g - \&c.$$

&

$$a(b + c + d + e + f + g + \&c) = (-b - c - d - e - f - g - \&c) \text{ in }$$
$$(+b + c + d + e + f + g + \&c) =$$
$$-(b + c + d + e + f + g + \&c)^2$$

Sed in hoc quadrato complexo & negativo, sunt negative sumta quadrata simplicia, idest $-bb$; $-cc$; $-dd$; $-ee$; $-ff$; $-gg$; $-$ &c, & præterea bina rectangula ex singulis in summam sequentium, pariter negative sumta, idest

$$-2b(c + d + e + f + g + \&c) - 2c(d + e + f + g + \&c) -$$
$$2d(e + f + g + \&c) - 2e(f + g + \&c) - \&c.$$

Atqui eadem rectangula, sed simpla & positive sumta, sunt in reliqua parte coefficientis B. Manet igitur omnino in hac hypothesi, pro B summa quadratorum & rectangulorum negative sumtorum.

67. Hoc ratiocinium se extendit ad alias hypotheses secundum quas esse potest A $= 0$; quæ tandem ad duas revocantur. Nam

Primo fieri potest ut quantitates a; b; c; &c. in coefficiente A junctæ sint utcunque signis + & −.

Secundo fieri potest, ut eæ se destruant per partes, quemadmodum, si binæ, ternæ, quaternæ &c. se destruant, ut si sit $a + b = 0 = c + d = e + f = g + h$ &c, vel $a + b + c = 0 = d + e + f = g + h + i$ &c vel $a + b = 0 = c + d + e = f + g + h + i$ &c, & sic de reliquis.

68. Nam statim, quomodocumque hæ quantitates se destruant, semper erit eorum aggregatum nihilo æquale, ut patet, quia si $a + b = 0$, & $c + d = 0$ erit etiam, addendo æqualia æqualibus $a + b + c + d$ &c $= 0$. Ceterum idem constat ex hypothesi, ex qua est A $= 0$. Tamen non semper eadem invenitur summa factorum ex binis, ut postea videbimus.

69. Quomodocumque junctæ sint quantitates a; b; c; &c in coefficiente A $= 0$, eæ omnes, præter eam quæ reliquarum summæ ponitur æqualis, ex. gr. præter a, habebunt in valore ipsius a signa contraria iis, quæ habebant in ipso coefficiente A, ut patet per regulas transpositionis. Ex. gr. sit

A

$$A = o = a + b - c + d - e - f + g + \&c$$

erit

$$a = - b + c - d + e + f - g - \&c.$$

70. Semper igitur rectangula post substitutionem valoris pro a, habebunt signa opposita iis quae prius habebant. Quod ut pateat, ponatur summa omnium

$$a + b - \alpha = A$$

summa factorum ex binis erit

$$a\,(b - \alpha) - b\alpha.$$

Et quando

$$A = o = a + b - \alpha, \text{ atque ideo } a = - b + \alpha$$

fit

$$a(b - \alpha) = (- b + \alpha)\,(+ b - \alpha) = -(b - \alpha)^2 = - bb + 2\alpha b - \alpha\alpha$$

Habent ergo $- b\alpha$ in summa factorum ex binis, & $+ b\alpha$ in valore prioris partis $a\,(b - \alpha)$ invento per substitutionem, signa contraria; & hactenus superest

$$B = - bb + b\alpha - \alpha\alpha.$$

Cum autem sit bb ad $b\alpha$ ut $b\alpha$ ad $\alpha\alpha$, est $bb + \alpha\alpha$ major quam $2b\alpha$, & fortius quam $b\alpha$. Est ergo $- bb + b\alpha - \alpha\alpha$ quantitas negativa.

Ponatur nunc

$$- \alpha = - c + \beta$$

est summa factorum ex binis, erit

$$a(b - c + \beta) + b(- c + \beta) - c\beta$$

Quia vero est $a = - b + c - \beta$, erit prima pars hujus facti, id est

$$a(b - c + \beta) = (- b + c - \beta)\,(+ b - c + \beta) = -(+ b - c + \beta)^2 =$$

$$- bb - 2b(- c + \beta) - cc + 2c\beta - \beta\beta$$

Habent ergo $+ b(- c + \beta)$ & $- c\beta$ in summa factorum ex binis, & $- b(- c + \beta)$ ac $+ c\beta$ in valore prioris partis $a(b - c + \beta)$ signa contraria, & hactenus superest

$$B = - bb + bc - b\beta\, cc + c\beta - \beta\beta$$

ubi

ubi quantitas $-cc+2c\beta-\beta\beta$ probabitur negativa, ut supra. Sed, per idem ratiocinium est

$$bb \text{ ad } b(-c+\beta) \text{ ut } b(-c+\beta) \text{ ad } (-c+\beta)^2$$

atque ideo

$$bb+(-c+\beta)^2 \text{ major quantitas quam } 2b(-c+\beta)$$

ergo quantitas negativa erit

$$-bb+2b(-c+\beta)-cc+2c\beta-\beta\beta$$

& fortius, quantitas

$$-bb+b(-c+\beta)-cc+c\beta-\beta\beta$$

in qua dimidiata pars quantitatum positivarum sumta est.

Constat hoc ratiocinium extendi posse in infinitum, ponendo utcunque

primo $\beta=\pm d\pm\gamma$; deinde $\gamma=\pm e\pm\delta$ &c.

71. Quare ostensum est id quod propositum fuerat N^{is} 66. 67. & quod huc recidit.

Omnis æquatio carens secundo termino, habet tertium negativum, si omnes ejus radices sunt reales.

72. Quare, si æquatio carens secundo termino habet tertium terminum positivum, ea habet aliquot, saltem, radices imaginarias.

Hoc necessario sequitur ex demonstratis. Tamen sic ostendi potest, Quando secundus terminus evanescit, est

$$B=-bb+ba-aa. \text{ (N}^\circ\text{. 70.)}$$

Ea quantitas tunc erit positiva, quando aa est minor quam $ba-bb$. Sit ergo

$$aa=ba-bb-cc, \text{ erit } a=\frac{b}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(-3bb-4cc)}$$

quæ quantitas est imaginaria.

73 Neque tamen dici potest, siquæ sint radices imaginariæ in æquatione quæ caret secundo termino, ea habebit tertium positivum. Nam æquatio quævis

$$x^r+Ax^{r-1}+Bx^{r-2}+Cx^{r-3}+\&c=0$$

ducatur in Factorem trinomialem, cujus radices sunt imaginariæ, & cujus formula est

$$x^2 + 2mx + mm + nnp = 0$$

fiet

$$\left.\begin{array}{l} x^{r+2} + Ax^{r+1} + Bx^r + \&c \\ \quad + 2mx^{r+1} + 2mAx^r + \&c \\ \quad\quad + mmx^r + \&c \\ \quad\quad + nnpx^r + \&c \end{array}\right\} = 0$$

in qua, ut evanescat secundus terminus, esse debet $A = -2m$; quare ponendo in coefficiente tertii termini $-4mm$ pro $+2mA$, is, deletis delendis, fit

$$B - 3mm + nnp$$

& fieri potest ut $B + nnp$ sit major, vel minor, quam $3mm$.

Vel, ex N°. 70, erit B quantitas negativa si $\alpha\alpha$ est major quam $b\alpha - bb$. Sit

$$\alpha\alpha = b\alpha - bb + cc; \text{ \& ideo } \alpha = \frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(-3bb + 4cc)}$$

fieri potest ut $\sqrt{(-3bb + 4cc)}$ sit imaginaria, nempe si $3bb$ major est quam $4cc$. Ergo æquatio habens terminum secundum evanescentem, & tertium negativum, habere potest radices imaginarias.

74. Ceterum, si summa omnium radicum $A = 0$ quia radices se destruunt binæ, ternæ, &c; summa factorum ex binis B; ex ternis C; ex quaternis D; &c. libera erit a tot radicalibus diversis, quot sunt æquationes oriundæ ex radicibus se destruentibus; sic si summa radicum sit

$$A = a + b + c + d + e + f + g + h + i + k + \&c$$

ad numerum m, & ponatur una a æqualis summæ reliquarum omnium, erunt in summis B; C; D; &c. $m - 1$ radices diversæ.

Si sit

$a = -b - c$; $d = -e - f - g$; $h = -i - k - l - p$; ita ut habeantur æquationes ad numerum n, minorem quam m, erunt in summis B; C; D; &c., $m - n$ radicales diversæ. Quia nempe totidem exterminantur, pro iis ponendo valores suos.

75. Præterea in valore quantitatis B invento ad N^{um}. 70. ex generali hypothesi quod $A = 0$, tot delentur facta ex binis, quot sunt æquationes peculiares nihilo æquales per hypothesim. Sic erat

B

$$B = -bb - b(c+d+e+f+g+h+i+k+ \&c)$$
$$-cc - c(d+e+f+g+h+i+k+ \&c)$$
$$-dd - d(e+f+g+h+i+k+ \&c)$$
$$-ee - e(f+g+h+i+k+ \&c)$$
$$-\&c. - \&c.$$

Si nunc fit $d+e+f+g = 0 = h+i+k+ \&c$

delebuntur

$$b(d+e+f+g+h+i+k \ \&c) = b(0+0) =$$

$$c\ (d+e+f+g+h+i+k+ \&c) =$$

$$d\ (h+i+k+ \&c) = e\ (h+i+k+ \&c)\ \&c.$$

& supererit omnino

$$B = -bb - bc - cc - dd - d(e+f+g) - ee - e(f+g)\ \&c$$

76. Quapropter si binæ se destruant, manebunt sola quadrata. Tunc autem necessario radicum numerus est par. Constat autem hujusmodi mutationes in valore ipsius B, non infringere vim ratiocinii superius allati.

Hinc etiam, æquatio rationalis nullum habens coefficientem fractum, nullam habet radicem fractam.

Nam si est

$$A = a+b+c+ \ldots\ldots + \frac{m}{n}$$

statim coefficiens termini secundi fractus est.

Si est

$$A = a+b+c+ \ldots\ldots + \frac{m}{n} - \frac{m}{n}$$

erit fractio $-\frac{mm}{nn}$ in B coefficiente tertii termini

Si una fractio sit æqualis pluribus, ut sit

$$A = a+b+c+ \ldots\ldots \frac{m}{n} - \frac{p}{q} - \frac{r}{s} - \&c;$$

$$\&\text{ sit } \frac{m}{n} = \frac{p}{q} + \frac{r}{s} + \&c$$

erit in B fractio

D 2 (—

$$(-\frac{p}{q}-\frac{r}{s}+ \&c)\ (+\frac{p}{q}+\frac{r}{s}+\&c).$$

Demonstratum est Nis 20. 21. quod æquatio cujus omnes radices sunt affirmativæ, habet terminos alterne positivos & negativos; & quod æquatio cujus radices omnes sunt negativæ, habet omnes terminos affirmativos.

78. Neque tamen dici potest, æquatio cujus signa alternant, habet omnes radices positivas; quia potest habere radices imaginarias, quæ neque positivæ sunt, neque negativæ.

Nam æquatio quadratica formæ,

$$xx - ax + A = 0$$

habet duas radices imaginarias, quando est aa minor quam $4A$. Si plures æquationes hujusmodi, in quibus coefficientes secundi termini sint $-\beta$; $-\gamma$; δ; $-$ &c., & ultimi termini sint $+B$; $+C$; $+D$; $+$ &c., inter se ducantur, conficient compositam, cujus omnia signa alternabunt, ut constat e superiore demonstratione.

79. Potest igitur hujusmodi æquatio oriri tum e radicibus realibus, tum e radicibus imaginariis, quin ex æquationibus simplicioribus, quorum aliquæ habeant radices reales, aliquæ imaginarias.

80. Æquatio rationalis gradus imparis habere nequit omnes radices formæ $m + n\sqrt{p}$. (No. 54.)

81. Omnis æquatio gradus imparis, cujus signa alternant, habet ultimum terminum negativum. Sit enim $2r+1$ exponens altissimi termini, hæc æquatio habebit terminos numero $2r+2$. Ultimus ergo occupabit sedem numero parem, constabit ex impari Factorum numero, quod etiam constat ex eo quod ultimus terminus sit factum ex omnibus radicibus; atqui hæ habent omnes signum $-$ in Factoribus simplicibus. Ergo &c.

82. Omnis æquatio gradus paris habet in eadem hypothesi, ultimum terminum positivum.

83. Si omnes æquationis radices sunt negativæ, atque ideo omnes Factores formæ.

$$x + m = 0.$$

Omnes termini erunt positivi. (Nis 20. 21.)

Sed cum radices quadraticæ semper sint binæ, æquales & oppositæ; binarum factum, ut omnia signa sint positiva, esse debet formæ

$$xx + px + q = 0$$

cujus radices sunt reales si $\frac{1}{4}pp$ superat q, secus imaginariæ, æquatio cujus omnia signa sunt positiva, habere potest radices vel omnes reales, vel omnes imaginarias, vel partim reales, partim imaginarias.

84.

84. Ergo æquatio cujus omnia signa nec alternant nec positiva sunt, habet aliquot radices positivas, aliquot negativas; aut omnes imaginarias.

85. Æquatio quadratica oriri potest ex duobus Factoribus rationalibus.

si ejus Factores sint imaginarii formæ

$$x \pm m + n\sqrt{-p} = 0, \ \& \ x \pm m - n\sqrt{-p} = 0,$$

orietur æquatio

$$x^2 \pm 2mx + mm + nnp.$$

Si ejus Factores sint reales, & formæ

$$x \pm m + n\sqrt{p} = 0; \ x \pm m - n\sqrt{p} = 0;$$

orietur æquatio

$$x^2 \pm 2m + mm - nnp = 0$$

86. Harum æquationum termini ultimi differunt quantitate $2nnp$.

87. Æquatio quævis.

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} \ldots Nx + O = 0$$

ducta in $x + \alpha$, fit.

$$\begin{array}{llllllll} x^{n+1} & + Ax^n & + Bx^{n-1} & + Cx^{n-2} & + Dx^{n-3} & + Ex^{n-4} & \ldots + Ox & + \alpha O = 0 \\ & + \alpha & + \alpha A & + \alpha B & + \alpha C & + \alpha D & & + \alpha N \end{array}$$

88. Qua propter, si æquatio proposita resolvi potest in Factores, erit.

$$A = a + \beta; B = b + \beta a; C = c + \beta b; \&c.$$

ponendo a; b; c &c. esse coefficientes æquationis uno gradu inferioris.

$$x^{n-1} + ax^{n-2} + bx^{n-3} + cx^{n-4} + \&c \ldots p = 0$$

& hanc esse ductam in $x + \beta$, ut conficiat propositam ordinis n. Hoc ratiocinium prosequi licet quamdiu æquatio resolvi potest in Factores.

89. Omnis æquatio, cujus radices sunt reales, resoluta in Factores concipi potest; ut constat ex terminis. *Concipi* inquam potest, non *resolvi*, quia latet adhuc methodus generalis determinandi radices æquationum ex earum coefficientibus.

90. Si æquatio habeat omnes radices reales, & ex ea excerpantur tres termini continui, quorum primus & ultimus habeant eadem signa, semper factum e coefficientibus primi & ultimi termini ex excerptis, majus erit

quadrato coefficiente termini medii. Nam ex æquatione ordinis n excerpantur tres termini continui

$$Lx^{n-r} + Mx^{n-r-1} + Nx^{n-r-2}$$

Erit

$$L = l + \alpha k;\ M = m + \alpha l;\ N = n + \alpha m \ \&c$$

ideſt, quivis coefficiens propoſitæ conſtabit ex duobus coefficientibus continuis æquationis ordinis $n - 1$, altero ut erat, & præcedente ducto in radicem realem α. Quare

$$LN = (l + \alpha k)(n + \alpha m) = ln + \alpha lm + \alpha nk + \alpha\alpha km$$

atque

$$MM = mm + 2\alpha lm + \alpha\alpha ll$$

Eritque LN minor quantitas quam MM, ſi ln minor eſt quam mm, & αnk minor quam αlm vel nk, quam lm, & $\alpha\alpha km$ minor quam $\alpha\alpha ll$, vel km minor quam ll. Sunt autem k; l; m; coefficientes æquationis inferioris, nempe ordinis $n - 1$; qui ſinguli conficientur ex coefficientibus æquationis inferioris & ordinis $n - 2$, ductis in radicem realem β; ſiquidem æquatio propoſita radices omnes habet reales; & ſic progrediendo per radices reales deveniemus tandem ad æquationem quadraticam

$$\delta x^2 + \eta x + \zeta$$

in qua, ſi $\delta\zeta$ ſit minor quam $\eta\eta$, vera erit propoſitio de æquatione trium dimenſionum; atque ideo de æquatione quatuor dimenſionum &c; cum veritas propoſitionis in æquatione ordinis n, pendeat ab ejus veritate in æquatione ordinis $n - 1$, &c.

Atqui æquatio quadratica, ſi duo termini extremi habeant eadem ſigna, donari poteſt hac forma

$$xx \pm \frac{\eta x + \zeta}{\delta}$$

cujus radices ſunt

$$x \pm \frac{\eta + \sqrt{(\eta\eta - 4\delta\zeta)}}{2\delta} \ \& \ \frac{x \pm \eta - \sqrt{(\eta\eta - 4\delta\zeta)}}{2\delta}$$

quæ reales non ſunt niſi ſit $\eta\eta$ major quantitas quam $4\delta\zeta$; Ergo fortius eſt $\eta\eta$ major quam $\delta\zeta$; quando radices ejus æquationis ſunt reales.

91. Hæc autem propoſitio converti nequit. Sic æquatio

x^4

$$x^4 + 4mx^3 + 6m^2x^2 + 4m^3x + m^4 - n^4p^2 = 0$$

in qua pono mm majorem quam nnp, ita eſt conſtituta ut $1 . 6m^2$ ſit minor quam $4m . 4m = 6m^2$; & $4m . 4m^3 = 16m^4$ minor quam $6m^2 . 6m^2 = 36m^4$ ac $6m^2 (m^4 - n^4p^2) = 6m^6 - 6m^2n^4p^2$ minor quam $4m^3 . 4m^3 = 16m^6$. Tamen ea æquatio duas habet radices imaginarias $x + m + n\sqrt{-p} = 0$ & $x + m - n\sqrt{-p}$.

Si vero termini extremi æquationis quadraticæ, ad quam tandem devenitur, haberent ſigna contraria, nihil poſſet confici. Nam æquatio

$$xx \pm \frac{nx - \zeta}{\delta}$$

habet radices ſemper reales

$$x \pm \frac{n + \sqrt{(nn + 4\delta\zeta)}}{2\delta} \quad \& \quad x \pm \frac{n - \sqrt{(nn + 4\delta\zeta)}}{2\delta}$$

ſeu ſit nn major ſeu minor quam $4\delta\zeta$.

92. Ut indicarem duos terminos continuos, r..*mum*, & $r+1$...*mum*, habere eadem ſigna, dixi N°. 23. eſſe ſignorum *ſucceſſionem*; ut explicarem duos terminos continuos habere ſigna contraria, dixi *mutationem*; nunc ſucceſſionem vel mutationem ambigue vocabo *ſignorum relationem*.

93. Æquatio ordinis n habet n ſignorum relationes: conſtat ex N°. 23.

94. Æquatio ordinis n; quam dicam componentem, ducta in Factorem ſimplicem formæ $x \pm \alpha$, dat æquationem ordinis $n+1$, quam vocabo compoſitam, in qua termini ſunt numero $n+2$; ſignorum relationes $n+1$; & termini quorum coefficientes conſtant duabus partibus, numero n. Nam hæc æquatio compoſita conſtat duabus *ſeriebus*, quarum una

$$x^{n+1} + Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + Dx^{n-3} \ldots + Rx$$

eſt ipſa componens

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} \ldots + R$$

ducta in x. Altera vero ſeries

$$\pm \alpha x^n \pm \alpha A x^{n-1} \pm \alpha B x^{n-2} \pm \alpha C x^{n-3} \pm \alpha D x^{n-4} \ldots \pm \alpha R$$

eſt eadem componens ducta in α. Ita vero diſponendæ ſunt hæ ſeries ut primus, ſecundus, tertius &c. terminus ſecundæ ſeriei ſubſit ordine, ſecundo, tertio, quarto &c. termino primæ. Hinc ultimus terminus αR ſecundæ ſeriei ſequetur ultimum Rx primæ, ut primus x^{n+1} primæ præcedit primum

mum ax^n secundæ. Igitur primus & ultimus terminus compositæ sunt incomplexi; reliqui omnes complexi & quidem duabus partibus. Omnium autem terminorum numerus in composita est $n+2$; ablatis duobus, primo & ultimo qui sunt incomplexi, manet complexorum numerus n, qui pariter est numerus relationum signorum in componente.

95. Quæcunque sit relatio signorum in componente, manebit omnino eadem, si componens multiplicetur per quantitatem incomplexam seu positivam, seu negativam; sed in prima hypothesi signa manebunt in facto qualia erant in componente; in secunda hypothesi signa positiva mutabuntur in negativa, & negativa in positiva. Patet ex legibus signorum in multiplicatione.

96. Igitur tot & iisdem locis erunt tum successiones tum mutationes in facto, quot & quibus locis erant in componente.

97. Atqui componens prius ducitur in x, quæ quantitas semper est positiva. Igitur tot & iisdem locis prima series compositæ habebit mutationes & successiones, quot composita, si numerus locorum computetur ab altissimo termino in utraque. Si vero considerentur exponentes ipsius x, hi erunt in prima serie compositæ aucti unitate, ita ut si exponentes duorum terminorum sint $n-r$, & $n-r-1$, atque hi habeant eadem signa in componente; termini quorum exponentes sunt $n-r+1$ & $n-r$ in prima serie compositæ habeant eadem signa. Si vero termini quorum exponentes sunt $n-p$ & $n-p-1$ in componente habeant signa contraria, termini quorum exponentes sunt $n-p+1$, & $n-p$, habeant signa opposita in prima serie compositæ. Et quidem eadem erit mutatio in utraque; id est vel e $-$ in $+$, vel e $+$ in $-$.

98. Idem constat de secunda serie compositæ, si Factor simplex sit $x+\alpha$.

99. Cum autem termini secundæ seriei in composita uno loco promoveantur singuli, dum secunda series jungitur primæ ut compleatur æquatio composita, constat tot futuros in composita coefficientes complexos, quorum partes habent signa opposita, quot sunt mutationes in componente; & hanc signorum *oppositionem* accidere in iis terminis compositæ qui habent eosdem exponentes ac primi termini singularum mutationum in componente. Tot autem in composita erunt termini complexi, quorum duæ partes habent eadem signa, quot sunt successiones in componente; & hæc signorum *similitudo* locum habebit in terminis compositæ, qui habent eosdem exponentes ac termini successivi in componente, præter ultimos cujusque successionis. Ex. gr. sit componens

$$x^9 + Ax^8 + Bx^7 - Cx^6 - Dx^5 + Ex^4 - Fx^3 + Gx^2 - Hx - I = 0$$

in qua sunt quinque mutationes, prima ex $+Bx^7$ in $-Cx^6$; secunda ex $-Dx^5$ in $+Ex^4$; tertia $+Ex^4$ in $-Fx^3$, quarta ex $-Fx^3$ in $+Gx^2$; quinta denique ex $+Gx^2$ in $-Hx$. Igitur primi termini singularum mutationum, habent exponentes 7; 5; 4; 3; 2. Termini, qui in composita ex hac & $x+\alpha$ habent hos eosdem exponentes, constabunt duabus partibus oppositis. Exponentes terminorum successivorum in componente, sunt

9; 8;

9; 8; 7. & 6 ac 5, & 1 ac 0; hinc demtis 7 ac 5, (qui sunt communes his terminis ac primis singularum mutationum,) & 0, (qui est exponens ultimi termini,) manent 9; 8; 6; 1; exponentes terminorum constantium duabus partibus similibus in composita ut supra. Revera composita est

$$x^{10} \begin{matrix} +A \\ +\alpha \end{matrix} x^9 \begin{matrix} +B \\ +\alpha A \end{matrix} x^8 \begin{matrix} -C \\ +\alpha B \end{matrix} x^7 \begin{matrix} -D \\ -\alpha C \end{matrix} x^6 \begin{matrix} +E \\ -\alpha D \end{matrix} x^5 \begin{matrix} -F \\ +\alpha E \end{matrix} x^4 \begin{matrix} +G \\ -\alpha F \end{matrix} x^3 \begin{matrix} - \\ + \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} -H \\ +\alpha G \end{matrix} x^2 \begin{matrix} -I \\ -\alpha H \end{matrix} x - \alpha I = 0$$

100. Si vero Factor simplex sit $x - \alpha$, quæ diximus de prima serie, huc repetenda erunt; sed in secunda pro signis positivis scribenda erunt negativa, & contra. Sic eadem æquatio novem dimensionum multiplicata per $x - \alpha$, fiet

$$x^{10} \begin{matrix} +A \\ -\alpha \end{matrix} x^9 \begin{matrix} +B \\ -\alpha A \end{matrix} x^8 \begin{matrix} +C \\ -\alpha B \end{matrix} x^7 \begin{matrix} -D \\ +\alpha C \end{matrix} x^6 \begin{matrix} +E \\ +\alpha D \end{matrix} x^5 \begin{matrix} -F \\ -\alpha E \end{matrix} x^4 \begin{matrix} +G \\ +\alpha F \end{matrix} x^3 \begin{matrix} - \\ - \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} -H \\ -\alpha G \end{matrix} x^2 \begin{matrix} -I \\ +\alpha H \end{matrix} x + \alpha I = 0$$

101. Quapropter ubi erant signorum oppositiones in prima hypothesi, erunt similitudines in hac secunda; & ubi erant similitudines, erunt oppositiones.

Sic exemplum præbebat terminos in quibus x habet exponentes 9; 8; 6; 1, constantes duabus partibus similibus; & eos in quibus x exponentes habet 7; 5; 4; 3; 2, constantes duabus partibus oppositis, quando nempe proposita ducta erat in $x + \alpha$: nunc, (eadem proposita ducta in $x - \alpha$) termini, in quibus x habet exponentes 9; 8; 6; 1, constant duabus partibus oppositis; & termini, in quibus x habet exponentes 7; 5; 4; 3; 2, constant duabus partibus similibus.

102. Una radix negativa addita æquationi ordinis n, ut fiat æquatio ordinis $n+1$, addet unicam successionem. Et una radix positiva unicam mutationem.

Nam, quatenus eædem sunt mutationes & successiones in composita ab altissimo termino x^{n+1} ad penultimum Sx, quæ sunt in tota composita, nempe ab ejus altissimo termino x^n ad ultimum S; si radix est negativa, una additur successio in composita, a penultimo termino sx ad ultimum αS, qui tunc semper habet idem signum ac ultimus componentis, aut penultimus compositæ. Hoc autem accidit.

Primo quando omnia signa componentis sunt positiva.

Secundo, quando sunt quidem signa tum positiva tùm negativa; sed est semper α minor quam coefficiens unius termini ex componente divisus per coefficientem termini præcedentis pariter e componente desumti. Quan-

doquidem si est α minor quam A; & quam $\frac{B}{A}$; & quam $\frac{C}{D}$; & quam $\frac{D}{E}$ &c; erit pariter αA minor quam B; αB minor quam C; αC minor quam D &c. Igitur in composita prævalebunt signa seriei superioris, quæ sunt eadem ac signa componentis (N°. 94.)

102. Sed quando radix est positiva, ultimus terminus compositæ habet signum contrarium signo quod habebat ultimus terminus componentis: hoc autem signum idem est ac signum penultimi termini compositæ. Quare in hac hypothesi addita est compositæ una mutatio a penultimo termino ad ultimum.

Æquatio multiplicata per Factorem $x-\alpha$ habet ab altissimo termino x^{n+1} ad penultimum Sx easdem successiones & mutationes quas habebat composita, quando prævalent omnia signa seriei superioris (N°. 100.)

103. In hac hypothesi composita habebit mutationes & successiones iisdem locis, in quibus eas habebat componens.

104. Quæ diximus de toto intelliguntur de parte. Tot sunt termini in composita ab altissimo x^{n+1} ad aliquem $(F..\alpha E)x^{n-r+1}$, quot in componente ab altissimo x^n ad Fx^{n-r}. Quare tot esse possunt mutationes & successiones in composita, quot in componente, intra hos limites. Quod ubi accidit nulla neque mutatio neque successio introducta est in composita, ut patet ex terminis.

105. Neque mutari potest relatio signorum in aliquo compositæ termino, nisi is constet duabus partibus oppositis. Hoc autem ut accidat, quando Factor est $x+\alpha$, aut radix negativa, necessario duo termini continui æquationis componentis habebunt signa contraria. Sint ergo duo termini continui æquationis componentis

$$+Fx^{n-r} - Gx^{n-r-1}$$

vel pro secunda hypothesi

$$-Fx^{n-r} + Gx^{n-r-1}$$

e quibus & e termino præcedente .. Ex^{n-r+1}, fiant multiplicando per $x+\alpha$, duo termini continui compositæ

$$\begin{matrix} +Fx^{n-r+1} & -Gx^{n-r} \\ \ldots\alpha E & +\alpha F \end{matrix}$$

vel pro secunda hypothesi,

$$\begin{matrix} -Fx^{n-r+1} & +Gx^{n-r} \\ \ldots\alpha E & -\alpha F \end{matrix}$$

106.

106. Quando autem Factor est $x - \alpha$, aut radix positiva; terminus compositæ habebit duas partes affectas signo contrario, quando duo termini continui ex æquatione componente habent eadem signa. Sint ergo duo termini æquationis componentis

$$+ Fx^{n-r} + Gx^{n-r-1}$$

vel, pro secunda hypothesi

$$- Fx^{n-r} - Gx^{n-r-1}$$

e quibus, & e termino præcedente .. Ex^{n-r+1}, fiant multiplicando per $x - \alpha$, duo termini continui compositæ

$$\begin{matrix} + Fx^{n-r+1} & + Gx^{n-r} \\ \ldots \alpha E & - \alpha F \end{matrix}$$

vel, pro secunda hypothesi

$$\begin{matrix} - Fx^{n-r+1} & - Gx^{n-r} \\ \ldots \alpha E & + \alpha F \end{matrix}$$

& nulla fiat mutatio in primo horum terminorum, sed ea fiat in secundo tum Ni. 105. tum Ni. 106.

107. Est ergo αF major quam G, atque ideo α major quam $\frac{G}{F}$; & quando radix est negativa, mutatio quæ erat in componente ab $\pm Fx^{n-r}$ ad $\mp Gx^{n-r-1}$ N°. 105. facta est successio in composita; quandoquidem ponendo

$$+ F \ldots \alpha E = + f \;\&\; - G + \alpha F = + g,$$

termini compositæ fient

$$+ fx^{n-r+1} + gx^{n-r},$$

vel pro secunda hypothesi

$$- fx^{n-r+1} - gx^{n-r}.$$

108. At quando radix est positiva, successio quæ erat in componente a $\pm Fx^{n-r}$ ad $\pm Gx^{n-r-1}$ (N°. 106.) facta est mutatio in composita, siquidem, ex superiore denominatione, termini compositæ fient

 + fx

$$+fx^{n-r+1}-gx^{n-r}$$

vel pro ſecunda hypotheſi

$$-fx^{n-r+1}+gx^{n-r}.$$

109. Nunc dico aut, quando radix eſt negativa, nullam aliam ſucceſſionem introductam eſſe in compoſita; aut ſiquæ præterea mutationes componentis verſæ ſint in ſucceſſiones in compoſita, viciſſim totidem ſucceſſiones componentis verſas eſſe in mutationes in compoſita.

Aut enim termini ſequentes componentis habent eadem ſigna ac terminus Gx^{n-r-1}, aut ſunt qui ſigna habent contraria.

Si omnes habent eadem ſigna, erit reliqua componens

$$-Hx^{n-r-2}-Ix^{n-r-3}-Kx^{n-r-4}-Lx^{n-r-5}\ldots-Qx^{2}-Rx-S$$

vel in ſecunda hypotheſi

$$+Hx^{n-r-2}+Ix^{n-r-3}+Kx^{n-r-4}+Lx^{n-r-5}\ldots+Qx^{2}+Rx+S=0$$

unde fiet æquatio compoſita, addendo terminum præcedentem

$$\begin{array}{llllllllll} +gx^{n-r} & -Hx^{n-r-1} & -Ix^{n-r-2} & -Kx^{n-r-3} & -Lx^{n-r-4} & \ldots-Qx^{3} & -Rx^{2} & -Sx & & \\ & -\alpha G & -\alpha H & -\alpha I & -\alpha K & \ldots-\alpha P & -\alpha Q & -\alpha R & -\alpha S & =0 \end{array}$$

aut in ſecunda hypotheſi

$$\begin{array}{llllllllll} -gx^{n-r} & +Hx^{n-r-1} & +Ix^{n-r-2} & +Kx^{n-r-3} & +Lx^{n-r-4} & \ldots+Qx^{3} & +Rx^{2} & +Sx & & \\ & +\alpha G & +\alpha H & +\alpha I & +\alpha K & \ldots+\alpha P & +\alpha Q & +\alpha R & +\alpha S & =0 \end{array}$$

ubi ſinguli termini conſtant duabus partibus habentibus eadem ſigna, & nullam patiuntur mutationem. Erat autem mutatio in componente a termino Fx^{n-r} ad terminum Gx^{n-r-1}; & eſt mutatio in compoſita a termino gx^{n-r} ad ſequentem. Tot autem ſunt termini in compoſita quot in componente, a termino cujus exponens eſt $n-r-1$ ad ultimum incluſive. Ergo in utraque a termino cujus exponens eſt $n-r$ ad ultimum incluſive, una eſt mutatio, & idem ſucceſſionum numerus. Una ergo addita eſt ſucceſſio in compoſita a termino fx^{n-r+1} ad proximum gx^{n-r}.

Si qui termini habent ſigna contraria, ita ut reliqua æquatio componens ſit

$$-Hx^{n-r-2}-Ix^{n-r-3}-\ldots Mx^{n-r-s+1}+Nx^{n-r-s}\ldots+Qx^{2}+Rx+S$$

vel in ſecunda hypotheſi

+Hx

$$+Hx^{n-r-2}+Ix^{n-r-3}\dots+Mx^{n-r-s+1}-Nx^{n-r-s}\dots-Qx^{2}-Rx-S$$

atque ideo composita

$$\begin{matrix} -Hx^{n-r-1} & -Ix^{n-r-2} & \dots+Nx^{n-r-s+1} & \dots+Qx^{3}+Rx^{2}+Sx & \\ -\alpha G & -\alpha H & \dots-\alpha M & \dots+\alpha P\;+\alpha Q\;+\alpha R & +\alpha S \end{matrix}$$

vel in secunda hypothesi

$$\begin{matrix} +Hx^{n-r-1} & +Ix^{n-r-2} & \dots-Nx^{n-r-s+1} & \dots-Qx^{3}-Rx^{2}-Sx & \\ -\alpha G & +\alpha H & \dots+\alpha M- & \dots-\alpha P\;-\alpha Q\;-\alpha R & -\alpha S=0 \end{matrix}$$

aut prævalebunt signa serici superioris, aut signa serici inferioris in terminis quorum duæ partes habent signa opposita.

Si prævalent signa seriei superioris, tot erunt in composita mutationes & successiones a termino gx^{n-r} ad ultimum quot in componente, ut patet e superioribus.

Si prævalent signa seriei inferioris, fiet æquatio composita

$$+gx^{n-r}-hx^{n-r-1}-ix^{n-r-2}\dots-nx^{n-r-s+2}+mx^{n-r-s+1}-ox^{n-r-s}+\dots$$

atque una erit mutatio totidemque successiones tum in composita tum in componente a termino cujus exponens est $n-r$ ad terminum, cujus exponens est $n-r-s+1$. Pariter una est mutatio in utraque a termino cujus exponens est $n-r-s$; & ab hoc termino ad ultimum totidem sunt successiones in utraque. Ergo rursus una est in componente introducta successio. Idem per se intelligitur de altera hypothesi.

Tandem quatenus alternant termini in componente, ab illo qui primam patitur mutationem in composita, rursus in hac nulla nova successio introducitur, quia alternant pariter in componente, mutatis signis, quod constat e superioribus. Sit enim componens, signis alternantibus ad terminum usque cujus exponens est $n-r-s$,

$$+Fx^{n-r}-Gx^{n-r-1}+Hx^{n-r-2}-Ix^{n-r-3}+Kx^{n-r-4}-\text{\&c.}$$

unde composita

$$\begin{matrix} +fx^{n-r+1} & -Gx^{n-r} & +Hx^{n-r-1} & -Ix^{n-r-2} & +Kx^{n-r-3} & -\text{\&c.} \\ & +\alpha F & -\alpha G & +\alpha H & -\alpha I & +\text{\&c.} \end{matrix}$$

& sit, per hypothesim, α major quam $\frac{G}{F}$; erit fortius α major quam $\frac{H}{G}$, & quam $\frac{I}{H}$; & quam $\frac{K}{I}$ &c. (N°. 99). Prævalent ergo signa seriei inferioris, & composita fit

 $+fx$

$$+fx^{n-r+1}+gx^{n-r}-hx^{n-r-1}+ix^{n-r-2}-kx^{n-r-3}+\&c.$$

& in utraque totidem ſunt mutationes a termino cujus exponens eſt $n-r$ ad terminum cujus exponens eſt $n-r-s$.

110. Sed, quando radix eſt poſitiva, aut nulla alia mutatio introducta eſt in compoſita; aut ſiquæ præterea ſucceſſiones componentis factæ ſunt mutationes in compoſita, totidem viciſſim mutationes componentis factæ ſunt ſucceſſiones in compoſita.

Aut enim ſequentes in componente termini habent eadem ſigna ac terminus Gx^{n-r-1}, aut ſunt qui habent ſigna contraria.

Si omnes habent eadem ſigna, erit reliqua componens, in prima hypotheſi, quam ſolam perpendiſſe ſufficiet,

$$+Hx^{n-r-2}+Ix^{n-r-3}+Kx^{n-r-4}+Lx^{n-r-5}\ldots+Qx^{2}+Rx+S$$

unde, multiplicando per $x-\alpha$, & addendo terminum præcedentem, fiet compoſita

$$\begin{array}{l}-gx^{n-r}+Hx^{n-r-1}+Ix^{n-r-2}+Kx^{n-r-3}+Lx^{n-r-4}\ldots+Qx^{3}+Rx^{2}+Sx\\ \qquad\;\,-\alpha G\qquad\;\,-\alpha H\qquad\;\,-\alpha I\qquad\;\,-\alpha K-\ldots-\alpha P-\alpha Q-\alpha R-\alpha S\end{array}$$

in qua prævalere debent ſigna ſeriei inferioris, quia poſita eſt α major quam $\frac{G}{F}$, & quantitates $\frac{G}{F}$; $\frac{H}{G}$; $\frac{I}{H}$, $\frac{K}{I}$; $\frac{L}{K}$ &c. ſemper decreſcunt per Num. 90. Quare fiet compoſita

$$+fx^{n-r+1}-gx^{n-r}-hx^{n-r-1}-ix^{n-r-2}-kx^{n-r-3}-lx^{n-r-4}\ldots-qx^{3}-rx^{2}-sx-\alpha S$$

tot autem ſunt ſucceſſiones in compoſita quot in componente a termino cujus exponens eſt $n-r$ ad ultimum; tot erant mutationes & ſucceſſiones in compoſita ab altiſſimo termino x^{n+1} ad fx^{n-r+1} quot in componente ab altiſſimo termino x^{n} ad Fx^{n-r}. Una ergo ſupervenit mutatio in compoſita a termino fx^{n-r+1} ad terminum ſequentem gx^{n-r}.

Si qui termini habent ſigna contraria, ut ſit æquatio componens

$$+Fx^{n-r}+Gx^{n-r-1}+Hx^{n-r-2}+Ix^{n-r-3}\ldots-Mx^{n-r-5}+Nx^{n-r-s-1}+\&c,$$

unde fiet compoſita, retinendo primum terminum Ni. 108.

$$\begin{array}{l}+fx^{n-r+1}+Gx^{n-r}+Hx^{n-r-1}+Ix^{n-r-2}\ldots-Mx^{n-r-s+1}+Nx^{n-r-s}+\&c.\\ \qquad\qquad\;-\alpha F\qquad\;-\alpha G\qquad\;-\alpha H-\ldots-\alpha L\qquad\;+\alpha M\quad-\&c.\end{array}$$

id

id est, quia a termino cujus exponens est $n - r$ ad terminum cujus exponens est $n - r - s + 2$ inclusive, prævalent signa inferiora (N°. 90.), & duo sequentes constant partibus similibus,

$$+fx^{n-r+1} - gx^{n-r} - hx^{n-r-1} - ix^{n-r-2} \dots - mx^{n-r-r+1} + nx^{n-r-s} \pm \&c.$$

Jam totidem sunt successiones in composita ac in componente a termino cujus exponens est $n - r$ ad terminum cujus exponens est $n - r - s + 1$. In utraque est mutatio a termino cujus exponens est $n - r - s + 1$ ad sequentem cujus exponens est $n - r - s$; & in componente rursus mutatio est a termino cujus exponens est $n - r - s$ ad sequentem. Hæc mutatio, aut fit successio in componente, si nempe sit $+ nx^{n-r-s} + ox^{n-r-s-1}$ & compensabit mutationem jam introductam $+ fx^{n-s+1} - gx^{r-r}$, aut manebit mutatio, ita ut sit

$$+ nx^{n-r-1} - ox^{n-r-s-1}$$

Tunc autem in omnibus terminis sequentibus prævalebunt signa inferiora. Eruntque duo ultimi termini compositæ vel

$$\begin{matrix} + Sx \\ - \alpha R \end{matrix} - \alpha S \text{ vel } \begin{matrix} - Sx \\ + \alpha R \end{matrix} + \alpha S$$

qui, prævalentibus signis inferioribus, habebunt successionem, quæ compensabit novam mutationem introductam.

Quatenus vero pergunt alternare termini componentis, alternabunt etiam termini compositæ, qui singuli constabunt duabus partibus habentibus eadem signa. Ergo &c.

111. Sit nunc $(\pm G \mp \alpha F)\, x^{n-r} = 0$, terminus præcedens & terminus sequens habebunt signa contraria, quare seu ponatur $+$ seu $-$ pro termino evanescente, semper habebitur una successio & una variatio.

Subsumsimus terminos, quorum exponentes sunt in composita $n - r + 1$ & $n - r - 1$ habere semper signa contraria, quando nihilo æqualis est terminus cujus exponens est $n - r$. Hoc autem sic probatur.

112. Si composita multiplicatur per Factorem $x + \alpha$, vel si nova radix introducta est negativa, duo termini continui componentis, e quibus conficitur terminus evanescens compositæ, necessario habent signa contraria, (N°. 105.) Igitur tres continui termini æquationis componentis esse possunt.

I.

$$+ Fx^{n-r} - Gx^{n-r-1} + Hx^{n-r-2}$$

unde tres compositæ termini

$+ Rx$

$$\begin{array}{lll} +Fx^{n-r+1} & -Gx^{n-r} & +Hx^{n-r-1} \\ \ldots\alpha E & +\alpha F & -\alpha G \end{array}$$

I I.

$$-Fx^{n-r}+Gx^{n-r-1}-Hx^{n-r-2}$$

unde tres compositæ termini

$$\begin{array}{lll} -Fx^{n-r+1} & +Gx^{n-r} & -Hx^{n-r-1} \\ \ldots\alpha E & -\alpha F & +\alpha G \end{array}$$

I I I.

$$+Fx^{n-r}-Gx^{n-r-1}-Hx^{n-r-2}$$

unde tres compositæ termini

$$\begin{array}{lll} +Fx^{n-r+1} & -Gx^{n-r} & -Hx^{n-r-1} \\ \ldots\alpha E & +\alpha F & -\alpha G \end{array}$$

I V.

$$-Fx^{n-r}+Gx^{n-r-1}+Hx^{n-r-2}$$

unde tres compositæ termini

$$\begin{array}{lll} -Fx^{n-r+1} & +Gx^{n-r} & +Hx^{n-r-1} \\ \ldots\alpha E & -\alpha F & +\alpha G \end{array}.$$

113. Quando autem æquatio componens multiplicatur per Factorem $x-\alpha$, vel quando positiva est nova radix introducta, duo termini continui æquationis componentis, qui conficiunt evanescentem compositæ terminum, necessario habent eadem signa (N°. 106.) Igitur tres continui componentis termini esse possunt.

I.

$$+Fx^{n-r}+Gx^{n-r-1}+Hx^{n-r-2}.$$

unde, in hac hypothesi, tres continui compositæ termini

$$\begin{array}{lll} +Fx^{n-r+1} & +Gx^{n-r} & +Hx^{n-r-1} \\ \ldots\alpha E & -\alpha F & -\alpha G \end{array}$$

I I.

I I.

$$-Fx^{n-r} - Gx^{n-r-1} - Hx^{n-r-2}$$

unde, in hac hypothesi, tres continui compositæ termini

$$\begin{array}{lll} -Fx^{n-r+1} & -Gx^{n-r} & -Hx^{n-r-1} \\ \ldots\alpha E & +\alpha F & +\alpha G \end{array}$$

I I I.

$$+Fx^{n-r} + Gx^{n-r-1} - Hx^{n-r-2}$$

unde, in hac hypothesi, tres continui compositæ termini

$$\begin{array}{lll} +Fx^{n-r+1} & +Gx^{n-r} & -Hx^{n-r-1} \\ \ldots\alpha E & -\alpha F & -\alpha G \end{array}$$

I V.

$$-Fx^{n-r} - Gx^{n-r-1} + Hx^{n-r-2}$$

unde tres continui compositæ termini in hac hypothesi

$$\begin{array}{lll} -Fx^{n-r+1} & -Gx^{n-r} & +Hx^{n-r+1} \\ \ldots\alpha E & +\alpha F & +\alpha G \end{array}$$

Est autem $\alpha = \frac{G}{F}$, quia ponitur evanescere terminus, cujus in composita exponens est $n-r$.

114. Sed in duobus prioribus casibus tum Nⁱ. 112. tum Nⁱ. 113. est $\frac{G}{F}$ major quam $\frac{H}{G}$ (N°. 90). Ergo α major quam $\frac{H}{G}$. Quare, in termino horum duorum casuum prævalet signum inferius. Ponitur autem primus terminus nullam subire mutationem & servare suum signum; & signum seriei inferioris in hypothesi Nⁱ. 112. in tertio termino compositæ idem quod signum secundi termini in componente, atque ideo contrarium signo primi termini, quod idem est in composita & in componente; sed in secunda hypothesi, signum seriei inferioris in tertio termino compositæ, contrarium est signo secundi termi in componente, quod idem est ac signum primi termini tum compositæ tum componentis. Ergo in his duobus prioribus casibus primus & ultimus compositæ terminus habent signa contraria.

In aliis duobus casibus tum Nⁱ. 112. tum Nⁱ. 113. signum tertii termi-

 ni

ni in componente ponitur oppositum signo prioris termini tum in componente, tum in composita; & tertius terminus compositæ constat duabus partibus similibus. Quare semper primus & ultimus terminus compositæ habent signa contraria.

115. Igitur, quando medius terminus evanescit, signa trium horum terminorum sunt, vel

+; *; —

vel

—; *; +

inter quæ, seu pro termino deficiente ponatur +, seu —, erit una successio & una variatio. Quare etiam in hac hypothesi radix negativa introducet in æquatione unam successionem, & radix positiva unam mutationem.

116. Quapropter, si æquatio habens omnes radices positivas, atque ideo omnia signa alternantia, multiplicetur per Factorem $x+\alpha$, vel augeatur radice negativa, unam acquiret successionem. Si hæc rursus multiplicetur per similem Factorem, adhuc unam acquiret successionem. &c.

117. Si vero æquatio habens omnes radices negativas, atque ideo omnia signa positiva, multiplicetur per Factorem $x-\alpha$, vel augeatur radice positiva, acquiret unam mutationem. Si hæc rursus multiplicetur per similem Factorem, adhuc unam acquiret mutationem &c. Ergo

118. Æquatio, cujus omnes radices sunt reales, tot habet radices positivas quot mutationes signorum continuorum, & tot radices negativas, quot signorum continuorum successiones. Si quis autem æquationis terminus desit, licet pro eo ponere + vel — ad arbitrium.

119. Sed si quæ sunt radices imaginariæ in æquatione, fallit regula, tum quia deficit propositio demonstrata N°.90. tum quia radices imaginariæ neque positivæ sunt, neque negativæ.

Atque hæc est notissima regula CARTESII, vel, ut alii volunt HARRIOTTI, de qua NEWTONUS artic. IX. Hanc fallere affirmat Hallejus (in Addit. pag. 47.), sed nunquam fallit, quando æquationis radices omnes sunt possibiles. Hanc conditionem disertis verbis apponit NEWTONUS art. IX. CARTESIUS autem (Epist. LXIX. part. III. pag. 286. Edit. Blavianæ Amstelodami 1683. datam ad D. de CARCAVI) ait, *secunda ejus objectio mera falsitate nititur; neque enim pag. 373. dixi quod me dixisse vult, nimirum totidem veras dari radices quoties signa + & —inveniuntur mutata, neque unquam id dicendi animum habui. Dixi saltem posse dari totidem; & disertis verbis demonstravi pag. 380. quando totidem non habeantur, nimirum, tum cum aliquæ harum radicum sunt imaginariæ.* Addere potuisset, cum nostro & omnibus recentioribus, veram esse regulam, etiam ubi sunt imaginariæ, dummodo illæ, quæ neque positivæ sunt neque negativæ, habeantur pro ambiguis, id est vel positivæ censeantur, vel negativæ, pro re nata.

Hanc regulam primus, quod sciam, demonstravit *Joannes Andreas* SEGNER,

GNER, postea Celeberrimus Professor in Academia Gottingana, in epistola data ad celeberr. *Georgium Erhardum* HAMBERGERUM, anno 1718. atque edita Jenæ apud *Christianum Franciscum Buchium*. Id, ut videtur, nesciens acutissimus Abbas *de* GUA, anno 1741. suam concinnavit demonstrationem, quæ anno 1744. edita fuit in libro, cui titulus *Histoire de l'Academie des sciences, année* 1741. *&c. A Paris de l'Imprimerie royale.*

120. Quantitas imaginaria speciem quidem præbet quantitatis, quandoquidem exprimi potest, sed quantitas non est, quia neque arithmetice, neque geometrice potest definiri, uno verbo quia est impossibilis. Igitur æquatio quæ omnes habet radices imaginarias, nullam habet radicem, id est nulla quantitas est quæ problemati respondeat, vel quæstionis leges implere possit. Cum autem proponi possint quæstiones, quarum leges inter se pugnent, etiamsi fortasse alte recondita jaceat repugnantia, eæ ad æquationem deductæ præbere debent æquationem omnino radicibus carentem, vel nullas habentem radices nisi imaginarias. Et quando leges quæstionis pugnant in certis casibus, non in aliis, æquationes certis in casibus habebunt radices imaginarias; in aliis reales; ut Newtonus N° V. & VI. pag. 4, 5. hujus.

121. Mirum videri potest quod omnis æquatio gradus imparis unam saltem habeat radicem realem, cum nequeat intelligi cur proponi non possint quæstiones deducentes ad æquationem gradus imparis, quarum leges inter se pugnent. Tamen res est demonstrata.

122. Veteres Algebræ scriptores, versati circa quæstiones arithmeticas, non agnoverunt radices negativas. CARDANUS primus eas observasse dicitur. Recentiores omnes illas admittunt, præter acutissimum MAZERE, qui in libro anglice scripto & in gallicam linguam verso a Filio meo, eas respuit. Quid significent quantitates negativæ in bonis, motu, & lineis, docuit NEWTONUS Art. VI. Sect. I. Partis I. pag. 4. ubi videri possunt observationes nostræ sub N°. 11. pag. 4. & sub N°. 77. pag. 21. & sub N°. 78. 79. pag. 22.

123. In genere dici posse reor quod radices negativæ indicant Problema alio pacto proponi posse, quam quo propositum fuerat. Rem explicemus exemplis.

In XII. Probl. Arithm. part. I pag. 122. quæruntur motus duorum corporum sphæricorum in eadem recta motorum sibique occurrentium. Ubi corpora sibi obviam eunt ante conflictum, accedunt unum ad aliud differentia velocitatum. Differentiam pariter velocitatum post conflictum assumit Auctor; & ponit velocitatem ipsius A post conflictum esse $\frac{aA - x}{A}$; id est velocitatem a, minutam quidem esse, sed tendere ad easdem plagas: atque ideo sic proponit problema. *Datis sphæricorum corporum in eadem recta motorum, ad easdem plagas tendentium, sibique occurrentium, magnitudinibus & motibus, determinare velocitatem, qua unumquodque pergit tendere ad easdem plagas post conflictum.* Problema sic propositum solvit $x = \frac{2aAB - 2bAB}{A + B}$, unde

 pro-

prodit velocitas ipsius A post conflictum $\frac{aA - aB + 2bB}{A + B}$; & velocitas ipsius B pariter post conflictum $\frac{2aA - bA + bB}{A + B}$. Sed si velocitas ipsius A post conflictum invenitur negativa, recte monet auctor hoc indicare quod corpus A post conflictum tendit ad plagam contrariam, vel retrocedit. Tunc autem non differentia, sed summa velocitatum recedunt corpora A & B; & sic proponendum est problema. *Datis quæ supra, determinare velocitatem, tum qua post conflictum corpus B pergit tendere ad plagas easdem, tum qua corpus A retrocedit.* In hac hypothesi celeritas corporis A post conflictum exponenda est per $\frac{x - A}{A}$, quia celeritas, quam corpus A habebat ante conflictum, minuit celeritatem quam habebit post conflictum. In prima hypothesi, ut A pergeret ferri ad easdem plagas, oportebat ut x esset minor quam aA. In secunda, ut A retrocedat, oportet ut x sit major quam aA. Hic obiter observandum quam hæc conveniant cum doctrina quantitatum negativarum ac positivarum. Nam, in prima hypothesi est $\frac{aA - x}{A}$ quantitas positiva, tendens nempe ad easdem plagas; ea fit negativa in altera hypothesi, in qua tendit ad plagas contrarias: quare positiva erit $\frac{x - aA}{A}$. Nunc ponendo

$$\frac{x - aA}{A} + \frac{x + bB}{B} = a - b$$

erit rursus

$$x = \frac{2aAB - 2bAB}{A + B}.$$

sed

$$\frac{x - aA}{A} = \frac{aB - 2bB - aA}{A + B}$$

quæ quantitas est opposita quantitati inventæ in prima hypothesi; & positiva est quando corpus A retrocedit, sed vicissim fit negativa quando progreditur. Hæc facile accommodantur ad alterum casum, corporum nempe obviam euntium. Aliud exemplum videbimus intra N°. 129.

124. Positivæ radices æquationis *indicare solent*, non autem *semper indicant*: (vide infra Num 128.) quantitates inæquales Problema propositum solventes Exempla videri possunt in parte I. Probl. XIII. pag. 132. Probl. XIV. pag. 133. ubi duo numeri, major & minor, ad unum, nempe ad ad eorum differentiam, revocati fuerunt in nota. Item Probl. XV. pag. 134.

134. & seq., ubi vitandam esse ambiguitatem monet Auctor, qui eandem regulam affert & expiicat pag. 261; & ejus utilitatem ostendit exemplo ad Probl. XLI. pag. 264.

125. Certum est æquationem oriri saltem tot dimensionum, quot sunt quantitates diversæ idem problema solventes. Sed vicissim dici nequit, tot sunt quantitates diversæ problema solventes, quot sunt æquationis dimensiones. Nam

126. *Primo* esse possunt casus, in quibus problema est impossibile. Hos etiam complecti debet æquatio, quæ habebit aliquot radices imaginarias.

127. *Secundo*, fieri potest ut problema proponi possit alio pacto, quam quo propositum fuit, ut vidimus N°. 123. Tunc æquatio habebit radices negativas.

128. *Tertio*, etiam radices positivæ aliquando indicant non quantitates solventes problema propositum, sed quantitates solventes aliud problema proposito affine. Exemplum præbet Probl. V. Geometricum partis I. pag. 162. & sequentibus. Ibi, datis trianguli rectanguli basi $= b$, & & summa laterum ac perpendiculi $= a$, quæritur perpendiculum $= x$, & laterum differentia $= y$, quibus cognitis cognoscitur triangulum. Prima solutio dat æquationem finalem.

$$xx = 2x(a+b) - aa + bb$$

cujus æquationis duæ sunt radices positivæ

$$a + b - \sqrt{(2ab+2bb)} \ \& \ a + b + \sqrt{(2ab+2bb)}$$

Harum prima sola solvit problema propositum, ut ostensum est in nota pag. 165. Altera autem solvit affine problema datis trianguli rectanguli basi $= b$, ac perpendiculo $= a$, quæritur summa laterum & perpendiculi $= x$. Tunc enim summa laterum superest $= x - a$; &, posita ut in loco citato, laterum differentia $= y$, est latus majus $= \frac{x - a + y}{2}$, & latus minus $= \frac{x - a - y}{2}$; unde, premendo Auctoris vestigia, devenitur ad eandem æquationem finalem.

$$xx = 2x(a+b) - aa + bb.$$

129. Pariter in Probl. sequente pag. 168., ubi datis trianguli rectanguli summa laterum $= a$, & perpendiculo $= b$, quæritur latus unum $= x$, & alterum $= a - x$, devenitur æquationem finalem quatuor dimensionum, cujus tres sunt radices positivæ.

I.

$$\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{aa}{4} + bb - b\sqrt{(aa+bb)}\right)}.$$

I I.

$$\frac{a}{2} + \surd(\frac{aa}{4} + bb - b\surd(aa + bb)).$$

I I I.

$$\frac{a}{2} - \surd(\frac{aa}{4} + bb + b\surd(aa + bb))$$

I V.

$$\frac{a}{2} + \surd(\frac{aa}{4} + bb + b\surd(aa + bb))$$

Has esse dico positivas, præter tertiam. Constabit, si constat de prima; quod facile ostenditur. Est enim

$aa + bb$ major quam bb; ergo

$\surd(aa + bb)$ major quam b, & multiplicando per b,

$b\surd(aa + bb)$ major quam bb: quare negativa est quantitas $+bb - b\surd(aa+bb)$. Hinc

$\frac{aa}{4}$ major est quam $\frac{aa}{4} + bb - b\surd(aa + bb)$, & extrahendo radicem, $\frac{a}{2}$ major quam $\surd(\frac{aa}{4} + bb - b\surd(aa + bb))$. Igitur &c.

Nunc duæ priores solvunt problema propositum; duæ posteriores serviunt problemati datam ponenti laterum differentiam $= a$, & quærenti eorum summam $= x$; ut observatum fuit ad pag. 170.

Sed pag. 171. quæsita fuit basis $= x$, & deventum ad

$x = -b \pm \surd(bb + aa)$. Harum radicum sola positiva

$x = -b + \surd(bb + aa)$ solvit problema propositum. Altera, quæ in hoc problemate negativa est, inservit problemati in quo basis x quæritur datis perpendiculo $= b$ & laterum differentia $= a$.

Tunc enim, posita laterum summa $= y$, devenitur ad æquationem

$$xx = 2bx + aa$$

cujus radix positiva est $b + \surd(bb + aa)$, quæ erat negativa propositi, & vicissim hujus negativa radix $b - \surd(bb + aa)$ fit positiva propositi. Idem accidit in problemate VII.

130.

130. Casus tertius Problem. XIII. pag. 183. exhibet ejusdem rei exemplum observatione dignum, quia radix negativa pertinet ad aliam lineam pariter problema solventem. Problema casus tertii hoc est. Angulum rectum CBD, data recta CD $= a$, ita (Tab. *a* Fig. 1.) subtendere ut recta DA ducta Tab. *a*.
ad datum punctam A, conficiat angulum CDA pariter rectum. Ibi diximus Fig. 1.
BA $= a$ & BD $= x$; & (nota *b*,) invenimus æquationem

$$x^4 = -bbxx + aabb$$

cujus quatuor sunt radices

Prima & secunda reales

$$x = \pm \surd\left(\frac{-bb}{2} + b\surd\left(\frac{bb}{4} + aa\right)\right)$$

tertia & quarta imaginariæ

$$x = \pm \surd\left(\frac{-bb}{2} - b\surd\left(\frac{bb}{4} + aa\right)\right)$$

quarum duæ primæ solvunt problema, positiva pro BD; negativa pro B*d*. Sed si, reliquis manentibus, dicatur AD $= x$, quia est BA ad AD ut AD ad AC, erit AC $= \frac{xx}{b}$. Est autem $CA^2 = AD^2 + DC^2$; id est

$$\frac{x^4}{b^2} = x^2 + a^2, \text{ \& } x^4 = b^2x^2 + a^2b^2.$$

cujus quatuor sunt radices

Prima & secunda reales

$$x = \pm \surd\left(\frac{bb}{2} + b\surd\left(\frac{b^2}{4} + aa\right)\right)$$

tertia & quarta imaginariæ

$$x = \pm \surd\left(\frac{bb}{2} - b\surd\left(\frac{b^2}{4} + aa\right)\right)$$

Patet ergo, radices quæ erant reales in prima hypothesi, fieri imaginarias in secunda, & contra. Hoc autem accidit quia quantitas

$$xx = -\frac{bb}{2} - b\surd\left(\frac{bb}{4} + aa\right)$$

quæ

quæ est radix negativa æquationis pertinentis ad primam hypothesim, fit radix positiva æquationis pertinentis ad alteram hypothesim; nam ea æquatio præbet

$$xx = \frac{bb}{2} + b\sqrt{(\frac{bb}{4} + aa)}$$

Ex his patet quam caute procedendum fit in radicum electione.

131. Ut rem paucis absolvam, distinguendum puto inter quantitates problema solventes, & æquationis Factores. Quæ quantitates, vel imaginariæ vel reales; positivæ vel negativæ, æquationem propositam reddunt evanescentem, positæ pro incognita; eæ junctæ cum incognita per signa apta, dividunt æquationem propositam, & vicissim æquationem eandem restituunt multiplicatione continua, aut tandem præbent æquationis Factores; sed non omnes Factores æquationis solvunt problema propositum. Quantitates solæ reales problema solvunt; & sive positivæ sive negativæ, sunt æquationis Factores; sed radices negativæ solvunt directe problema diversum a proposito, & in alia æquatione fiunt positivæ, ut melius videbimus in capite sequente N°.11 .. 14. Neque semper omnes radices positivæ solvunt problema propositum; sed aliquando pertinent ad aliud, priori quidem affine, sed diversum tamen; aliquando ad quantitates diversas, quæ solvunt idem problema. Hic autem distinguimus quantitates *diversas* ab *inæqualibus*. In N°. 130. si recta BD habere posset duos valores inæquales, haberentur duæ radices inæquales æquationis. Sed cum etiam DA solvere possit problema, rectæ BD & DA sunt duæ quantitates diversæ.

Multis aliis modis, (quis enim omnes recensebit?) fieri potest ut non omnes radices æquationis, etiamsi positivæ sint, solvant problema propositum.

132. Sponte patet Factores formæ $x + m = 0$ per continuam multiplicationem gignere æquationes omnium graduum, *secundi* si duo sunt Factores; si tres, quatuor, quinque, .. *n*, *tertii*, *quarti*, *quinti*, ... *n* ... *mi*. Sed non quævis data æquatio conficitur ex Factoribus realibus, cum sint æquationes quarum radices sunt imaginariæ. Neque constat quomodo ex datis æquationis coefficientibus detegi possint Factores vel reales vel imaginarii, sic enim haberetur generalis æquationum solutio. Fieri potest ut sint æquationes, in quibus relatio inter cognitas & incognitas nullo alio pacto potest exprimi, quam per æquationem ipsam.

Regula qua detegitur numerus radicum impossibilium, explicata reperitur in Additamento.

CAP.

CAPUT III.

De transmutationibus æquationum.

I. **C**eterum *æquationis cujusvis radices omnes* affirmativæ *in* negativas *&* negativæ *in* affirmativas *mutari possunt, idque mutando tantum signa terminorum alternorum.*

Sic æquationis

$$x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 2xx - 5x - 4 = 0,$$

radices tres affirmativæ mutabuntur in negativas, & duæ negativæ in affirmativas, mutando tantum signa secundi, quarti, & sexti termini ut hic fit,

$$x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 2xx - 5x + 4 = 0.$$

Easdem habet hæc æquatio radices cum priore, nisi quod hic affirmativæ sunt quæ ibi erant negativæ, & hic negativæ quæ ibi erant affirmativæ; & radices duæ impossibiles quæ ibi inter affirmativas latebant, hic latent inter negativas, ita ut his deductis restet unica tantum radix vere negativa.

II. Sunt & aliæ æquationum transmutationes quæ diversis usibus inserviunt. *Possumus enim supponere radicem æquationis ex cognita & incognita aliqua quantitate utcunque componi, & perinde pro ea substituere quod æquipollens esse fingitur.* Ut si supponamus radicem æqualem esse summæ vel differentiæ cognitæ alicujus & incognitæ quantitatis. Nam possumus hoc pacto radices æquationis cognita illa quantitate augere vel diminuere, vel de cognita quantitate subducere; atque ita efficere ut earum aliquæ, quæ prius erant negativæ, jam fiant affirmativæ, vel ut aliquæ ex affirmativis evadant negativæ; vel etiam ut omnes evadant affirmativæ. Sic in æquatione

$$x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0,$$

si radices unitate augeri vellem, fingo $x + 1 = y$, seu $x = y - 1$, & perinde pro x scribo in æquatione $y - 1$, & pro quadrato, cubo, quadrato-quadrato de x similem potestatem de $y - 1$, ad hunc modum.

x^4.	$y^4 - 4y^3 + 6yy - 4y + 1$
$-x^3$.	$- y^3 + 3yy - 3y + 1$
$-19xx$.	$- 19yy + 38y - 19$
$+49x$.	$+ 49y - 49$
-30.	$- 30$
Summa	$y^4 - 5y^3 - 10yy + 80y - 96 = 0.$

Et æquationis prodeuntis

$$y^4 - 5y^3 - 10yy + 80y - 96 = 0,$$

radices erunt 2, 3, 4, — 4, quæ prius erant 1, 2, 3, — 5, unitate jam factæ majores. Quod si pro x scripsissem $y + 1\frac{1}{2}$ prodiisset æquatio

$$y^4 + 5y^3 - 10yy - \frac{5}{4}y + \frac{39}{16} = 0,$$

cujus duæ fuissent radices affirmativæ, $\frac{1}{2}$, & $1\frac{1}{2}$; ac duæ negativæ, $-\frac{1}{2}$ & $-6\frac{1}{2}$. Pro x vero scribendo $y - 6$ prodiisset æquatio cujus radices fuissent 7, 8, 9, 1, omnes nimirum affirmativæ, & pro eodem scribendo $y + 4$ radices jam numero quaternario diminutæ evasissent -3, -2, -1, -9, negativæ omnes.

Et hoc modo augendo vel diminuendo radices, siquæ impossibiles sunt, hæ aliquando facilius detegentur quam prius. Sic in æquatione

$$x^3 - 3aax - 3a^3 = 0,$$

radices nullæ per præcedentem regulam apparent impossibiles. At si augeas radices quantitate a scribendo $y - a$ pro x, in æquatione resultante $y^3 - 3ayy - a^3 = 0$, radices duæ impossibiles jam per regulam illam detegi possunt.

III. *Eadem operatione possumus etiam secundos terminos æquationum tollere.* Hoc enim fiet si cognitam quantitatem secundi termini æquationis propositæ per numerum dimensionum æquationis divisam, subducamus de quantitate quæ pro novæ æquationis radice significanda assumitur, & residuum substituamus pro radice æquationis propositæ. Ut si proponatur æquatio

$$x^3 - 4xx + 4x - 6 = 0,$$

cognitam quantitatem secundi termini, quæ est -4, divisam per numerum dimensionum æquationis, 3, subduco de specie quæ pro nova radice significanda assumitur, puta de y, & residuum $y + \frac{4}{3}$ substituo pro x, & provenit,

$$\begin{array}{rrrr}
y^3 & + 4yy & + \frac{16}{3}y & + \frac{64}{27} \\
 & - 4yy & - \frac{32}{3}y & - \frac{64}{9} \\
 & & + 4y & + \frac{16}{3} \\
 & & & - 6 \\
\hline
y^3 & * & - \frac{4}{3}y & - \frac{146}{27} = 0.
\end{array}$$

IV.

IV. *Eadem methodo poteſt & tertius æquationis terminus tolli.* Proponatur æquatio

$$x^4 - 3x^3 + 3xx - 5x - 2 = 0,$$

& finge $x = y - e$, & ſubſtituendo $y - e$ pro x orietur hæc æquatio.

$$y^4 \begin{array}{l} -4e \\ -3 \end{array} y^3 \begin{array}{l} +6ee \\ +9e \\ +3 \end{array} yy \begin{array}{l} -4e^3 \\ -9ee \\ -6e \\ -5 \end{array} y \left.\begin{array}{l} +e^4 \\ +3e^3 \\ +3ee \\ +5e \\ -2 \end{array}\right\} = 0$$

Hujus æquationis tertius terminus eſt $6ee + 9e + 3$ ductum in yy. Ubi ſi $6ee + 9e + 3$ nullum eſſet, eveniret ipſum quod volumus. Fingamus itaque nullum eſſe, ut inde colligamus quinam numerus ad hunc effectum ſubſtitui debet pro e, & habebimus æquationem quadraticam $6ee + 9e + 3 = 0$, quæ diviſa per 6 fiet $ee + \frac{3}{2}e + \frac{1}{2} = 0$, ſeu $ee = -\frac{3}{2}e - \frac{1}{2}$, & extracta radice $e = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{(\frac{9}{16} - \frac{1}{2})}$, ſeu $= -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16}}$, hoc eſt $= -\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}$, atque adeo vel $= -\frac{1}{2}$ vel $= -1$. Unde $y - e$ erit vel $y + \frac{1}{2}$ vel $y + 1$. Quamobrem, cum $y - e$ ſcriptum fuit pro x, vice $y - e$ debet $y + \frac{1}{2}$ vel $y + 1$ ſcribi pro x, ut tertius æquationis reſultantis terminus nullus ſit. Et in utroque quidem caſu id eveniet. Nam ſi pro x ſcribatur $y + \frac{1}{2}$ orietur hæc æquatio

$$y^4 - y^3 - \frac{15}{4}y - \frac{65}{16} = 0,$$

s in ſcribatur $y + 1$, orietur hæc

$$y^4 + y^3 - 4y - 6 = 0.$$

V. *Poſſunt & radices æquationis per datos numeros multiplicari vel dividi; & hoc pacto termini æquationum diminui, fractioneſque & radicales quantitates aliquando tolli.*

Ut ſi æquatio ſit

$$y^3 - \frac{4}{3}y - \frac{146}{27} = 0,$$

 ad

ad tollendas fractiones fingo esse $y = \frac{1}{3}z$, & perinde pro y substituendo $\frac{1}{3}z$ provenit æquatio nova

$$\frac{z^3}{27} - \frac{12z}{27} - \frac{146}{27} = 0,$$

& rejecto terminorum communi denominatore,

$$z^3 - 12z - 146 = 0,$$

cujus æquationis radices sunt triplo majores quam ante. Et rursus ad diminuendos terminos æquationis hujus si scribatur $2v$ pro z, prodibit

$$8v^3 - 24v - 146 = 0,$$

& divisis omnibus per 8, fiet

$$v^3 - 3v - 18\frac{1}{4} = 0,$$

cujus æquationis radices dimidiæ sunt radicum prioris. Et hic si tandem inveniatur v, ponendum erit $2v = z$, $\frac{1}{3}z = y$, & $y + \frac{4}{3} = x$, & æquationis primo propositæ

$$x^3 - 4xx + 4x - 6 = 0$$

habebitur radix x.
Sic & in æquatione

$$x^3 - 2x + \sqrt{3} = 0,$$

ad tollendam quantitatem radicalem $\sqrt{3}$, pro x scribo $y\sqrt{3}$, & provenit æquatio

$$3y^3\sqrt{3} - 2y\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0,$$

quæ, divisis omnibus terminis per $\sqrt{3}$, fit

$$3y^3 - 2y + 1 = 0.$$

VI. *Rursus æquationis radices in earum reciprocas transmutari possunt, & hoc pacto æquatio aliquando ad formam commodiorem reduci.*
Sic æquatio novissima,

$$3y^3 - 2y + 1 = 0,$$

scribendo $\frac{1}{z}$ pro y evadit

$$\frac{3}{z^3} - \frac{2}{z} + 1 = 0,$$

seu terminis omnibus multiplicatis per z^3, & ordine terminorum mutato

$$z^3 - 2zz + 3 = 0.$$

Potest etiam æquationis terminus penultimus hoc pacto tolli, si modo secundus prius tollatur, ut factum vides in exemplo præcedente. Aut si antepenultimum tolli cupias, id fiet si modo tertium prius tollas. Sed & radix minima hoc pacto in maximam convertitur, & maxima in minimam; quod usum nonnullum habere potest in sequentibus. Sic in æquatione

$$x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0,$$

cujus radices sunt 3, 2, 1, -5, si scribatur $\frac{1}{y}$ pro x resultabit æquatio

$$\frac{1}{y^4} - \frac{1}{y^3} - \frac{19}{yy} + \frac{49}{y} - 30 = 0,$$

quæ, terminis omnibus multiplicatis per y^4 ac divisis per 30, signisque mutatis, fiet.

$$y^4 - \frac{49}{30}y^3 + \frac{19}{30}yy + \frac{1}{30}y - \frac{1}{30} = 0,$$

cujus radices sunt $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, 1, $-\frac{1}{5}$; radicum affirmativarum maxima 3 jam conversa in minimam $\frac{1}{3}$, & minima 1 jam facta maxima, & radice negativa -5 quæ omnium maxime distabat a nihilo, jam omnium maxime accedente ad nihil.

Sunt & aliæ æquationum transmutationes, sed quæ omnes ad exemplum transmutationis illius, ubi tertium æquationis terminum sustulimus, confici possunt, ut non opus sit hac de re plura dicere. Addamus potius aliqua de limitibus æquationum.

VII. *Ex æquationum generatione constat quod cognita quantitas* secundi *termini æquationis, si signum ejus mutetur, æqualis sit aggregato omnium radicum sub signis propriis; ea* tertii *æqualis aggregato rectangulorum sub singulis binis radicibus; ea* quarti *si signum ejus mutetur, æqualis aggregato contentorum sub singulis ternis radici-*

dicibus; *ea* quinti *aequalis aggregato contentorum ſub ſingulis quaternis*; *& ſic in infinitum*.

Aſſumamus $x = a$, $x = b$, $x = -c$, $x = d$, &c. ſeu $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x + c =$, $x - d = 0$, & ex horum continua multiplicatione generemus æquationes, ut ſupra. Jam multiplicando $x - a$ per $x - b$ producetur æquatio

$$xx \begin{matrix} -a \\ -b \end{matrix} x + ab = 0;$$

ubi cognita quantitas ſecundi termini, ſi ſigna ejus mutentur, nimirum $a + b$, eſt ſumma duarum radicum a & b, & cognita tertii ab illud unicum quod ſub utraque continetur rectangulum. Rurſus multiplicando hanc æquationem per $x + c$ producetur æquatio cubica

$$x^3 \begin{matrix} -a \\ -b \\ +c \end{matrix} xx \begin{matrix} +ab \\ -ac \\ -bc \end{matrix} x + abc = 0,$$

ubi cognita quantitas ſecundi ſub ſignis mutatis nimirum $a + b - c$ eſt ſumma radicum a, b & $-c$; cognita tertii $ab - ac - bc$, ſumma rectangulorum ſub ſingulis binis a & b, a & $-c$, b & $-c$; & cognita quarti ſub ſigno mutato $-abc$ illud unicum contentum eſt quod omnium continua multiplicatione generatur, a in b in $-c$. Adhæc multiplicando cubicam illam æquationem per $x - d$ producetur hæcce quadrato-quadratica

$$x^4 \begin{matrix} -a \\ -b \\ +c \\ -d \end{matrix} x^3 \begin{matrix} +ab \\ -ac \\ -bc \\ +ad \\ +bd \\ -cd \end{matrix} xx \begin{matrix} +abc \\ -abd \\ +bcd \\ +acd \end{matrix} x - abcd = 0:$$

ubi cognita quantitas ſecundi termini ſub ſignis mutatis $a + b - c + d$, eſt ſumma omnium radicum; ea tertii

$$ab - ac - bc + ad + bd - cd$$

ſumma rectangulorum ſub ſingulis binis; ea quarti ſub ſignis mutatis

$$-abc + abd - bcd - acd$$

ſumma contentorum ſub ſingulis ternis; ea quinti $-abcd$ contentum unicum ſub omnibus. Et hinc primo colligimus omnes æquationis cujuſcunque, terminos nec fractos nec ſurdos habentis, radices non ſurdas, & radicum binarum rectangula, ternarumque aut plurium contenta eſſe aliquos ex diviſoribus integris ultimi termini; atque adeo ubi conſtiterit nullum ultimi ter-

termini divisorem esse aut radicem æquationis, aut duarum radicum rectangulum, pluriumve contentum, simul constabit nullam esse radicem, radicumve rectangulum aut contentum, nisi quod sit surdum.

VIII. Ponamus jam cognitas quantitates terminorum æquationis sub signis mutatis esse p, q, r, s, t, v, &c. eam nempe secundi p, tertii q, quarti r, quinti s, & sic deinceps. Et signis terminorum probe observatis fit

$$p = a$$

$$pa + 2q = b$$

$$pb + qa + 3r = c$$

$$pc + qb + ra + 4s = d$$

$$pd + qc + rb + sa + 5t = e$$

$$pe + qd + rc + sb + ta + 6v = f$$

& sic in infinitum, observata serie progressionis. Et erit a summa radicum, b summa quadratorum ex singulis radicibus, c summa cuborum, d summa quadrato-quadratorum, e summa quadrato-cuborum, f summa cubo-cuborum, & sic in reliquis. Ut in æquatione

$$x^4 - x^3 - 19xx + 49x - 30 = 0,$$

ubi cognita quantitas secundi termini est -1, tertii -19, quarti $+49$, quinti -30; ponendum erit $1 = p$, $19 = q$, $-49 = r$, $30 = s$. Et inde orientur

$$a = (p =)\ 1$$

$$b = (pa + 2q = 1 + 38 =)\ 39$$

$$c = (pb + qa + 3r = 39 + 19 - 147 =) - 89$$

$$d = (pc + qb + ra + 4s = -89 + 741 - 49 + 120 =)\ 723.$$

Quare summa radicum erit 1, summa quadratorum radicum 39, summa cuborum -89, & summa quadrato-quadratorum 723. Nimirum æquationis illius radices sunt 1, 2, 3 & -5, & harum summa $1 + 2 + 3 - 5$ est 1, summa quadratorum $1+4+9+25$ est 39, summa cuborum $1+8+27-125$ est -89, & summa quadrato-quadratorum $1+16+81+625$ est 723.

COM-

COMMENTARIUS

AD

CAPUT III.

1. Si a; b; c; d; &c exponant valores ipsius x in æquatione

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \&c. = 0$$

& ponatur

$\alpha = b + c + d + \&c$; vel summæ radicum reliquarum, præter a

$\beta = b(c + d + e + \&c.) + c(d + e + \&c) + \&c$, vel summæ factorum ex binis, præter facta in quibus est a.

2. Pariter γ æqualis summæ factorum ex ternis; δ summæ factorum e quaternis, præter ea facta in quibus est a, & sic de reliquis; erit

$$A = a + \alpha;\ B = a\alpha + \beta;\ C = a\beta + \gamma;\ D = a\gamma + \delta;\ \&c.$$

Constat ex regulis multiplicationis, & ex N°. 114. Sect. I. Cap. V. Tom. I. pag. 28. & patet idem accidere reliquis litteris, ex. gr. b; ponendo $\alpha = a + c + d + e + \&c.$; & sic de reliquis, scribendo b ubi est nunc a, & a ubi nunc est b. In sequentibus retinebimus litteram a.

3. Pariter constat pro x & ejus potestatibus poni posse valorem a, & ejus potestates.

4. Hæc littera habebit signa contraria in coefficientibus & in substitutione. Sit enim $x = + a$. Factor æquationis ergo $x - a = 0$; & littera a debet in coefficientibus habere signum $-$, & in substitutione $+$. Quapropter æquatio fiet,

$$\begin{matrix} x^n - ax^{n-1} & - a\alpha x^{n-2} & - a\beta x^{n-3} & - a\gamma x^{n-4} & - \&c \\ + \alpha & + \beta & + \gamma & + \delta & + \&c \end{matrix} = 0$$

si nempe α; β; γ; δ &c. sint quantitates positivæ; siquæ vero essent negativæ, facta ex earum singulis in $-a$, essent positiva; & semper eadem littera, ex gr. γ habebit signa contraria in duobus terminis contiguis $(a\beta \pm \gamma)\, x^{n-3}$ & $(\mp a\gamma \pm \delta)\, x^{n-4}$.

5. Quando vero est $x = -a$, Factor æquationis est $x + a = 0$. Quapropter littera a in coefficientibus habebit signum $+$, & in substitutione signum $-$; quod tamen in potestatibus paribus fiet $+$ (N°. 80. partis I. pag. 22.). Tunc æquatio fiet

$$\begin{matrix} x^n + ax^{n-1} & + a\alpha x^{n-2} & + a\beta x^{n-3} & + a\gamma x^{n-4} & + \&c \\ + \alpha & + \beta & + \gamma & + \delta & + \&c \end{matrix} = 0$$

si

si α; β; γ; δ &c. sunt positivæ, & si quæ earum sunt negativæ, singularum facta in $+a$ erunt negativa; & semper eadem littera, ex. gr. γ, habebit eadem signa in duobus terminis contiguis $(a\beta \pm \gamma)x^{n-3}$ & $(\pm a\gamma \pm \delta)x^{n-4}$.

6. Nunc substituendo pro x & ejus potestatibus, valorem & ejus potestates, quilibet terminus habebit partem unam quantitate parem sed signo oppositam cum una parte termini præcedentis; & alteram æque quantitate parem, signo oppositam, cum termini sequentis parte.

Nam, quando $x = +a$, tres termini continui erunt formæ $(-a\pi+\varrho)x^{n-r}$; $(-a\varrho+\sigma)x^{n-r-1}$; $(-a\sigma+\tau)x^{n-r-2}$. (N°. 4).

Quare ponendo $+a^{n-r}$ pro x^{n-r} in horum primo; $+a^{n-r-1}$ pro x^{n-r-1} in secundo; & $+a^{n-r-2}$ pro x^{n-r-2} in tertio, quandoquidem omnes potestates e radice positiva sunt positivæ, fient

$$\text{Primus } (-a\pi+\varrho)a^{n-r} = -\pi a^{n-r+1} + \varrho a^{n-r}$$

$$\text{Secundus } (-a\varrho+\sigma)a^{n-r-1} = -\varrho a^{n-r} + \sigma a^{n-r-1}$$

$$\text{Tertius } (-a\sigma+\tau)a^{n-r-2} = -\sigma a^{n-r-1} + \tau a^{n-r-2}$$

Sed, ubi est $x = -a$, tres termini continui, erunt formæ

$(+a\pi+\varrho)x^{n-r}$; $(+a\varrho+\sigma)x^{n-r-1}$; $(+a\sigma+\tau)x^{n-r-2}$ (N°. 5).

Potestates autem e radice negativa $-a$, pares sunt positivæ, impares negativæ; & si $n-r$ est numerus par, impar erit $n-r-1$, & rursus par $n-r-2$. Si vero est impar $n-r$, par erit $n-r-1$, & rursus impar $n-r-2$. Igitur, quando $n-r$ est numerus par, fiet horum terminorum

$$\text{Primus } (+a\pi+\varrho)a^{n-r} = +\pi a^{n-r+1} + \varrho a^{n-r}$$

$$\text{Secundus } (+a\varrho+\sigma) - a^{n-r-1} = -\varrho a^{n-r} - \sigma a^{n-r-1}$$

$$\text{Tertius } (+a\sigma+\tau)a^{n-r-2} = +\sigma a^{n-r-1} + \tau a^{n-r-2}$$

& quando est $n-r$ numerus impar, illi fient

$$\text{Primus } (+a\pi+\varrho) - a^{n-r} = -\pi a^{n-r+1} - \varrho a^{n-r}$$

$$\text{Secundus } (+a\varrho+\sigma) + a^{n-r-1} = +\varrho a^{n-r} + \sigma a^{n-r-1}$$

$$\text{Tertius } (+a\sigma+\tau) - a^{n-r-2} = -\sigma a^{n-r-1} - \tau a^{n-r-2}$$

 Er-

Ergo semper prima pars termini medii destruit secundam præcedentis, & secunda medii primam sequentis.

Hinc, pro x &c. substituendo valorem &c. primus æquationis terminus destruet primam partem secundi: secunda pars secundi primam tertii; secunda tertii primam quarti, & sic semper.

Exemplum primi casus sit æquatio

$$\begin{array}{l} x^7 - ax^6 - a\alpha x^5 - a\beta x^4 + a\gamma x^3 + a\delta x^2 - a\varepsilon x - a\zeta = 0 \\ \quad\;\; + a \quad\; + \beta \quad\;\; - \gamma \quad\;\; - \delta \quad\;\; + \varepsilon \quad\; + \zeta \end{array}$$

in qua est $x = + a$. Hæc substituendo fit

$$\begin{array}{l} a^7 - a^7 - \alpha a^6 - \beta a^5 + \gamma a^4 + \delta a^3 - \varepsilon a^2 - a\zeta = 0 \\ \quad\;\; + \alpha a^6 + \beta a^5 - \gamma a^4 - \delta a^3 + \varepsilon a^2 + \zeta a \end{array}$$

Exemplum casus posterioris sit

$$\begin{array}{l} x^7 + ax^6 + a\alpha x^5 - a\beta x^4 - a\gamma x^3 + a\delta x^2 - a\varepsilon x + a\zeta = 0 \\ \quad\;\; + a \quad\; - \beta \quad\;\; - \gamma \quad\;\; + \delta \quad\;\; - \varepsilon \quad\; + \zeta \end{array}$$

in qua est $x = - a$. Hæc substituendo fiet

$$\begin{array}{l} - a^7 + a.a^6 + a.\alpha.-a^5 - a.\beta.a^4 - a.\gamma.-a^3 + a.\delta.a^2 - a.\varepsilon.-a + a\zeta \\ \quad\;\; + \alpha.a^6 - \beta.-a^5 \quad - \gamma.a^4 \quad + \delta \qquad - \varepsilon.a^2 \quad + \zeta.-a - a^3 \end{array}$$

in qua $-a^7 + a.a^6 = -a^7 + a^7 = 0 = +\alpha.a^6 + a.\alpha.-a^5 = +\alpha a^6 - \alpha a^6$ &c. Hinc intelligitur.

7. *Primo*, quomodo valor incognitæ substitutus in æquatione, eam reddat nihilo æqualem.

8. *Secundo*, quomodo radices quales sunt, vel incognitæ valores quales sunt substituti in æquatione pro incognita, non mutent signa terminorum. Sed radices iis oppositæ mutent signa terminorum alternorum; & hoc de nomine *transformetur* æquatio. Vide Auctorem Cap. hujus N°. I. pag. 40. Nam æquatio

$$x^n - Ax^{n-1} - Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + Ex^{n-5} - Fx^{n-6} - \&c. = 0$$

ponendo $- x$, & ejus potestates pro $+ x$, fit, si n est numerus par

$$x^n + Ax^{n-1} - Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - Ex^{n-5} - Fx^{n-6} + \&c. = 0$$

in qua mutata sunt signa terminorum parium: &, si n est numerus impar

$$- x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} - Dx^{n-4} + Ex^{n-5} + Fx^{n-6} - \&c. = 0$$

in qua mutantur signa terminorum imparium, vel transponendo

$0 =$

$$o = +x^n + Ax^{n-1} - Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - Ex^{n-5} - Fx^{n-6} + \&c.$$

in qua mutantur ſigna terminorum parium, ut antea

9. *Tertio*, quod æquatio transformata per ſubſtitutionem radicis negativæ, reſtituitur eadem rurſus ſubſtituendo aliam radicem negativam. Rurſus enim mutantur ſigna terminorum alternorum.

10. Jam ergo, quatenus propoſitæ, ex. gr.

$$x^n \pm Ax^{n-1} - Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + Ex^{n-5} - Fx^{n-6} - \&c. = o$$

radix quævis poſitiva a, manet poſitiva, æquatio manet eadem. Quando radix poſitiva a mutatur in negativam, propoſita transformatur in

$$x^n + Ax^{n-1} - Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - Ex^{n-5} - Fx^{n-6} + \&c. = o.$$

Hæc autem reſtituit propoſitam ſi ponatur radix negativa $-b$. Propoſita pariter invenitur ſi in ea ponatur radix poſitiva $-b$. (N°.8.) Ergo.

11. *Mutantur ſigna terminorum alternorum, quando omnes radices æquationis, quæ erant poſitivæ, fiunt negativæ, & quæ negativæ erant, fiunt poſitivæ.*

12. *Viciſſim, mutatis ſignis terminorum alternorum, omnes radices poſitivæ mutantur in negativas, & negativæ in poſitivas.*

Nam ſi qua radix c, maneret in transformata qualis erat in propoſita, eadem, ſubſtituta pro x, præberet duas æquationes diverſas, propoſitam, & transformatam. Quod eſt abſurdum.

13. Rurſus ſi c eſt poſitiva, duo termini continui propoſitæ ſint

$$(-c\pi + \varrho)\, x^{n-r+1} \quad (-c\varrho + \sigma)\, x^{n-r}$$

qui poſitis c^{n-r} pro x^{n-r}, fiunt

$$-\pi c^{n-r+2} + \varrho c^{n-r+1} - \varrho c^{n-r+1} + \sigma x^{n-r}$$

ubi $+\varrho c^{n-r+1} - \varrho c^{n-r+1}$ ſe deſtruunt. In transformata alterutrius ſignum mutatur, & manet

$$\pm \varrho c^{n-r+1} \pm \varrho c^{n-r+1}$$

qui termini ſe non deſtruunt. Non ergo eſt $+c$ radix transformatæ.

Sed quando c eſt negativa, duo termini continui propoſitæ ſunt

$$(c\pi \pm \varrho)\, x^{n-r+1} \quad (\pm c\varrho \pm \sigma)\, x^{n-r}$$

quorum alteruter poſt ſubſtitutionem ſignum mutat, eſt enim alteruter exponentium impar. Ergo hi ſe deſtruunt in propoſita. Sed in transfor-

mata, alterutrius, puta primi, signum mutatur, & termini fiunt

$$(c\pi \mp \varrho)\, x^{n-r+1} \quad (\pm c\varrho \pm e)\, x^{n-r}$$

atque horum alteruter signum mutat post substitutionem; igitur duæ partes $\mp \varrho c^{n-r+1} \mp \varrho c^{n-r+1}$ se non destruunt.

Idem sic demonstrari solet. Quoniam in proposita sunt radices positivæ sit

$$A = a - \alpha; \text{ profecto erit } -A = -a + \alpha$$

& mutando signum secundi termini radices negativæ mutantur in positivas, & contra. Nunc dico terminorum imparium signa esse servanda, parium esse mutanda, quia coefficientes terminorum imparium habent parem Factorum numerum, qui, seu positivi seu negativi, dant factum positivum; sed coefficientes terminorum parium habent imparem Factorum numerum, qui dant factum positivum quando sunt positivi, & negativum quando negativi. Hoc ratiocinium evolvent & sub oculum ponent exempla hæc. Sit

$$\alpha = -b+\beta, \text{ \& } A = +a-b+\beta, \text{ ac } -A = -a+b-\beta$$

Erit

$$B = +a\,(-b+\beta) - b\,.+\beta = -a\,(+b-\beta) + b\,.-\beta$$

Ergo eædem quantitates binæ dant eadem facta, seu positive sumantur seu negative; & mutato signo ipsius A non mutatur signum coefficientis B

Sit nunc

$$+\beta = -c+\gamma; \text{ \& } A = a-b-c+\gamma; \text{ ac } -A = -a+b+c-\gamma$$

Quando A positive sumitur, erit

$$C = +a\,.-b\,(-c+\gamma) + a\,.-c\,.+\gamma - b\,.-c+\gamma =$$

$$+abc - ab\gamma - ac\gamma + bc\gamma$$

sed quando A negative sumitur, erunt facta ex ternis

$$-a\,.+b\,(+c-\beta) - a\,.+c-\gamma + b\,.+c\,.-\gamma =$$

$$-abc + ab\gamma + ac\gamma - bc\gamma$$

quæ prioribus sunt opposita; & mutato signo coefficientis A mutatur etiam signum coefficientis C. Et gradatim augendo litterarum numerum, idem eodem pacto patebit de reliquis. Hinc, obiter, explicantur, quæ docet Auctor N°. VI. Cap. III. pag. 53...55. Tom. II.

14. Mutatis autem signis terminorum alternorum, ubi erat signorum mutatio in proposita, ibi est successio in transformata, & ubi erat signorum successio in proposita, ibi est mutatio in transformata. Tot ergo sunt successiones & mutationes in transformata, quot vicissim erant mutationes & successiones in proposita. Atqui tot sunt in æquatione radices positivæ quot signorum mutationes, & tot radices negativæ quot signorum successiones (N°. IX. Cap. II. pag. 6. & N°. 118. pag. 42. Tom. II.). Ergo transformata habet radices positivas quot negativas habebat proposita, & contra.

15. Alia est transformatio, qua radix æquationis componitur utcunque ex cognita & incognita. Vide Auctorem N°. II. Cap. III. pag. 40. Tom. II.

Hæc compositio fieri potest per additionem, per subductionem, per multiplicationem, per divisionem, per evectionem ad potestatem, & per extractionem radicis.

Transformatio per additionem vel subductionem nihil habet difficultatis. Nam, si ponatur $x = y + e$, & per theorema binomiale quærantur $(y+e)^n$; $(y+e)^{n-1}$; $(y+e)^{n-2}$ &c; atque hæ potestates ponantur pro x^n; x^{n-1}; x^{n-2} &c., in æquatione

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \&c. + S = o$$

habebitur transformata

$$\left.\begin{array}{llll} y^n + ney^{n-1} & + \frac{n.\overline{n-1}}{2} e^2y^{n-2} & + \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{2.3} e^3y^{n-3} & + \&c. \\ + Ay^{n-1} & + \overline{n-1}\, Aey^{n-2} & + \frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}}{2} Ae^2y^{n-3} & + \&c. \\ & + By^{n-2} & + \overline{n-2}\, Bey^{n-3} & + \&c. \\ & & + Cy^{n-3} & + \&c. \\ & & & + \&c. \end{array}\right\} = o$$

In hac transformatione hæc sunt observanda.

16. Ultimus transformatæ terminus, qui constat ex ultimo termino propositæ & ex ultimis terminis ipsarum

$$(y+e)^n;\ A(y+e)^{n-1},\ B(y+e)^{n-2};\ C(y+e)^{n-3};\ D(y+e)^{n-4}\ \&c. \dots + R(y+e)$$

erit

$$e^n + Ae^{n-1} + Be^{n-2} + Ce^{n-3} + De^{n-4} + \&c. \dots + Re + S$$

 id est

id est ipsa proposita, in qua pro x posita est e.

17. Penultimus transformatæ terminus, qui constat ex penultimis terminis earundem potestatum, erit.

$$y\,(ne^{n-1} + \overline{n-1}\,Ae^{n-2} + \overline{n-2}\,Be^{n-3} + \overline{n-3}\,Ce^{n-4} + \overline{n-4}\,De^{n-5} + \&c.)$$

ubi quantitas per quam multiplicatur y, vel primus transformatæ coefficiens, incipiendo ab ultimo termino per *ordinem retrogradum*, *quem adhibebo in sequentibus*, est ultimus terminus complexus transformatæ nuper inventus, cujus termini singuli multiplicati sunt ordine per terminos progressionis arithmeticæ

$$\frac{n}{e};\ \frac{n-1}{e};\ \frac{n-2}{e};\ \frac{n-3}{e};\ \frac{n-4}{e}\ \ldots\ \frac{1}{e} : 0$$

18. Secundus transformatæ coefficiens, constat ex tertiis, ab ultimo, terminis potestatum

$$(y+e)^n;\ A(y+e)^{n-1};\ B(y+e)^{n-2}\ \ldots\ P(y+e)^2$$

vel ex tertiis terminis earundem, ordine pariter inverso, id est

$$(e+y)^n;\ A(e+y)^{n-1};\ B(e+y)^{n-2}\ \ldots\ P(e+y)^2;\ R(e+y)$$

Hic secundus transformatæ coefficiens, est ipse primus, cujus termini singuli ordine multiplicati sunt per terminos hujus progressionis arithmeticæ

$$\frac{n-1}{2e};\ \frac{n-2}{2e};\ \frac{n-3}{2e};\ \frac{n-4}{2e};\ \frac{n-5}{2e}\ \ldots\ \frac{1}{2e};\ 0$$

19. Ex hoc secundo invenietur tertius ope progressionis

$$\frac{n-2}{3e};\ \frac{n-3}{3e};\ \frac{n-4}{3e};\ \frac{n-5}{3e};\ \frac{n-6}{3e}\ \ldots\ \frac{1}{3e};\ 0$$

Et sic semper. In genere transformatæ coefficiens r..*mus*, invenitur ope præcedentis $r-1$..*mi*, & progressionis arithmeticæ

$$\frac{n-r+1}{re};\ \frac{n-r}{re};\ \frac{n-r-1}{re};\ \frac{n-r-2}{re}\ \ldots\ \frac{1}{re};\ 0.$$

Hæc non difficile deducuntur e termino generali theorematis binomialis Part. I.

Vide etiam Addit. pag. 83. Lem. X.

20. Ex his inveniuntur transformatæ termini etiam facilius quam per evolutionem.

Ex. gr.

Ex. gr. Transformata ipsius

$$x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F = 0$$

habebit primum terminum (*ordine retrogado* ut jam monui)

$$e^6 + Ae^5 + Be^4 + Ce^3 + De^2 + Ee + F$$

Primum coefficientem

$$\frac{6.}{e} e^6 + \frac{5.Ae^5}{e} + \frac{4}{e} Be^4 + \frac{3}{e} Ce^3 + \frac{2}{e} De + \frac{1}{e} Ee + 0.F =$$

$6e^5 + 5Ae^4 + 4Be^3 + 3Ce^2 + 2De + E$. Hinc multiplicando per

$$\frac{5}{2e};\ \frac{4}{2e};\ \frac{3}{2e};\ \frac{2}{2e};\ \frac{1}{2e}\ 0$$

fit secundus coefficiens

$15e^4 + 10Ae^3 + 6Be^2 + 3Ce + D$. Et multiplicando per

$$\frac{4}{3e};\ \frac{3}{3e};\ \frac{2}{3e};\ \frac{1}{3e};\ 0$$

tertius coefficiens

$20e^3 + 10Ae^2 + 4Be + C$; & multicando per

$$\frac{3}{4e};\ \frac{2}{4e};\ \frac{1}{4e};\ 0$$

quartus coefficiens

$15e^2 + 5Ae + B$. &c. multiplicando per

$$\frac{2}{5e};\ \frac{1}{5e};\ 0$$

quintus coefficiens

$$6e + A.$$

21. Si poneretur $x = y - e$; mutanda essent in transformata signa terminorum, in quibus impares sunt exponentes ipsius e. Et si poneretur $x = e - y$, in transformata mutanda essent signa terminorum, in quibus impares sunt exponentes ipsius y.

22.

22. Quando est $x = y + e$, pariter est $x - e = y$. Sed y exponit omnes radices transformatæ, & x omnes radices propositæ: ergo omnes radices transformatæ deficiunt a radicibus propositæ data quantitate e.

23. Tunc autem vere minuuntur radices *positivæ*, sed *negativæ* augentur. Sit enim a una radicum positivarum, & b una negativarum. Erunt ergo

$$x - a = 0, \text{ \& } x + b = 0 \text{ .}$$

duo Factores propositæ. Sed quia ponitur

$$x = y + e; \text{ erit } x - a = y + e - a = 0, \text{ \& } y = a - e$$

Ergo radix positiva propositæ minuta est quantitate e in transformata. Pariter erit

$$x + b = y + e + b, \text{ \& } y = -b - e$$

ergo radix negativa propositæ aucta est in transformata quantitate e.

24. Ergo quando e æquat a unam e radicibus positivis propositæ, fit $a - e = 0$; & ultimus terminus, qui constat ex facto omnium radicum, evanescit, atque ideo transformata uno gradu deprimitur.

25. Quando e est major quam maxima radicum positivarum propositæ, negativa fit hæc maxima radix positiva, atque ideo reliquæ minores & positivæ. Negativæ autem manent, quæ erant negativæ. Ergo transformata tunc habet omnes radices negativas, & ideo omnia terminorum signa positiva; & contra si transformata habet omnis terminos positivos, est e major quam maxima radix positiva propositæ.

26. Quando e est minor quam minima radicum positivarum propositæ, radices in transformata manent quales in proposita.

27. Quando est $x = y + e$, est etiam $x - e = y$, quapropter radices transformatæ superant radices propositæ data quantitate e.

28. Tunc autem augentur radices positivæ, & minuuntur negativæ; quare

29. Si e æquat aliquam radicem negativam, ultimus transformatæ terminus evanescit.

30. Si e major est quam maxima radicum negativarum, ea fit positiva, ut & reliquæ negativæ quæ sunt minores; & æquatio transformata habet omnes radices positivas, & omnia signa alternantia: &, si transformatæ signa alternent, quantitas e major est quam maxima radicum negativarum propositæ.

31. Sed, quando e est quantitas realis, quantitates imaginariæ auctæ vel minutæ quantitate e, manet imaginariæ. Ergo radices imaginariæ, quæ erant in proposita, manent etiam in transformata.

32. Si præterea est e quantitas rationalis, radices surdæ, quæ erant in proposita, manebunt etiam in transformata, sed auctæ vel minutæ quantitate e.

33. Hinc regula generalis, qua secundus æquationis terminus exterminatur. Nam coefficiens termini secundi (ordine directo); id est coefficiens ipsius y^{n-1} in transformata, est $ne + A$. Hic evanescit si $ne + A = 0$; id est

id est $e = -\frac{A}{n}$. Eliminabitur ergo terminus secundus, si coefficiens termini secundi in proposita dividatur per exponentem primi & altissimi termini, & mutato signo jungatur novæ incognitæ, atque hæc quantitas composita ponatur pro x in æquatione proposita. Vide N°. III. Cap. III. pag. 52. Tom II.

34. Hinc confirmatur quod asseruimus N°. 71. pag. 25. Tom. II quod *omnis æquatio carens secundo termino, habet tertium negativum, si omnes ejus radices sunt reales.* Nam, ponendo $\frac{AA}{nn}$ pro ee, & $-\frac{AA}{n}$ pro Ae in coefficiente tertii termini transformatæ, fit

$$\left(\frac{n.n-1}{2}\right) ee+(n-1)\,Ae+B=\left(\frac{n-1}{2n}\right)AA-\left(\frac{n-1}{n}\right)AA+B=$$

$$-\left(\frac{n-1}{2n}\right)AA+B.$$

Quoniam autem est A summa radicum, ad numerum n, æquationis propositæ, & B summa factorum ex binis; erit AA summa quadratorum singularum radicum, una cum dupla summa rectangulorum. Est autem factum ex duabus quantitatibus medium proportionale inter quadratum primæ & quadratum alterius (Eucl. 11. VIII.) atque ideo summa duorum quadratorum major quam bis factum (Eucl. 25. V.) Et in nostra hypothesi quadratum unius radicis additur ordine quadratis reliquarum ad numerum $n-1$. Erit ergo $n-1$... es summa quadratorum ex omnibus radicibus major quam 2B. Sed, ut habeatur AA $n-1$.. es, summæ quadratorum addi debet $2(n-1)$ B, ergo addendo hanc quantitatem hinc inde, erit $(n-1)$ AA major quam $2B+2(n-1)B=2B+2nB-2B=2nB$

atque tandem

$$\left(\frac{n-1}{2n}\right) AA \text{ major quam } B$$

& coefficiens termini tertii erit negativus.

Ut exemplo illustremus hoc ratiocinium, sit

$$A=a+b+c+d+e;$$

erit

$$AA=aa+2a(b+c+d+e)+bb+2b(c+d+e)+cc+2c(d+e)+dd+2de+ee$$

$$B=a\,(b+c+d+e)+b\,(c+d+e)+c\,(d+e)+de$$

 Hic

Hic est $n = 5$. Sed poni debet

aa ad ab ut ab ad bb ac $aa+bb$ major quam $2ab$

aa ad ac ut ac ad cc ac $aa+cc$ major quam $2ac$

aa ad ad ut ad ad dd ac $aa+dd$ major quam $2ad$

aa ad ae ut ae ad ee ac $aa+ee$ major quam $2ae$

bb ad bc ut bc ad cc ac $bb+cc$ major quam $2bc$

bb ad bd ut bd ad dd ac $bb+dd$ major quam $2bd$

bb ad be ut be ad ee ac $bb+ee$ major quam $2be$

cc ad cd ut cd ad dd ac $cc+dd$ major quam $2cd$

cc ad ce ut ce ad ee ac $cc+ee$ major quam $2ce$

dd ad de ut de ad ee ac $dd+ee$ major quam $2de$

ubi aa; bb; cc; dd; ee inveniuntur in quatuor, vel $n-1$, summis duorum quadratorum; ergo addendo majora majoribus & minora minoribus

$$4(aa+bb+cc+dd+ee) \text{ superant } 2a(b+c+d+e)+2b(c+d+e)+2c(d+e)+2de = 2B$$

Ut autem habeatur $4AA$, vel $(n-1)AA$, addi debent summæ quadratorum $4.2B = 2(n-1)B$; ergo $4AA$ major quam $10B = 5.2B$, & $(n-1)AA$ major quam $2nB$.

35. Quando radices sunt reales & formæ $\pm m+n\sqrt{p}$ ac $\pm m-n\sqrt{p}$, est earum summa $\pm 2m = A$, ac $4mm = AA$. & $B = (\pm m+n\sqrt{p})(\pm m-n\sqrt{p}) = +mm-nnp$; patet autem esse $4mm = (2-1)A$ majorem quam $2B = 2mm-2nnp$. Sed quando radices sunt imaginariæ, formæ

$$\pm m+n\sqrt{-p} \text{ ac } \pm m-n\sqrt{-p}$$

est iterum

$$A = \pm 2m;\ AA = +4mm$$

sed

$$B = +mm+nnp \text{ ac } 2B = +2mm+2nnp$$

erit-

eritque AA major aut minor quam 2B, cum esse possit *mm* major aut minor quam *nnp*.

36. Ponendo coefficientem, non secundi, sed tertii, quarti, quinti termini, &c, æqualem nihilo, exterminabitur tertius, quartus, quintus, &c; terminus. Sed tertius terminus eliminatur solutione æquationis quadraticæ

$$ee + \frac{2Ae}{n} + \frac{2B}{n.\overline{n-1}} = 0$$

quæ dat

$$e = -\frac{A}{n} \pm \surd\left(\frac{AA}{nn} - \frac{2B}{n.\overline{n-1}}\right)$$

quartus solutione æquationis trium dimensionum, quintus æquationis quatuor dimensionum &c. Vide N°. IV. Cap. III. pag. 53. Tom. II.

37. Ponendo coefficientem secundi termini transformatæ æqualem datæ quantitati, nempe

$$ne + A = a, \; \& \; e = \frac{a - A}{n}$$

proposita transformabitur in aliam cujus secundus terminus habebit coefficientem datum a. Idem, mutatis mutandis intelligitur de reliquis coefficientibus.

38. Reliquæ transformationes facile perficiuntur. Ponantur in proposita pro x & ejus potestatibus, $\frac{y}{z}$ & hujus potestates; & proposita fiet

$$\frac{y^n}{z^n} + \frac{Ay^{n-1}}{z^{n-1}} + \frac{By^{n-2}}{z^{n-2}} + \frac{Cy^{n-3}}{z^{n-3}} + \&c. = 0.$$

39. Quare si $z = \frac{b}{a}$ erit a ad b ut x ad y, & radices transformatæ ad radices propositæ in data ratione b ad a.

40. Ergo si $a = 1$, erit $y = bx$, & radices transformatæ æquabunt radices æquationis propositæ multiplicatas per datum numerum b.

41. Tunc, multiplicando per b^n, transformata fiet

$$y^n + bAy^{n-1} + b^2By^{n-2} + b^3Cy^{n-3} + b^4Dy^{n-4} + \&c. = 0$$

Quare omnes termini præter primum, dividi poterunt per b.

 42. Hinc

42. Hinc, si proposita habet non unitatem, sed b coefficientem altissimi termini, transformatur in aliam, cujus terminus altissimus coefficientem habet unitatem.

43. Rursus, si sit b factum ex denominatoribus, d; e; f &c., terminorum propositæ

$$x^n + \frac{A}{d}x^{n-1} + \frac{B}{e}x^{n-2} + \frac{C}{f}x^{n-3} + \&c. = 0$$

transformata orietur libera a fractionibus. Ea autem erit

$$\frac{y^n}{b^n} + \frac{Ay^{n-1}}{db^{n-1}} + \frac{By^{n-2}}{eb^{n-2}} + \frac{Cy^{n-3}}{f.b^{n-3}} + \&c. = 0$$

id est

$$y^n + Aefy^{n-1} + Bd^2ef^2y^{n-2} + Cd^3e^3f^2y^{n-3} + \&c. = 0.$$

44. Et si $b = \sqrt[m]{a}$, transformata fiet

$$y^n + Ay\sqrt[m]{a} + By\sqrt[m]{a^2} + Cy\sqrt[m]{a^3} + Dy\sqrt[m]{a^4} + \&c. = 0.$$

Quapropter si $A = \alpha\sqrt[m]{a^{m-1}}$; $B = \beta\sqrt[m]{a^{m-2}}$; $C = \gamma\sqrt[m]{a^{m-3}}$ &c., orietur transformata libera a surdis. Hæc autem series toties redire debet, quoties in $\sqrt[m]{a^r}$ fit r æqualis m aut ejus multiplex; & coefficientes propositæ, qui multiplicandi sunt per aliquam potestatem rationalem ipsius a, esse debent rationales. Sit ex. gr.

$$x^6 + A\sqrt[3]{9}.x^5 + B\sqrt[3]{3}.x^4 + Cx^3 + D\sqrt[3]{9}.x^2 + E\sqrt[3]{3}.x + F = 0$$

& ponatur $x = \frac{y}{\sqrt[3]{3}}$, transformata fiet

$$\frac{y^6}{\sqrt[3]{3^6}} + \frac{A\sqrt[3]{3^2}.y^5}{\sqrt[3]{3^5}} + \frac{B\sqrt[3]{3}.y^4}{\sqrt[3]{3^4}} + \frac{Cy^3}{\sqrt[3]{3^3}} + \frac{D\sqrt[3]{3^2}.y^2}{\sqrt[3]{3^2}} + \frac{E\sqrt[3]{3}.y}{\sqrt[3]{3}} + F = 0$$

quæ multiplicando fit rationalis.

45. Si

45. Si $b = 1$, erit $ay = x$; $y = \frac{x}{a}$, & radices transformatæ æquabunt radices propositæ divisas per datum numerum a.

Tunc transformata erit

$$a^n y^n + Aa^{n-1} y^{n-1} + Ca^{n-2} y^{n-2} + \dots\dots S = 0$$

quare si sit $n = m + r$, & $S = a^m T$, tota æquatio dividi poterit per a^m, & orietur transformata, cujus ultimus terminus minor.

46. Hinc etiam aliquando auferuntur radicales e proposita. Sit enim $a^n = b^n \sqrt[m]{c^n}$, fiet transformata

$$b^n \sqrt[m]{c^n} . y^n + A . b^{n-1} . \sqrt[m]{c^{n-1}} . y^{n-1} + B . b^{n-2} . \sqrt[m]{c^{n-2}} . y^{n-2} \dots + S = 0$$

quæ, si $A = \alpha \sqrt[m]{c}$; $B = \beta \sqrt[m]{c^2}$; $C = \gamma \sqrt[m]{c^3}$. &c. $S = T . \sqrt[m]{c^n}$,

dividi poterit per $\sqrt[m]{c^n}$, & erit libera a surdis. Ex. gr. sit

$$x^6 + A\sqrt[4]{3} . x^5 + B\sqrt{3} . x^4 + C\sqrt[4]{3^3} . x^3 + Dx^2 + E\sqrt[4]{3} . x + F\sqrt{3} = 0$$

& ponatur $x = y\sqrt[4]{3}$, proposita transmutabitur in

$$3y^6\sqrt{3} + 3Ay^5\sqrt{3} + 3By^4\sqrt{3} + 3Cy^3\sqrt{3} + Dy^2\sqrt{3} + Ey\sqrt{3} + F\sqrt{3} = 0$$

quæ per divisionem liberabitur a surdis.

47. Radices æquationis mutantur in reciprocas, scribendo ultimum terminum propositæ ductum in y^n; coefficientem penultimum in y^{n-1} &c. Sic proposita.

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} \dots + Px^2 + Rx + S = 0$$

fit

$$1 + Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \dots + Py^{n-2} + Ry^{n-1} + Sy^n = 0$$

48. Est & alia transformatio ponens pro incognita propositæ aliquam alterius incognitæ potestatem; ut $x = y^m$; tunc proposita, qua sæpius usi,

$$y^{mn} + Ay^{mn-m} + By^{mn-2m} + Cy^{mn-3m} + \&c. = 0$$

49. Hoc pacto deprimuntur æquationes, in quibus exponentes sunt ejusdem numeri multiplices.

Sint exponentes æquationis propositæ

$$pr\,;\; pr - r\,;\; pr - 2r\,;\; pr - 3r\,;\; pr - 4r \text{ \&c.}$$

ponendo in y^m Ni. 48, $m = \frac{1}{r}$, vel $x^r = y$; exponentes transformatæ erunt

$$p\,;\; p-1\,,\; p-2\,;\; p-3\,;\; p-4\,;\; p-5 \text{ \&c.}$$

Ex. gr. proposita sit æquatio

$$x^8 + Ax^6 + Bx^4 + Cx^2 + D = 0$$

ponendo $x^2 = y$; atque ideo $x^4 = y^2$; $x^6 = y^3$; $x^8 = y^4$; proposita transformabitur in

$$y^4 + Ay^3 + By^2 + Cy + D = 0$$

Sit pariter

$$x^{15} + Ax^{12} + Bx^9 + Cx^6 + Dx^3 + E = 0$$

ponendo $x^3 = y$, ac $x^6 = y^2$; $x^9 = y^3$; $x^{12} = y^4$; $x^{15} = y^5$, ea fit

$$y^5 + Ay^4 + By^3 + Cy^2 + Dy + E = 0$$

50. Nunc demonstrandus est Artic. VIII. hujus Capitis, agens de potestatibus radicum æquationis. Theoremata huc pertinentia revocabo ad unum generale, sequutus, quantum potero, notationem Auctoris. Ex ea patet assumi posse æquationem generalem hujus formæ.

$$x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + rx^{n-3} + sx^{n-4} + tx^{n-5} + ux^{n-6} + \ldots \text{ \&c.} = 0$$

51. Pono terminorum sequentium, siqui sunt post ux^{n-6}, coefficientes ordine esse

$$a\,;\; b\,;\; c\,;\; d\,;\; e\,;\; \text{\&c.}$$

& litteras g; h; i, indicare in genere tres coefficientes continuos, qui pertinent ad x^{n-r+1}; x^{n-r}; x^{n-r-1}. Ideo hi coefficientes continebunt summas factorum ex æquationis radicibus sumtis, ordine, ad numeros $r-1$; r; $r+1$.

52. Pariter pono k esse coefficientem termini penultimi, (qui ideo continebit

nebit facta e radicibus sumtis ad numerum $n - 1$;) & l esse terminum ultimum, (vel factum e radicibus omnibus;) atque f; z; ς coefficientes indeterminatos x^{n-s+1}; x^{n-s}; x^{n-s-1}.

53. Hos autem coefficientes sumo cum signis, quæ habent in æquatione, recedens ab Auctore, qui accipit *cognitas quantitates terminorum æquationis sub signis mutatis*, & signa muto in theoremate.

54. Radices æquationis exponantur litteris græcis

$$\alpha;\ \beta;\ \gamma;\ \delta;\ \epsilon;\ \zeta;\ \&c.$$

ad numerum n, qui & æquationis gradum exponit, & quæratur summa potestatum m ex his radicibus.

55. Potestates radicum, quarum potestatum exponentes sunt

$$m;\ m-1;\ m-2;\ m-3;\ m-4;\ \ldots\ 2.$$

in unum coactæ, exponantur litteris latinis majusculis

$$A;\ B;\ C;\ D;\ E\ \ldots\ O.$$

& summa potestatum primarum, vel, quod idem est, summa radicum, exponatur littera p: hanc enim posuimus coefficientem secundi termini æquationis, idest summam radicum. Sed summæ potestatum, quarum exponentes sunt generales & indeterminati, sed continui,

$$m-r+1;\ m-r;\ m-r-1$$

exponantur litteris

$$G;\ H;\ I.$$

56. Tandem summa potestatum quarumvis, quarum exponens est $m-t$, exponatur per M.

Ut sub oculos ponamus has notationes, sit

$$A = \alpha^{m}+\beta^{m}+\gamma^{m}+\delta^{m}+\epsilon^{m}+\zeta^{m}+\ \&c.$$
$$B = \alpha^{m-1}+\beta^{m-1}+\gamma^{m-1}+\delta^{m-1}+\epsilon^{m-1}+\zeta^{m-1}+\ \&c.$$
$$C = \alpha^{m-2}+\beta^{m-2}+\gamma^{m-2}+\delta^{m-2}+\epsilon^{m-2}+\zeta^{m-2}+\ \&c.$$

&c. &c.

$$G = \alpha^{m-r+1}+\beta^{m-r+1}+\gamma^{m-r+1}+\delta^{m-r+1}+\epsilon^{m-r+1}+\zeta^{m-r+1}+\&c.$$
$$H = \alpha^{m-r}+\beta^{m-r}+\gamma^{m-r}+\delta^{m-r}+\epsilon^{m-r}+\zeta^{m-r}\ \&c.$$
$$I = \alpha^{m-r-1}+\beta^{m-r-1}+\gamma^{m-r-1}+\delta^{m-r-1}+\epsilon^{m-r-1}+\zeta^{m-r-1}+\ \&c.$$

&

&

$$M = \alpha^{m-t} + \beta^{m-t} + \gamma^{m-t} + \delta^{m-t} + \epsilon^{m-t} + \zeta^{m-t} + \&c.$$

57. His positis, constituantur series

$$B; C; D; E; F; \&c. \ldots O; p; m$$

&

$$p; q; r; s; t \ldots y; z; \varsigma.$$

Dico esse

$$A = pB - qC + rD - sE + tF \ldots \pm yO \mp zp \pm m\varsigma.$$

Hoc est generale theorema, ad quod revoco theoremata *Newtoni*. Pro cujus demonstratione, observo quod .

58. Omnes termini

$$pB; qC; rD; sE; tF \&c.$$

habent eundem dimensionum numerum m. Nam ipsa B est dimensionum numero $m - 1$ (N[is] 55. & 56.); est autem p unius dimensionis: ergo numerus dimensionum facti pB est m. Sed in ipsis p; q; r; s; t; &c. numerus dimensionum semper crescit unitate, qua decrescunt exponentes ipsarum B; C; D; E; F; &c, ergo singula facta habent eundem dimensionum numerum m.

59. Sumamus nunc tria quævis facta continua

$$\pm gG \mp hH \pm iI$$

secundum N[os] 51. & 55; prima pars ipsius hH destruit secundam præcedentis gG; & secunda pars ipsius hH destruitur a prima sequentis iI (N°.6. Comment. ad Cap. III. pag. 62). Penultimi autem termini $\mp zp$ pars destruit partem præcedentis; pars altera destruitur ab ipso $m\varsigma$: & pars ipsius qC destruit partem ipsius pB; pars reliqua destruitur ab rD. Manet ergo tandem prima pars ipsius pB, quæ est ipsa quantitas A.

60. Dixi *primo*, medium e tribus factis continuis destrui partim a parte præcedentis, partim a parte sequentis, & appellavi ad ea quæ supra demonstravi de quavis æquationis radice, quæ in æquatione substituitur pro x^{n-r}; x^{n-r-1}; x^{n-r-2}. Id nunc accidere patet; quod cum verum sit, seu substituatur α; seu β; seu quævis alia, etiam verum erit quando substituuntur omnes, una post aliam. Rem licet perspicuam, exemplo tamen illustremus.

Sit æquatio generalis sex dimensionum

x^6

$$x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sx^2 + tx + u = 0$$

hujus radices sint quæ supra (N°. 54.) & sit exponens $m - r = m - 4$. Erit $m - r + 1 = m - 3$; & $m - r - 1 = m - 5$. Quapropter

$$G = \alpha^{m-3} + \beta^{m-3} + \gamma^{m-3} + \delta^{m-3} + \varepsilon^{m-3} + \zeta^{m-3}$$

Hæc summa debet multiplicari per

$$\begin{aligned} r = {} & \alpha\beta(\gamma + \delta + \varepsilon + \zeta) + \alpha\gamma(\delta + \varepsilon + \zeta) + \alpha\delta(\varepsilon + \zeta) + \alpha\varepsilon\zeta + \\ & \beta\gamma(\delta + \varepsilon + \zeta) + \beta\delta(\varepsilon + \zeta) + \beta\varepsilon\zeta + \\ & \gamma\delta(\varepsilon + \zeta) + \gamma\varepsilon\zeta + \\ & \delta\varepsilon\zeta \end{aligned}$$

Hinc conficietur

$$\begin{aligned} & \alpha^{m-2}(\beta(\gamma + \delta + \varepsilon + \zeta) + \gamma(\delta + \varepsilon + \zeta) + \delta(\varepsilon + \zeta) + \varepsilon\zeta) + \\ & \alpha^{m-3}(\beta\gamma(\delta + \varepsilon + \zeta) + \beta\delta(\varepsilon + \zeta) + \beta\varepsilon\zeta + \gamma\delta(\varepsilon + \zeta) + \gamma\varepsilon\zeta + \delta\varepsilon\zeta) + \\ & \beta^{m-2}(\alpha(\gamma + \delta + \varepsilon + \zeta) + \gamma(\delta + \varepsilon + \zeta) + \delta(\varepsilon + \zeta) + \varepsilon\zeta) + \\ & \beta^{m-3}(\alpha\gamma(\delta + \varepsilon + \zeta) + \alpha\delta(\varepsilon + \zeta) + \alpha\varepsilon\zeta + \gamma\delta(\varepsilon + \zeta) + \gamma\varepsilon\zeta + \delta\varepsilon\zeta) + \\ & \gamma^{m-2}(\alpha\iota\beta + \delta + \varepsilon + \zeta) + \beta(\delta + \varepsilon + \zeta) + \delta(\varepsilon + \zeta) + \varepsilon\zeta + \\ & \gamma^{m-3}(\alpha\beta((\delta + \varepsilon + \zeta) + \alpha\delta(\varepsilon + \zeta) + \alpha\varepsilon\zeta + \beta\delta(\varepsilon + \zeta) + \beta\varepsilon\zeta + \delta\varepsilon\zeta) + \\ & \delta^{m-2}(\alpha(\beta + \gamma + \varepsilon + \zeta) + \beta(\gamma + \varepsilon + \zeta) + \gamma(\varepsilon + \zeta) + \varepsilon\zeta) + \\ & \delta^{m-3}(\alpha\beta(\gamma + \varepsilon + \zeta) + \alpha\gamma(\varepsilon + \zeta) + \alpha\varepsilon\zeta + \beta\gamma(\varepsilon + \zeta) + \beta\varepsilon\zeta + \gamma\varepsilon\zeta) + \\ & \varepsilon^{m-2}(\alpha(\beta + \gamma + \delta + \zeta) + \beta(\gamma + \delta + \zeta) + \gamma(\delta + \zeta) + \delta\zeta) + \\ & \varepsilon^{m-3}(\alpha\beta(\gamma + \delta + \zeta) + \alpha\gamma(\delta + \zeta) + \alpha\delta\zeta + \beta\gamma(\delta + \zeta) + \beta\delta\zeta + \gamma\delta\zeta) + \\ & \zeta^{m-2}(\alpha(\beta + \gamma + \delta + \varepsilon) + \beta(\gamma + \delta + \varepsilon) + \gamma(\delta + \varepsilon) + \delta\varepsilon) + \\ & \zeta^{m-3}(\alpha\beta(\gamma + \delta + \varepsilon) + \alpha\gamma(\delta + \varepsilon) + \alpha\delta\varepsilon + \beta\gamma(\delta + \varepsilon) + \beta\delta\varepsilon + \gamma\delta\varepsilon) + \end{aligned}$$

Hic vides quam partem voco summam factorum e potestatibus, quarum exponens est $m - 3$, in suos Factores.

Pariter erit

$$H = \alpha^{m-4} + \beta^{m-4} + \gamma^{m-4} + \delta^{m-4} + \varepsilon^{m-4} + \zeta^{m-4}$$

Hæc summa debet multiplicari per

$$\begin{aligned} s = {} & \alpha\beta\gamma(\delta + \varepsilon + \zeta) + \alpha\beta\delta(\varepsilon + \zeta) + \alpha\beta\varepsilon\zeta + \alpha\gamma\delta(\varepsilon + \zeta) + \alpha\delta\varepsilon\zeta + \alpha\gamma\varepsilon\zeta + \\ & \beta\gamma\delta(\varepsilon + \zeta) + \beta\gamma\varepsilon\zeta + \beta\delta\varepsilon\zeta + \gamma\delta\varepsilon\zeta \end{aligned}$$

unde fit

$$\alpha^{m-3}(\beta\gamma(\delta+\varepsilon+\zeta)+\beta\delta(\varepsilon+\zeta)+\beta\varepsilon\zeta+\delta\gamma(\varepsilon+\zeta)+\delta\varepsilon\zeta+\gamma\varepsilon\zeta)+$$
$$\alpha^{m-4}(\beta\gamma\delta(\varepsilon+\zeta)+\beta\gamma\varepsilon\zeta+\beta\delta\varepsilon\zeta+\gamma\delta\varepsilon\zeta)+$$
$$\beta^{m-3}(\alpha\gamma(\delta+\varepsilon+\zeta)+\alpha\delta(\varepsilon+\zeta)+\alpha\varepsilon\zeta+\gamma\delta(\varepsilon+\zeta)+\gamma\varepsilon\zeta+\delta\varepsilon\zeta)+$$
$$\beta^{m-4}(\alpha\gamma\delta(\varepsilon+\zeta)+\alpha\delta\varepsilon\zeta+\alpha\gamma\varepsilon\zeta+\gamma\delta\varepsilon\zeta)+$$
$$\gamma^{m-3}(\alpha\beta(\delta+\varepsilon+\zeta)+\alpha\delta(\varepsilon+\zeta)+\alpha\varepsilon\zeta+\beta\delta(\varepsilon+\zeta)+\beta\varepsilon\zeta+\delta\varepsilon\zeta)+$$
$$\gamma^{m-4}(\alpha\beta\delta(\varepsilon+\zeta)+\alpha\beta\varepsilon\zeta+\alpha\delta\varepsilon\zeta+\beta\delta\varepsilon\zeta)+$$
$$\varepsilon^{m-3}(\alpha\beta(\gamma+\delta+\zeta)+\alpha\gamma(\delta+\zeta)+\alpha\delta\zeta+\beta\gamma(\delta+\zeta)+\beta\delta\zeta+\delta\varepsilon\zeta)+$$
$$\varepsilon^{m-4}(\alpha\beta\gamma(\delta+\zeta)+\alpha\beta\delta\zeta+\alpha\gamma\delta\zeta+\beta\gamma\delta\zeta)+$$
$$\zeta^{m-3}(\alpha\beta(\gamma+\delta+\varepsilon)+\alpha\gamma(\delta+\varepsilon)+\alpha\delta\varepsilon+\beta\gamma(\delta+\varepsilon)+\beta\delta\varepsilon+\gamma\delta\varepsilon)+$$
$$\zeta^{m-4}(\alpha\beta\gamma(\delta+\varepsilon)+\alpha\beta\delta\varepsilon+\alpha\gamma\delta\varepsilon+\beta\gamma\delta\varepsilon)$$

cujus pars prima, nempe ſumma factorum e poteſtatibus, quarum exponens eſt $m - 3$, eadem eſt ac ſecunda pars ipſius rG. Habent autem rG & sH ſigna contraria. Ergo hæ duæ partes ſe deſtruunt. Si nunc evolvatur tI, invenietur ejus prima pars æqualis ſecundæ parti ipſius sH; ſed sH & tI habent ſigna contraria. Igitur &c.

61. Dixi *ſecundo* partem penultimi termini zp deſtrui a parte præcedentis, quod conſtat e ſuperioribus. Addidi alteram partem ipſius zp deſtrui ab ultimo termino $m\varsigma$. Demonſtrandum eas eſſe æquales; oppoſitæ enim factæ ſunt.

Coefficiens z continet ſummam factorum e radicibus ſumtis ad numerum $m - 1$ (N°. 58.); atque horum factorum numerus eſt m. Hæc ſumma debet multiplicari per ſummam radicum. Conficientur ergo primo ſecundæ poteſtates ſingularum radicum, ductæ ſingulæ in ſummam factorum ex $m - 2$ radicibus, præter eam cujus poteſtas ſecunda ſumta eſt; & deinde producta ex omnibus factis diverſis $m - 1$ Factorum, vel radicum, in ſingulas radices, quæ ab iis abſunt; id eſt factum ex m radicibus, qui m..ies repetetur (N°. 29. Comment. ad Cap. II. pag. 17.) id eſt $m\varsigma$.

63. Dixi *tertio* primam partem ipſius pB eſſe quantitatem A; quod conſtat: eſt enim

$$B = \alpha^{m-1} + \beta^{m-1} + \gamma^{m-1} + \delta^{m-1} + \&c.$$

Hæc quantitas multiplicari debet per

$$p = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \&c.$$

conficietur ergo

$$\alpha^{m} + \alpha^{m-1}(\beta + \gamma + \delta + \&c) + \beta^{m} + \beta^{m-1}(\alpha + \gamma + \delta + \&c) + \gamma^{m} +$$

$$\gamma^{m-1}(\alpha+\beta+\delta+\&c)+\delta^{m}+\delta^{m-1}(\alpha+\beta+\gamma+\&c)+\&c.$$

Quare patet propositum.

64. Nunc autem, si est m, (exponens potestatum e radicibus,) æqualis n (exponenti altissimi termini æquationis,) eundem terminorum numerum habebunt series

$$\begin{array}{llllllll} B; & C; & D; & E; & F; & .... \; O; & p; & m \\ p; & q; & r; & s; & t; & \; y; & z; & \varsigma \end{array}$$

eritque ς ultimus æquationis terminus.

65. Si m est minor quam n, series prior habebit minorem terminorum numerum, quam posterior; cadet m supra aliquem coefficientem æquationis, qui ultimum præcedit, & ibi abrumpetur series productorum, quæ erit, ex. gr.

$$pB;\ qC;\ rD;\ sE;\ tF\ ....\ ma.$$

66. Hinc oriuntur peculiaria Newtoni theoremata; in quibus nos ponemus majusculas italicas A; B; C &c. pro minusculis a; b; c &c, quibus ille utitur.

Sit enim $m = 2$; erit

Summa 2. Pot. $pA - 2q = B$

Si $m = 3$, erit

Summa 3. Pot. $pB - qA + 3r = C$

Pariter ponendo pro m ordine numeros 4; 5; 6; &c. erit

S. 4. Pot. $pC - qB + rA - 4s = D$
S. 5. Pot. $pD - qC + rB - sA + 5t = E$
S. 6. Pot. $pE - qD + rC - sB + tA - 6u = F$

Et sic semper.

67. Si tandem est m major quam n, cadet ultimus æquationis terminus ς sub aliqua summa potestatum M, atque ibi abrumpetur series, quæ erit

$$pB - qC + rD - sE + tF \ .... \pm \varsigma M.$$

68. Hoc assertum, & quod habetur sub N°. 65., facile patent, si post ultimum seriei brevioris terminum scribantur aliquot o; sic pro N°. 65.

$$\begin{array}{lllllllllll} B; & C; & D; & E; & F; & .... \; p; & m; & o; & o; & o; & o; \; \&c. \\ p; & q; & r; & s; & t; & \; u; & a; & b; & c; & d; & e; \; \&c. \end{array}$$

 unde

unde conflabitur feries compofita

pB; qC; rD; sE; tF .... pu; ma; o; o; o &c.

& poft ma abrumpetur. At pro N°. 67. feries erunt

A; B; C; E; F; .... M; N; O .... p; m
p; q; r; s; t; .... ς; o; o; .... o; o.

unde orietur feries compofita

pB; qC; rD; sE; tF .... ςM; o; o &c

& ea poft ςM abrumpetur; nullus ergo hujus terminus erit multiplicatus per m, quandoquidem m cadit fupra o, & m . o = o. Sed ultimum compofitæ terminum ςM non ducendum effe in m alio pacto demonftrari poteft.

69. Eft enim ς factum unicum ex omnibus æquationis radicibus $\alpha\beta\gamma\delta\iota\zeta$ &c; quod ductum in M, ex notatione N^i. 56., dabit

$$\alpha^{m-i+1} . \beta\gamma\delta\iota\zeta \text{ \&c.} + \beta^{m-i+1} . \alpha\gamma\delta\iota\zeta \text{ \&c.} + \gamma^{m-i+1} . \alpha\beta\delta\iota\zeta \text{ \&c.} + \text{\&c.}$$

hujus autem fummæ quævis incomplexa pars diverfa eft ab aliis, & deftruit refpondentem incomplexam partem præcedentis. Nulla ergo eft pars repetita; quæ repetitio inveniebatur in hypothefi N^i. 65; ut patet ex N° 64. Demonftratio ibi allata transferri nequit ad hypothefim quam nunc præ manibus habemus, quia nunc eft ς factum ex omnibus radicibus, & in N°. 64. habebamus fummam factorum ex omnibus radicibus, *una demta*.

70. Nunc dico feries allatas N. 66. ita cum Newtonianis concidere, ut prima, tertia, quinta, &c. etiam fignis conveniant; fecunda, quarta, fexta &c, habeant figna contraria. Nos enim fumimus $p = A$ cum figno quod habet in æquatione, NEWTONUS fignum mutat; ille igitur habet $\pm p$, & $\pm A$, quando nos contra $\mp p$, & $\mp A$. Sed $\mp p . \pm A = + pA = \mp p . \mp A$, & quantitas q utrinque fumitur cum figno contrario. Ergo prima feries utrinque eadem eft, & etiam fignis congruit.

Sed in fecunda, ubi ille habet $\pm pB$, nos contra habemus $\mp pB$; ille $- q . \pm A$; nos $- q \mp A$; ille $\mp 3r$; nos $\pm 3r$. Ergo figna funt contraria. Ratiocinium primæ feriei fponte aptatur tertiæ, quintæ &c., ratiocinium fecundæ ultro fe accommodat quartæ, fextæ &c. Nam ille habet $\pm C$, & nos $\mp C$; fed $\pm p . \pm C = + pC = \mp p . \mp C$; uterque $\pm B$, ac $- q$; ille $\pm A$ & $\pm r$; nos $\mp A$; & $\mp r$; fic de reliquis.

71. Ceterum neque imaginariæ fallunt vim theorematis. Exemplo effe poteft æquatio

$$x^6 - 8x^5 + 32x^4 - 50x^3 + 9x^2 + 78x + 338 = 0$$

cujus radices funt

$-1-\sqrt{-1}; -1+\sqrt{-1}; +2-3\sqrt{-1}; +2+3\sqrt{-1}; +3-2\sqrt{-1}; +3+2\sqrt{-1}$

omnes imaginariæ. In hoc exemplo, tum elevando has radices singulas ad poteſtates, tum ex theoremate, invenientur

ſumma 2. Poteſt. $=$ 0. ſumma 3. Poteſt. $= -106$

ſumma 4. Poteſt. $= -484$. ſumma 5. Poteſt. $= -942$

ſumma 6. Poteſt. $=$ 0. ſumma 7. Poteſt. $= +4194$ &c.

Hoc theorema in Addit. pag. 110. & ſeq. invenitur alio pacto demonſtratum a Celeb. BAERMANNO, cum quo demonſtrationem meam, antea inventam, communicaveram anno 1749. Item alio pacto demonſtratum fuit ab illuſtri *Colin* MAC-LAURIN in ejus Algebra anglice edita anno 1748. cap. XII. pag. 286. & ſeq. Uſum tradet Auctor in capite ſequente, & multiplex eſt in Matheſi ſublimiore. Vide, ſis, Clar. EULERI introductionem in analyſim infinitorum Lib. I. Cap. X. pag. 128. & ſeq.

71. Eſt & alia transformatio, qua datum binomium

$$a^m \pm b^l$$

per multiplicationem transformatur in aliud, in quo quantitas a datum habeat exponentem n, & quantitas b non multiplicata ſit per a.

Leges ſunt 1°. ut quæſiti binomii primus terminus exponentem habeat datum $= n$.

2°. Ut termini medii ſe deſtruant.

Quærendum eſt polynomium, per quod ſi multiplicetur datum binomium, obtineatur propoſitum.

72. Sint duo termini continui deſumti e polynomio quæſito

$$a^x b^y + a^z b^u$$

Ex horum & binomii propoſiti multiplicatione oritur factum generale

$$a^{m+x} b^y \pm a^x b^{l+y} + a^{m+z} b^u \pm a^z b^{l+u}.$$

73. Jam primus facti terminus debet eſſe a^n. Ergo

$$m+x = n;\ x = n-m;\ \&\ y = 0$$

quare primus multiplicatoris terminus eſt

$$a^{n-m}.$$

& factum, per ſubſtitutionem,

$$a^n \pm a^{n-m}b^l + a^{m+z}b^u \pm a^z b^{l+u}$$

Sed esse debet

$$\pm a^{n-m}b^l + a^{m+z}b^u = 0$$

quare primus horum duorum terminorum semper est negativus; & si binomium propositum est

$$a^m + b^l$$

secundus terminus multiplicatoris, est negativus; at positivus est si propositum binomium est

$$b^m - b^l.$$

74. Præterea esse debet

$$n - m = m + z; \text{ \& } l = u; \text{ unde } z = n - 2m; \text{ atque } 2l = u + l$$

Et jam est multiplicator

$$a^{n-m} \mp a^{n-2m}b^l + a^{n-3m}b^{2l}$$

Factum autem

$$a^n - a^{n-m}b^l + a^{n-m}b^l \pm a^{n-2m}b^{2l}$$

75. Ponatur nunc ultimus hujus facti terminus æqualis primo termino facti generalis; quia hi termini se destruere debent, erit

$$\pm a^{n-2m}b^{2l} = + a^{m+x}b^y$$

statimque recurret observatio N^i. 73. pro signo quarti termini multiplicatoris. Erit præterea

$$n - 2m = m + x; \text{ hinc } x = n - 3m; \text{ atque } y = 2l, \text{ ac } l + y = 3l$$

& substituendo, factum evadet

$$a^n - a^{n-m}b^l + a^{n-m}b^l - a^{n-2m}b^{2l} + a^{n-2m}b^{2l} \pm a^{n-3m}b^{3l} +$$

$$a^{m+z}b^u \pm a^z b^{l+u}$$

ubi debet esse

$$n - 3m = m + z; \text{ ac } z = n - 4m; \text{ \& } u = 3l, \text{ ac } l + u = 4l$$

76. Hinc invenitur multiplicator

$$a^{n-m} \mp a^{n-2m}b^{l} + a^{n-3m}b^{2l} \mp a^{n-4m}b^{3l}$$

77. Itaque manifesta est lex progressionis. Eadem autem progressio invenietur substituendo in facto generale, ut jam fecimus.

78. Ultimus autem producti terminus esse debet liber a potestatibus ipsius a. Hic ultimus producti terminus oritur ab ultimo termino multiplicatoris ducto in ultimum terminum propositi binomii. Si ergo ultimus multiplicatoris terminus sit ejus terminus p...*mus*. Erit ergo ex lege progressionis, & ex observatis, exponens ipsius a in ultimo facti termino

$$n - pm = 0; \text{ unde } p = \frac{n}{m} = z$$

est autem z exponens ipsius a in ultimo termino facti generalis.

79. Item ex lege progressionis, exponens ipsius b in ultimo facti termino est

$$(p - 1)\,l = + n; \text{ hinc } u = pl = \frac{nl}{m}.$$

Est autem iterum $l + u$ exponens ipsius b in ultimo termino facti generalis, & u exponens ejusdem b in ultimo termino multiplicatoris.

80. Sed, si binomium propositum est.

$$a^{m} + b^{l}$$

multiplicatoris terminus secundus, quartus, sextus, & reliqui pares sunt negativi. (N.^{is} 73. 75. hujus).

81. Erit ergo multiplicatoris terminus ultimus negativus si cadit in sedem parem

82. Si vero, vel ultimus multiplicatoris terminus cadat in sedem imparem, vel si propositum binomium sit

$$a^{m} - b^{l}$$

semper ultimus multiplicatoris terminus erit positivus.

83. Hujus transformationis usus duplex est. Et primo quidem dato binomio irrationali invenietur polynomium, per quod si ducatur datum binomium irrationale, producatur binomium rationale.

Sint enim dati binomii irrationalis exponentes dati m, & l; & quæratur minimus numerus integer n; ita ut sit $\frac{nl}{m}$ numerus integer, dati erunt exponentes polynomii quæsiti.

Sit

Sit binomium datum $\sqrt{a} - \sqrt[3]{b}$. Hic eſt

$$m = \frac{1}{2}\ ;\ l = \frac{1}{3}\ ;\ \text{atque ideo}\ \frac{l}{m} = \frac{2}{3}\ ,\ \text{ac}\ n = 3$$

Quapropter

$$n - m = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}\ ;\ n - 2m = 3 - 1 = 2\ ;\ n - 3m = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$n - 4m = 3 - 2 = 1\ ;\ n - 5m = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}\ ;\ n - 6m = 3 - 3 = 0$$

ſepoſito ultimo exponente, manent quinque exponentes ipſius a; quinque igitur inveniendi ſunt exponentes ipſius b; quod facile fit. Eſt enim

$$l = \frac{1}{3}\ ;\ 2l = \frac{2}{3}\ ;\ 3l = 1\ ;\ 4l = \frac{4}{3}\ ;\ 5l = \frac{5}{3}$$

Quare polynomium quæſitum eſt

$$a^{\frac{5}{2}} + a^2 b^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{2}{3}} + ab + a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{5}{3}}$$

& binomium productum eſt

$$a^3 - b^2.$$

Quando eſt $m = l$; utique eſt $\frac{l}{m} = 1 = n$.

84. Hinc fractiones ſurdis implicatæ ſæpe raducuntur ad ſimpliciorem expreſſionem, quærendo polynomium quod, multiplicatum per fractionis denominatorem ſurdum, det factum rationale, & per idem polynomium multiplicando etiam numeratorem. Sic invenietur

$$\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = 4 + \sqrt{15}$$

Nam binomium transformandum eſt $\sqrt{5} - \sqrt{3}$. Quare

$$m = \frac{1}{2} = l;\ \&\ n = 1.\ \text{Ideo}\ n - m = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ ;\ n - 2m = 0$$

&

$l =$

$l = \frac{1}{2}$; $2l = 1$; atque multiplicator quæsitus $\sqrt{5} + \sqrt{3}$.

Est autem

$$(\sqrt{5} - \sqrt{3})\ (\sqrt{5} + \sqrt{3}) = 5 + \sqrt{15} - \sqrt{15} - 3 = 2$$

& numerator multiplicatus

$$(\sqrt{5} + \sqrt{3})\ (\sqrt{5} + \sqrt{3}) = 5 + 2\sqrt{15} + 3 = 8 + 2\sqrt{15}$$

85. Alter usus est hic. Dato facto

$$a^n \pm b^{\frac{nl}{m}}$$

& Factorum uno

$$a^m \pm b^l$$

invenire alterum Factorem

$$a^{n-m} \mp a^{n-2m} b^l + a^{n-3m} b^{2l} \mp a^{n-4m} b^{3l} + \&c.$$

vitatis divisionis ambagibus. Exempla desumemus e potestatibus unitatis.

86. Ponamus $x^r = 1$, vel $x^r - 1 = 0$. Constat esse $x = 1$, si r est numerus impar, & $x = \pm 1$, si r est numerus par; id est $x - 1 = 0$ in prima hypothesi, & $x \pm 1$ in altera, esse unum e binomiis simplicibus, quibus conflatur æquatio $x^r - 1 = 0$. Est ergo

$$a^n - b^{\frac{nl}{m}} = x^r - 1, \ \& \ a^m \pm b^l = x \pm 1$$

Quare

$$m = 1;\ l = 0;\ n = r.$$

Igitur alter Factor est

$$x^{r-1} \mp x^{r-2} + x^{r-3} \mp x^{r-4} + x^{r-5} \mp \&c = 0$$

Ubi ultimus terminus erit $x^{r-r} = x^0 = 1$

Sit $r = 3$; Factor $x^2 + x + 1$, habebit omnes terminos positivos (N°. 73. & 82. hujus pag. 77. & 79). Sed

$$x^2+x+1=0 \text{ dat } x=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3}$$

Igitur radix cubica unitatis eſt triplex, una realis, & duæ imaginariæ; nempe

$$1;\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3};\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$$

Sit $r=4$. Factor erit $x^3+x^2+x+1=0$ quando alter eſt $x-1$; Quando vero is eſt $x+1$, habetur Factor $x^3-x^2+x-1=0$ (N°.80). Sed prior diviſa per $x+1$; vel poſterior diviſa per $x-1$, dant $x^2+1=0$, atque ideo $x=\pm\sqrt{-1}$; & quarta unitatis poteſtas quatuor habet radices, duas reales, & duas imaginarius

$$+1;\ -1;\ +\sqrt{-1};\ -\sqrt{-1}$$

Sit $r=5$; Factor unus erit $x-1=0$, alter autem

$$x^4+x^3+x^2+x+1=0$$

Sit $r=6$. Factor $x-1=0$, dat alterum

$$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$$

& Factor $x+1=0$, dat

$$x^5-x^4+x^3-x^2+1=0$$

ſed tum prima diviſa per $x+1=0$; tum ſecunda diviſa per $x-1$, dant

$$x^4+x^2+1=0; \text{ vel } x=\pm\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)}$$

Habet ergo ſexta unitatis poteſtas ſex radices, duas reales, & quatuor imaginarias

$$+1;\ -1;\ +\sqrt{\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)};\ -\sqrt{\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)};$$

$$+\sqrt{\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)};\ -\sqrt{\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)}.$$

87. Et ſic de reliquis exemplis. Conſtat autem in genere, quando r eſt numerus impar, quotum $\frac{x^r-1}{x+1}$ dividi non poſſe nec per $x+1$, nec per $x-1$. Nam, præter obſervata N°. 86., quotum illud habebit terminos numero r, impari, & ſi dividi poſſet per binomium, quotum hinc ortum habere deberet terminorum numerum $\frac{r}{2}$. (N°. 149. Nota ad Sect. I. Cap. VI. Tom. I. pag. 42.) Hoc autem eſt abſurdum.

CA-

CAPUT IV.

De Limitibus Æquationum.

I. Et hinc colliguntur *Limites* inter quos consistent radices æquationis, ubi nulla earum impossibilis est. Nam cum radicum omnium quadrata sint affirmativa, quadratorum summa affirmativa erit, ideoque quadrato maximæ radicis major. Et eodem argumento, summa quadrato-quadratorum radicum omnium major erit quam quadrato-quadratum radicis maximæ, & summa cubo-cuborum major quam cubo-cubus radicis maximæ.

Quamobrem si limitem desideres quem radices nullæ transgrediuntur, quære summam quadratorum radicum & extrahe ejus radicem quadraticam. Hæc enim radix major *erit quam radix maxima æquationis.*

II. Sed ad radicem maximam propius accedes si quæras *summam quadrato-quadratorum & extrahas ejus radicem quadrato-quadraticam, & adhuc* magis *si quæras summam cubo-cuborum & extrahas ejus radicem cubo-cubicam: Et ita in infinitum.*

Sic in æquatione præcedente radix quadratica summæ quadratorum radicum, seu $\sqrt{39}$, est $6\frac{1}{2}$ quam proxime, & $6\frac{1}{2}$ magis distat a nihilo quam ulla radicum 1, 2, 3, — 5. At radix quadrato-quadratica summæ quadrato-quadratorum radicum, nempe $\sqrt[4]{723}$ quæ est $5\frac{1}{2}$ circiter, propius accedit ad radicem a nihilo remotissimam — 5.

III. Si inter summam quadratorum & summam quadrato-quadratorum radicum inveniatur media proportionalis, erit ea paulo major quam summa cuborum radicum sub signis affirmativis connexorum. Et inde hujus mediæ proportionalis & summæ cuborum sub propriis signis, ut prius inventæ, semisumma erit major quam summa cuborum radicum affirmativarum, & semidifferentia major quam summa cuborum radicum negativarum.

IV. *Atque adeo maxima radicum affirmativarum minor erit quam radix cubica illius semisummæ, & maxima radicum negativarum minor quam radix cubica illius semidifferentiæ.*

Sic in æquatione præcedente, media proportionalis inter summam quadratorum radicum, 39, & summam quadrato-quadratorum, 723, est 168 circiter. Summa cuborum sub propriis signis supra erat — 89. Hujus & 168 semisumma est $39\frac{1}{2}$, semidifferentia $128\frac{1}{2}$. Prioris radix cubica, quæ est $3\frac{1}{2}$ circiter, major est quam maxima radicum affirmativarum 3. Posterioris radix cubica, quæ est $5\frac{1}{21}$ proxime, transcendit radicem negativam — 5.

 Quo

Quo exemplo videre est quam prope ad radicem hac methodo acceditur, ubi unica tantum radix negativa est, vel unica affirmativa.

V. *Et tamen propius adhuc accederetur*, si, inter summam quadratorum radicum & summam cubo-cuborum, media proportionalis inveniretur; atque ex hujus & summæ quadrato-cuborum radicum semisumma & semidifferentia radices quadrato-cubicæ extraherentur. Nam radix quadrato-cubica semisummæ transcenderet maximam radicem affirmativam, & radix quadrato-cubica semidifferentiæ maximam seu extimam negativam, sed excessu multo minore quam ante. Cum igitur radix qualibet, augendo vel diminuendo radices omnes, fieri possit minima, dein minima in maximam converti, & postea omnes, præter maximam, fieri negativæ, constat quomodo radix imperata quam proxime potest obtineri.

VI. *Si radices omnes, præter duas, negativæ sunt, possunt illæ duæ simul hoc modo erui.*

Inventa, juxta methodum præcedentem, summa cuborum duarum illarum radicum, ut & summa quadrato-cuborum & summa quadrato-quadrato-cuborum radicum omnium; inter posteriores duas summas quære mediam proportionalem, & ea erit differentia inter summam cubo-cuborum radicum affirmativarum, & summam cubo-cuborum radicum negativarum, quam proxime; adeoque hujus mediæ proportionalis & summæ cubo-cuborum radicum omnium semisumma erit summa cuborum radicum affirmativarum, & semidifferentia erit summa cubo-cuborum radicum negativarum. Habita igitur tum summa cuborum, tum summa cubo-cuborum radicum duarum affirmativarum, de duplo summæ posterioris aufer quadratum summæ prioris, & reliqui radix quadratica erit differentia cuborum duarum radicum. Habita vero tum summa tum differentia cuborum habentur cubi ipsi. Extrahe eorum radices cubicas & habebuntur æquationis radices duæ affirmativæ quam proxime. Et si in altioribus potestatibus opus consimile institueretur, magis adhuc accederetur ad radices. Sed hæ limitationes ob difficilem calculum minus usui sunt, & ad æquationes tantum se extendunt, quæ nullas habent radices imaginarias. Quapropter limites alia ratione invenire jam docebo, quæ & facilior sit & ad omnes æquationes se extendat.

VII. *Multiplicetur æquationis terminus unusquisque per numerum dimensionum ejus, & dividatur factum per radicem æquationis. Dein rursus multiplicetur unusquisque terminorum prodeuntium per numerum unitate minorem quam prius, & factum dividatur per radicem æquationis. Et sic pergatur semper multiplicando per numeros unitate minores quam prius, & factum dividendo per radicem, donec tandem termini omnes destruantur, quorum signa diversa sunt a signo primi seu altissimi termini, præter ultimum. Et numerus ille erit omni affirmativa radice major, qui in terminis prodeuntibus scriptus pro radice, efficit eorum, qui singulis vicibus per multiplicationem producebantur, aggregatum ejusdem semper esse signi cum primo seu altissimo termino æquationis.*

Ut si proponatur æquatio

$$x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30xx + 63x - 120 = 0.$$

Hanc

Hanc primum sic multiplico

$$\overset{5}{x^5} - \overset{4}{2x^4} - \overset{3}{10x^3} + \overset{2}{30xx} + \overset{1}{63x} - \overset{0}{120}.$$

Dein terminos prodeuntes, divisos per x, rursum multiplico sic

$$\overset{4}{5x^4} - \overset{3}{8x^3} - \overset{2}{30xx} + \overset{1}{60x} + \overset{0}{63},$$

& terminos prodeuntes rursum dividendo per x, prodeunt

$$20x^3 - 24xx - 60x + 60,$$

quos minuendi gratia divido per maximum divisorem 4 fiunt

$$5x^3 - 6xx - 15x + 15.$$

Hi itidem multiplicati per progressionem 3.2.1.0, & divisi per x, fiunt

$$15xx - 12x - 15,$$

& rursum divisi per 3 fiunt

$$5xx - 4x - 5.$$

Et hi multiplicati per progressionem 2. 1. 0, & divisi per $2x$ fiunt, $5x - 2$. Jam, cum terminus æquationis altissimus x^5 affirmativus sit, tento quinam numerus scriptus in his productis pro x, efficiet ea omnia affirmativa esse. Et quidem tentando 1, fit $5x - 2 = 3$ affirmativum; sed $5xx - 4x - 5$, fit -4 negativum. Quare limes erit major quam 1. Tento itaque numerum aliquem majorem, puta 2. Et in singulis substituendo 2 pro x, evadunt

$$5x - 2 = 8$$
$$5xx - 4x - 5 = 7$$
$$5x^3 - 6xx - 15x + 15 = 1$$
$$5x^4 - 8x^3 - 30xx + 60x + 63 = 79$$
$$x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30xx + 63x - 120 = 46.$$

Quare, cum numeri prodeuntes 8. 7. 1. 79. 46, sint omnes affirmativi, erit numerus 2 major quam radicum affirmativarum maxima. Similiter si limitem negativarum radicum invenire vellem, tento numeros negativos. Vel, quod perinde est, muto signa terminorum alternorum & tento affirmativos. Mutatis autem terminorum alternorum signis, quantitates, in quibus numeri substituendi sunt, fient

$$5x + 2$$
$$5xx + 4x - 5$$
$$5x^3 + 6xx - 15x - 15$$
$$5x^4 + 8x^3 - 30xx - 60x + 63$$
$$x^5 + 2x^4 - 10x^3 - 30xx + 63x + 120.$$

Ex his ſeligo quantitatem aliquam, ubi termini negativi maxime prævalere videntur; puta $5x^4 + 8x^3 - 30xx - 60x + 63$, & hic ſubſtituendo pro x numeros 1 & 2 prodeunt numeri negativi -14 & -33. Unde limes erit major quam -2. Subſtituendo autem numerum 3 prodit numerus affirmativus 234. Et ſimiliter in ceteris quantitatibus ſubſtituendo numerum 3 pro x, prodit ſemper numerus affirmativus. Id quod ex inſpectione ſola colligere licet. Quare numerus -3 tranſcendit omnes radices negativas. Atque ita habentur limites, 2 & -3, inter quos radices omnes conſiſtunt.

VIII. Horum vero limitum inventio uſui eſt tum in reductione æquationum per radices rationales, tum in extractione radicum ſurdarum ex ipſis; ne forte radicem extra hos limites aliquando quæramus. Sic in æquatione noviſſima ſi radices rationales, ſiquas forte habeat, invenire vellem; ex ſuperioribus certum eſt has non alias eſſe poſſe quam diviſores ultimi termini æquationis, qui hic eſt 120. Proin tentando omnes ejus diviſores, ſi nullus earum ſcriptus in æquatione pro radice x, efficeret omnes terminos evaneſcere; certum eſt æquationem non admittere radicem niſi quæ ſit ſurda. At ultimi termini 120, diviſores permulti ſunt, nimirum 1. $-$ 1. 2. $-$ 2. 3. $-$ 3. 4. $-$ 4. 5. $-$ 5. 6. $-$ 6. 8. $-$ 8. 10. $-$ 10. 12. $-$ 12. 15. $-$ 15. 20. $-$ 20. 24. $-$ 24. 30. $-$ 30. 40. $-$ 40. 60. $-$ 60. 120. & $-$ 120. Et hos omnes diviſores tentare, tædio eſſet. Cognito autem quod radices inter limites 2 & -3 conſiſtunt, liberamur a tanto labore. Jam enim non opus erit diviſores tentare niſi qui ſunt inter hos limites, nimirum diviſores 1, -2, & 2. Nam ſi horum nullus radix eſt, certum eſt æquationem non habere radicem niſi quæ ſit ſurda.

COM-

COMMENTARIUS

AD

CAPUT IV.

1. Omnis quantitas, infra quam continentur radices æquationis, dicitur *limes æquationis*. Igitur

2. Quantitas, quæ superat maximam æquationis radicem, est æquationis limes, & vocabitur *limes maximus*.

3. Quantitas, quam superat minima radix æquationis, est pariter ejus limes, & dicetur *limes minimus*.

Radices hic intelligo *positivas*. Pro *negativis* sufficit mutare negativas in positivas, & contra, ut tradidit Auctor N°. I. Cap. III. pag. 49. hujus, & nos demonstravimus N : 8... 13. pag. 58...60. hujus.

4. Duæ quantitates, quarum altera major est, altera vero minor quam eadem radix æquationis, dicuntur *limites radicum*; & quidem limes *major*, quantitas radice major, limes *minor* quantitas radice minor.

5. Limites tum æquationis (N°. 1.) tum radicum (N°. 4.) eo meliores sunt, quo propius accedunt ad radicem quam limitant.

Auctor variis modis determinat limitem maximum a N°. I. ad totum VI. hujus; deinde per reliquum Caput hoc quærit limites tum maximum tum minimum. Hæc explicabimus ac demonstrabimus, & nonnulla addemus.

6. Seu radices sint positivæ, seu negativæ, illarum potestates pares sunt positivæ. Harum potestatum summa superat eandem potestatem maximæ radicis. Ergo radix hujus summæ, denominata ab exponente potestatum, superat maximam radicem, & est æquationis limes maximus. (N°. 2). Sic

$$\pm\alpha;\ \pm\beta;\ \pm\gamma;\ \pm\delta;\ \pm\epsilon;\ \&c.$$

evectæ ad potestatem, cujus exponens est par $= 2n$, & in unam summam collectæ, eam dant positivam, nempe

$$+\alpha^{2n}+\beta^{2n}+\gamma^{2n}+\delta^{2n}+\epsilon^{2n}+\&c. = L$$

7. Hæc summa superat ipsam α^{2n}, etiamsi sit α radicum longe maxima. Ergo $L^{\frac{1}{2n}}$ est major quam radix maxima α, atque ideo limes maximus; quod tradit Auctor N°. I. hujus, pro quadratis, & N°. II. pro paribus potestatibus altiorum graduum.

8. Quod autem obſervat noſter in hujus Capitis initio, limites maximos hoc pacto determinatos locum habere quando radices omnes ſunt reales, non vero quando aliquæ ſunt imaginariæ, facile conſtat. Nulla enim, neque per approximationem, haberi poteſt radix quantitatis imaginariæ; ſed, ſaltem veræ proxima radix obtinetur quantitatis ſurdæ realis. Hic autem limites determinantur in numeris rationalibus.

Sed neque in ſurdis determinari poſſunt pro imaginariis. Sit enim Factor, $x \pm a + \alpha\sqrt{-1} = 0$; alter aderit $x \pm a - \alpha\sqrt{-} = 0$ (Comm. ad Cap. II. N°. 45. pag. 19. hujus.). Eſt autem ex formula binomiali

$$(a+\alpha\sqrt{-1})^{2n} = a^{2n} + 2na^{2n-1}\alpha\sqrt{-1} - \frac{2n.2n-1}{2} a^{2n-2}\alpha^2 - \frac{2n.2n-1.2n-2}{2.3}$$

$$a^{2n-3}.\alpha^3\sqrt{-1} + \frac{2n.2n-1.2n-2.2n-3}{2.3.4} a^{2n-4}\alpha^4 +$$

$$\frac{2n.2n-1.2n-2.2n-3.2n-4}{2.3.4.5} a^{2n-5}\alpha^5\sqrt{-1}.\ \&c.$$

Sed

$$(a-\alpha\sqrt{-1})^{2n} = a^{2n} - 2na^{2n-1}\alpha\sqrt{-1} - \frac{2n.2n-1}{2} a^{2n-2}\alpha^2 +$$

$$\frac{2n.2n-1.2n-2}{2.3} a^{2n-3}\alpha^3\sqrt{-1} + \frac{2n.2n-1.2n-2.2n-3}{2.3.4} a^{2n-4}\alpha^4 -$$

$$\frac{2n.2n-1.2n-2.2n-3.2n-4}{2.3.4.5} a^{2n-5}\alpha^5\sqrt{-1}\ \&c.$$

Erit harum ſumma

$$2a^{2n} - 2n.2n-1a^{2n-2}\alpha^2 + \frac{2n.2n-1.2n-2.2n-3}{3.4} a^{2n-4}\alpha - \&c.$$

atque huic omnino ſimilis erit ſumma poteſtatum e reliquis Factoribus imaginariis. Sit ergo ſumma tota = L, ut N°. 6. hujus. Hæc aut erit poſitiva, aut negativa.

9. Si eſt poſitiva, ejus radix $2n..ma$, extracta in numeris proximis, etiamſi forte accedat ad maximam radicis partem rationalem a, non indicabit partem imaginariam $\alpha\sqrt{-1}$.

10. Si vero eſt negativa, ejus radix par eſt imaginaria, & quamvis forte accedat ad partem imaginariam, nihil docebit de parte reali.

Sit,

Sit, ex. gr., æquatio quatuor dimensionum

$$x^4 - 14x^3 + 83x^2 - 214x + 252 = 0$$

orta e Factoribus imaginariis

$$x - 2 + \sqrt{-3} = 0 \qquad x - 2 - \sqrt{-3} = 0$$

$$x - 5 + \sqrt{-11} = 0 \qquad x - 5 - \sqrt{-11} = 0$$

Hæc dat summam quadratorum e radicibus omnibus $= 30$, cujus numeri quadrata radix est major quam $5\frac{1}{2}$ & minor quam $5\frac{2}{3}$. Utraque superat maximam partem realem 5, sed non indicat partem imaginariam. Summa quartarum potestatum est negativa $= -1902$; hujus quarta radix est $6\frac{2}{3}$ circiter, qui numerus non accedit ad partem realem. Ejusdem numeri sunt Factores $2 \cdot 3 \cdot 317$. Si ponas $-1902 = 951 \cdot -2$, erit radix quarta fere $5\frac{2}{3}\sqrt[4]{-2}$. Si $= 634 \cdot -3$, radix quarta, circiter $5\sqrt[4]{-3}$; & nunquam accedes ad radicum partem imaginariam.

Si vero foret æquatio

$$x^4 - 14x^3 + 55x^2 - 66x + 14 = 0$$

orta e Factoribos realibus

$$x - 2 + \sqrt{3} = 0 \qquad x - 2 - \sqrt{3} = 0$$

$$x - 5 + \sqrt{11} = 0 \qquad x - 5 - \sqrt{11} = 0$$

Summa quadratorum e radicibus omnibus esset 86, cujus radix quadrata paulo minor est quam $9\frac{5}{18}$, quæ major est quam $5 + \sqrt{11}$, cum $\sqrt{11}$ sit minor quam 4. Sed summa quartarum potestatum est 4986, cujus radix quarta est $8\frac{445}{1024}$, circiter, propius accedens ad $5 + \sqrt{11}$.

11. Obiter ostensum est fieri posse, ut, quando adsunt radices imaginariæ, summa potestatum parium sit negativa, quod patet ex N°. 9. hujus, quia quantitates negativæ possunt superare positivas, & exemplo dispicitur in N°. 10. Quare *si qua summa potestatum parium sit negativa, æquatio habet radices imaginarias.*

12. Nunc demonstranda est propositio N°. II. hujus, quæ huc recidit: Sint summæ potestatum e radicibus positive sumptarum

$$L = \alpha^m + \beta^m + \gamma^m + \delta^m + \epsilon^m + \&c.$$

$$P = \alpha^{m+n} + \beta^{m+n} + \gamma^{m+n} + \delta^{m+n} + \epsilon^{m+n} + \&c.$$

Dico esse $L^{\frac{1}{m}}$ majorem quam $P^{\frac{1}{m+n}}$.

Ponantur enim radices ordine decrescere, ita ut sit α maxima omnium, β maxima reliquarum, & sic de ceteris.

Est tam $L^{\frac{1}{m}}$ quam $P^{\frac{1}{m+n}}$ major quam α, (N°. 7. hujus pag. 87.). Sit ergo

$$L^{\frac{1}{m}} = \alpha + x \ \& \ P^{\frac{1}{m+n}} = \alpha + y$$

Hinc, evehendo ad potestates respondentes,

$$L = \alpha^m + m\alpha^{m-1} x + \frac{m.m-1}{2} \alpha^{m-2} x^2 + \frac{m.m-1.m-2}{2.3} \alpha^{m-3} x^3 + \&c. =$$

$$\alpha^m + \beta^m + \gamma^m + \delta^m + \epsilon^m + \&c.$$

vel, demendo hinc inde α^m, & residuum ducendo in α^n,

$$m\alpha^{m+n-1} x + \frac{m.m-1}{2} \alpha^{m+n-2} x^2 + \frac{m.m-1.m-2}{2.3} \alpha^{m+n-3} x^3 + \&c. =$$

$$\alpha^n(\beta^m + \gamma^m + \delta^m + \epsilon^m + \&c.).$$

Pariter, erit

$$P = \alpha^{m+n} + (m+n)\alpha^{m+n-1} y + \frac{m+n.m+n-1}{2} \alpha^{m+n-2} y^2 +$$

$$\frac{m+n.m+n-1.m+n-2}{2.3} \alpha^{m+n-3} y^3 + \&c. =$$

$$\alpha^{m+n} + \beta^{m+n} + \gamma^{m+n} + \delta^{m+n} + \epsilon^{m+n} + \&c.$$

Quare, auferendo utrinque α^{m+n}, manebit

m+n

$$(m+n)\alpha^{m+n-1}y + \frac{m+n.m+n-1}{2}\alpha^{m+n-2}y^2 +$$

$$\frac{m+n.m+n-1.m+n-2}{2.3}\alpha^{m+n-3}y^3 + \&c.$$

$$= \beta^{m+n} + \gamma^{m+n} + \delta^{m+n} + \epsilon^{m+n} + \&c.$$

14. Est autem

$\alpha^n\beta^m$ ad β^{m+n} ut α^n ad β^n, & $\alpha^n\gamma^m$ ad γ^{m+n} ut α^n ad γ^n,

& sic de reliquis;

atqui α^n major est quam β^n; quam γ^n; quam &c; quoniam α major est quam singulæ reliquæ. Ergo

$\alpha^n(\beta^m + \gamma^m + \delta^m + \epsilon^m + \&c.)$ major est quam $\beta^{m+n} + \gamma^{m+n} + \delta^{m+n} + \&c.$

id est

$$m\alpha^{m+n-1}x + \frac{m.m-1}{2}\alpha^{m+n-2}x^2 + \frac{m.m-1.-m-2}{2.3}\alpha^{m+n-3}x^3 + \&c.$$

major est quam

$$(m+n)\alpha^{m+n-1}y + \frac{m+n.m+n-1}{2}\alpha^{m+n-2}y^2 +$$

$$\frac{m+n.m+n-1.m+n-2}{2.3}\alpha^{m+n-3}y^3 + \&c.$$

15. Sed in singulis terminis respondentibus sunt æquales

$$\alpha^{m+n-1};\ \alpha^{m+n-2};\ \alpha^{m+n-3};\ \alpha^{m+n-4};\ \&c.$$

coefficientes vero primæ quantitatis

$$m;\ \frac{m.m-1}{2};\ \frac{m.m-1.m-2}{2.3};\ \frac{m.m-1.m-2.m-3}{2.3.4}\ \&c.$$

ordine minores sunt quam coefficientes secundæ

$$m+n;\ \frac{m+n\,.\,m+n-1}{2};\ \frac{m+n\,.\,m+n-1\,.\,m+n-2}{2\,.\,3};\ \&c.$$

Quare est x major quam y; nam si esset $x = y$; atque ideo potestates ipsius x æquales respondentibus potestatibus ipsius y, (& fortius si x esset minor quam y), singuli termini summæ prioris essent minores quam singuli termini respondentes summæ posterioris, & summa prima minor quam secunda, quod est contra N.um 14. hujus.

16. Hæc vera essent si prior summa tot haberet terminos, quot secunda. Sed prior habet terminorum numerum $m+1$, minorem quam $m+n+1$, qui est numerus terminorum secundæ; & tamen prior summa est major quam secunda. Ergo fortius x major est quam y.

17. Cum igitur ad obtinendum $L^{\frac{1}{m}}$, ipsi α addita sint major quantitas x, & ad obtinendum $P^{\frac{1}{m+n}}$, eidem α addita sit minor quantitas y, patet propositum.

18. Quando m & $m+n$ sunt numeri pares, positivæ sunt potestates radicum tum positivarum tum negativarum, & contra. Ergo hoc pacto obtinetur limes maximus *quantitatis*, non *qualitatis*, vel radix, cujus habetur limes, esse potest tum negativa, tum positiva.

19. In genere, factum LP est dimensionum numero $2m+n$. Sit n numerus par $2r$, & summa potestatum $m+r$ e radicibus, sit N, vel ponatur

$$N = \alpha^{m+r} + \beta^{m+r} + \gamma^{m+r} + \delta^{m+r} + \varepsilon^{m+r} + \&c.$$

Dico factum LP & quadratum NN habere communes potestates $2m+2r$ e singulis radicibus; has esse positivas, seu radices omnes sint positivæ, seu omnes negativæ, seu tandem aliquæ sint positivæ aliquæ negativæ, nempe semper tum in LP, tum in NN, esse

$$\alpha^{2m+2r} + \beta^{2m+2r} + \gamma^{2m+2r} + \delta^{2m+2r} + \varepsilon^{2m+2r} + \&c.$$

Sed in facto LP esse facta e duabus litteris diversis, quot esse possunt; hæc ita jungi posse bina, ut Factor qui in uno termino simplici habet exponentem m, in altero habeat exponentem $m+2r$; idest esse

$$\alpha^{m}\beta^{m+2r} + \alpha^{m+2r}\beta^{m};\ \alpha^{m}\gamma^{m+2r} + \alpha^{m+2r}\gamma^{m};\ \&c.$$

$$\beta^{m}\gamma^{m+2r} + \beta^{m+2r}\gamma^{m};\ \beta^{m}\delta^{m+2r} + \beta^{m+2r}\delta^{m};\ \&c.$$

$$\&c.$$

At in NN, pro his summis duorum factorum, esse totidem facta dupla e duabus litteris diversis eodem exponente $m+r$ præditis, vel

$$2\alpha^{m+r}\beta^{m+r};\ 2\alpha^{m+r}\gamma^{m+r},\ 2\alpha^{m+r}\delta^{m+r};\ \&c.$$

$$2\beta^{m+r}\gamma^{m+r};\ 2\beta^{m+r}\delta^{m+r};\ 2\beta^{m+r}\epsilon^{m+r};\ \&c.$$

&c.

Singula bina facta ex LP habere eadem signa ac dupla facta respondentia ex N, si eædem litteræ ponantur prædītæ iisdem signis in L; N; P; & singulas priores summas duorum factorum esse majores quam dupla facta respondentia posteriora; vel esse

$$\alpha^{m}\beta^{m+2r}+\alpha^{m+2r}\beta^{m} \text{ majorem quam } 2\alpha^{m+r}\beta^{m+r}$$

$$\alpha^{m}\gamma^{m+2r}+\alpha^{m+2r}\gamma^{m} \text{ majorem quam } 2\alpha^{m+r}\gamma^{m+r}$$

$$\beta^{m}\gamma^{m+2r}+\beta^{m+2r}\gamma^{m} \text{ majorem quam } 2\beta^{m+r}\gamma^{m+r}$$

&c.

20. Sit enim p radicum numerus; erit pariter p numerus terminorum simplicium constituentium summas L; N; P. Erunt ergo in LP facta

$$\alpha^{m}.\alpha^{m+2r}=\alpha^{2m+2r};\ \beta^{m}.\beta^{m+2r}=\beta^{2m+2r};\ \gamma^{m}.\gamma^{m+2r}=\gamma^{2m+2r};\ \&c.$$

ad numerum p. Et in NN erunt earundem litterarum exponente $m+r$ præditarum secundæ potestates

$$(\alpha^{m+r})^{2}=\alpha^{2m+2r};\ (\beta^{m+r})^{2}=\beta^{2m+2r};\ (\gamma^{m+r})^{2}=\gamma^{2m+2r};\ \&c.$$

pariter ad numerum p. Ergo factum LP, & quadratum NN communes habebunt terminos

$$\alpha^{2m+2r};\ \beta^{2m+2r};\ \gamma^{2m+2r};\ \delta^{2m+2r};\ \&c.$$

atque hi in utroque erunt positivi, cum $\pm\alpha^{m}.\pm\alpha^{m+2r}=+\alpha^{2m+2r}=\pm(\alpha^{m+r})^{2}$ &c. Quod erat primum.

21. Constat esse in LP facta e duabus litteris diversis, quot esse possunt

$$\begin{aligned}&\alpha^{m}(\beta^{m+2r}+\gamma^{m+2r}+\delta^{m+2r}+\epsilon^{m+2r}+\&c)+\\&\beta^{m}(\alpha^{m+2r}+\gamma^{m+2r}+\delta^{m+2r}+\epsilon^{m+2r}+\&c)+\\&\gamma^{m}(\alpha^{m+2r}+\beta^{m+2r}+\delta^{m+2r}+\epsilon^{m+2r}+\&c)+\\&\delta^{m}(\alpha^{m+2r}+\beta^{m+2r}+\gamma^{m+2r}+\epsilon^{m+2r}+\&c)+\\&\epsilon^{m}(\alpha^{m+2r}+\beta^{m+2r}+\gamma^{m+2r}+\delta^{m+2r}+\&c)+\ \&c.\end{aligned}$$

 Quod

Quod erat secundum.

22. Hic sunt facta incomplexa ad numerum $p . p - 1$, quæ bina possunt additione jungi ita ut littera, quæ in uno habet exponentem m, in altero habeat exponentem $m + 2r$, hoc pacto

e primo facto complexo $\alpha^m \beta^{m+2r} + \beta^m \alpha^{m+2r}$ e secundo

e primo $\alpha^m \gamma^{m+2r} + \gamma^m \alpha^{m+2r}$ e tertio

& sic de reliquis ita ut litera α jungatur cum omnibus aliis litteris secundum hanc legem. Item

e secundo complexo $\beta^m \gamma^{m+2r} + \gamma^m \beta^{m+2r}$ e tertio

e secundo $\beta^m \delta^{m+2r} + \delta^m \beta^{m+2r}$ e quarto. &c.

Atque idem constat de omnibus aliis litteris.

Quod erat tertium

23. Erunt igitur summæ binorum factorum hujusmodi ad numerum $\frac{p . p - 1}{2}$.

24. Sed in NN, præter quadrata, erunt dupla facta e singulis litteris in omnes sequentes, & singularum litterarum exponens est $m + r$; quemadmodum

$$2\alpha^{m+r}(\beta^{m+r} + \gamma^{m+r} + \delta^{m+r} + \varepsilon^{m+r} + \&c) +$$

$$2\beta^{m+r}(\gamma^{m+r} + \delta^{m+r} + \varepsilon^{m+r} + \&c) +$$

$$2\gamma^{m+r}(\delta^{m+r} + \varepsilon^{m+r} + \&c) +$$

$$2\delta^{m+r}(\varepsilon^{m+r} + \&c) + \&c.$$

In complexis horum Factoribus

$\beta^{m+r} + \gamma^{m+r} + \delta^{m+r} + \varepsilon^{m+r} + \&c.$ primi;

$\gamma^{m+r} + \delta^{m+r} + \varepsilon^{m+r} + \&c.$ secundi;

&c.

numerus terminorum simplicium unitate decrescit continuo, ita ut in ultimo

timo fit unus terminus simplex, cum in primo fuerit $p - 1$. Sunt ergo omnino dupla facta simplicia in NN, qualia,

$$2\alpha^{m+r}\beta^{m+r};\ 2\alpha^{m+r}\gamma^{m+r};\ \&c.\ 2\beta^{m+r}\gamma^{m+r};\ 2\beta^{m+r}\delta^{m+r};\ \&c.$$
&c. &c.

numero $\frac{p \cdot p - 1}{2}$, quot nempe erant summæ duorum factorum in LP (No. 23. hujus). Quod erat quartum.

25. Possunt ergo hæc dupla facta singula comparari cum totidem illis summis, & quidem ita ut duæ litteræ sint ubique eædem, hoc pacto,

$$\alpha^m\beta^{m+2r} + \alpha^{m+2r}\beta^m \quad \& \ 2\alpha^{m+r}\beta^{m+r}$$

$$\alpha^m\gamma^{m+2r} + \alpha^{m+2r}\gamma^m \quad \& \ 2\alpha^{m+r}\gamma^{m+r}\ \&c.$$

Item

$$\beta^m\gamma^{m+2r} + \beta^{m+2r}\gamma^m \quad \& \ 2\beta^{m+r}\gamma^{m+r}$$

$$\beta^m\delta^{m+2r} + \beta^{m+2r}\delta^m \quad \& \ 2\beta^{m+r}\delta^{m+r}\ \&c.$$
&c. &c.

26. Quando igitur eædem litteræ, ex. gr. α & β, habent eadem signa in factis

$$\alpha^m\beta^{m+r};\ \alpha^{m+r}\beta^m;\ \alpha^{m+r}\beta^{m+r},$$

hæc facta habebunt eadem signa; secus vero contraria.

27. Ponuntur autem eædem litteræ præditæ iisdem signis in L; N; ac P; quare si in P fuerit α^{m+r} positiva, & β^{m+r} negativa, positivæ erunt α^m in L & α^{m+2r} in P; ac negativæ β^{m+r} in P ac β^m in L. Ergo facta

$$+\alpha^m \cdot -\beta^{m+2r} + \alpha^{m+2r} \cdot -\beta^m \quad \text{in LP}$$

ac

$$+2\alpha^{m+r} \cdot -\beta^{m+r} \quad \text{in NN}$$

erunt negativa. Idem constat de reliquis, & melius si potestates omnes fuerint positivæ, aut omnes negativæ.

Hæc autem erant quinto demonstranda.

28. Cum autem sit

$\alpha^m \beta^{m+2r}$ ad $\alpha^{m+2r} \beta^{m+r}$ ut β^r ad α^r ut $\alpha^{m+r} \beta^{m+r}$ ad $\alpha^{m+2r} \beta^m$

& ſic de reliquis; quandoquidem in his comparationibus exponentes ejusdem litteræ

$$m;\ m+r;\ m+2r$$

ſunt ſemper æquidifferentes. Ergo (Eucl. prop. 25. lib. V.)

$$\alpha^m \beta^{m+2r} + \alpha^{m+2r} \beta^m \text{ major eſt quam } 2\alpha^{m+r} \beta^{m+r}$$

& ſic de reliquis omnibus. Ergo

29. Quando omnes termini poſitivi ſunt tum in LP, tum in NN, eidem poteſtatum ſummæ (N°. 20. hujus pag. 93.) major quantitas addita eſt ad complendum factum LP, quam ad complendum NN.

30. Tunc igitur $\sqrt{LP}$ major eſt quam N. Et quando m ac $m+2r$ ſunt numeri pares, eſt $\sqrt{LP}$ major quam ſumma poteſtatum $m+r$ e radicibus poſitive ſumptarum.

31. Sit nunc $m = 2$, & $r = 1$, erit $m+r = 3$, ac $m+2r = 4$. Quare $\sqrt{LP}$, *media proportionalis inter ſummam quadratorum, & ſummam quadrato-quadratorum radicum, major erit quam ſumma cuborum radicum, cum ſignis affirmativis connexorum*; quod primo loco docet Auctor N°. III. hujus capitis.

32. Si radices omnes æquationis eſſent æquales, quælibet ſumma duorum factorum in LP æqualis eſſet duplo facto reſpondente in NN. Eſſet enim tunc

$$\alpha^m \beta^{m+2r} = \alpha^m . \beta^{m+2r} = \alpha^{2m+2r} = \alpha^{m+2r} \beta^m = \alpha^{m+2r} . \alpha^m$$

&

$$\alpha^m \beta^{m+2r} + \alpha^{m+2r} \beta^m = 2\alpha^{2m+2r} = 2\alpha^{m+r} \beta^{m+r} = 2\alpha^{m+r} . \alpha^{m+r}.$$

& ſic de reliquis. Tunc ergo $\sqrt{LP}$ eſſet ſumma poteſtatum $m+r$ e radicibus cum ſignis ſuis connexarum. Igitur, quo minus inter ſe differunt æquationis radices, eo minus $\sqrt{LP}$ differt a ſumma poteſtatum $m+r$ radicibus cum ſignis affirmativis connexarum.

Ita, quando radices ſunt 1; 2; 3; —4, ſumma cuborum ſub ſignis affirmativis connexorum eſt 100, & $\sqrt{LP}$ eſt minor quam 104; qui duo numeri (quod maximum) quaternario differunt. Quando radices ſunt 1; 2; 3; —5; ſumma cuborum cum ſignis affirmativis connexorum eſt 161, & $\sqrt{LP}$ major quam 167, qui duo numeri, ſaltem, ſenario differunt. Tandem quando radices ſunt 1; 3; 7; — 11; ſumma cuborum cum ſignis affirmativis connexorum eſt 1702, & $\sqrt{LP}$ major quam 1755; & hi duo numeri differunt, ſaltem, 53.

33.

33. Ex eo quod

$$\pm \alpha^{m} \beta^{m+2r} \pm \alpha^{m+2r} \beta^{m} \text{ atque } \pm \alpha^{m+r} \beta^{m+r}$$

ſint æquales quando $\alpha = \beta$, ſecus inæquales, & quidem ita ut prior ſumma ſuperet alteram, confecimus eo magis has quantitates differre, quo magis differunt α & β. Hoc etiamſi per ſe conſtat, tamen facile demonſtratur. Eſt enim

$$\pm \alpha^{m} \beta^{m+2r} \pm \alpha^{m+2r} \beta = \pm \alpha^{m} \beta^{m} (\beta^{2r} + \alpha^{2r})$$

&

$$\pm 2\alpha^{m+r} \beta^{m+r} = \pm \alpha^{m} \beta^{m} . 2\alpha^{r} \beta^{r}.$$

ſunt ergo hæ duæ quantitates in ratione Factorum inæqualium.

Ponatur $\alpha^{r} = x$; $\beta^{r} = y$. Erit

$$\alpha^{2r} + \beta^{2r} = x^{2} + y^{2} \text{ atque } 2\alpha^{r} \beta^{r} = 2xy.$$

Sit nunc major quantitas $x = y + z$, erit

$$x^{2} + y^{2} = 2y^{2} + 2yz + z^{2} \; \& \; 2xy = 2y^{2} + 2yz.$$

Hæ duæ quantitates differunt quantitate z^{2}, & quo major fuerit z, eo major erit propoſitarum differentia $\alpha^{m} \beta^{m} z^{2}$.

34. Quando ſunt in æquatione radices poſitivæ ac negativæ, & $m + r$ eſt numerus impar, N conſtat e poteſtatibus poſitivis & negativis, quarum communis exponens eſt $m + r$. Sit ergo

Summa poteſtatum poſitivarum $= a$

Summa poteſtatum negativarum $= b$

Erit

N $= a - b$ & $\sqrt{}$LP major quam $a + b$

(N°. 30. hujus). Igitur

35. Addendo æqualia inæqualibus

N + $\sqrt{}$LP major quam $2a$;

atque ideo

$$\frac{N + \surd LP}{2} \text{ major quam } a.$$

36. Hinc, quando $m = 2$ & $r = 1$, *hujus mediæ proportionalis & summæ cuborum sub propriis signis semisumma erit major quam summa cuborum radicum affirmativarum*, quod secundo loco docet noster eodem N°. III. hujus capitis.

37. Pariter, si in N°. 34. hujus, demantur æqualia ex inæqualibus, fiet

$$\surd LP - N \text{ major quam } 2b; \ \& \ \frac{\surd LP - N}{2} \text{ major quam } b.$$

38. Ideo, quando $m = 2$ & $r = 1$, earundem *semidifferentia major quam summa cuborum radicum negativarum*, quod tertio loco asserit Auctor ibidem.

39. Ex N°. 35. & 38. constat quod *maxima radicum affirmativarum minor est quam radix cubica illius semisummæ; & maxima radicum negativarum minor quam radix cubica illius semidifferentiæ*; ut noster N°. IV. hujus.

40. Si, manente $r = 1$; ponatur, ordine,

$$m = 4; \ m = 6; \ m = 8; \ m = 10. \ \&c.$$

& fit, ordine,

Summa potestatum positivarum, quintarum, septimarum, nonarum, undecimarum &c. $= a$.

Summa potestatum negativarum pariter quintarum, septimarum, nonarum, undecimarum &c. $= b$.

Erit semper ipsius a radix quinta, septima, nona, undecima, major quam maxima radicum affirmativarum; & ipsius b radix eadem major quam maxima radicum negativarum (N°. 39. hujus).

Sed, quo magis crescit exponens potestatum, e quarum summa extrahitur radix denominata ab exponente potestatum, eo minor fit radix illa (N°. 12. pag. 89. hujus). Ergo propius accedetur ad maximam radicum tum affirmativarum tum negativarum, quo major assumetur exponens; id est sequendo præceptum Auctoris N°. V. hujus capitis.

41. Quando una est radix positiva, vel, secundum N.^{um} 34. hujus,

$$a = \alpha^{m+r}; \text{ est } \frac{\surd LP + N}{2} \text{ major quam } \alpha^{m+r} \text{ (N°. 35. hujus).}$$

$$\& \text{ ipsius } \frac{\surd LP + N}{2} \text{ radix } m+r, \text{ major quam } \alpha.$$

42. Quando autem plures sunt radices affirmativæ, aut

$$a = \alpha^{m+r} + \beta^{m+r} + \&c, \ \& \ \frac{\surd LP + N}{2} \text{ major quam } \alpha^{m+r} + \beta^{m+r} + \&c;$$

at-

atque ipsius $\frac{\sqrt{LP}+N}{2}$ radix $m+r$, major quam

$$(\alpha^{m+r}+\beta^{m+r}+\&c.)^{\frac{1}{m+r}}$$, quæ rursus major quam α.

(N°. 7. pag. 87. hujus), sed multo minor quam $\alpha+\beta+\&c$, ut constat e theoremate binomiali. Igitur quando una est radix positiva, magis ad eam acceditur hac methodo, quam quando sunt plures positivæ.

43. Idem intelligitur de radicibus negativis; ita ut demonstratione constet hac methodo propius accedi ad radicem, *quando unica est radix negativa*, *vel unica affirmativa*, quam quando plures sunt tum negativæ tum affirmativæ; *quam* vero *prope* accedatur, *exemplo videre est*, ut ait Auctor in fine Ni. IV. hujus Capitis.

44. Hac methodo semper habetur limes *major* quam maxima radix æquationis. Est & methodus inveniendi limitem maxima radice minorem. En eam, qualem tradit MAC-LAURINUS in *Algebræ* suæ anglice scriptæ Parte secunda, Cap. 5. in fine. Sit æquatio

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}+Dx^{n-4}....\&c.=0;$$

quære

$$\frac{BB-2AC+2D}{n},$$

hujus radix quarta erit paulo minor quam maxima radix æquationis.

Ex. gr. sit æquatio

$$x^4-x^3-19x^2+49x-30=0$$

cujus radices sunt 1; 2; 3; —5; harum maxima est 3. Jam BB $=361$; 2AC $=98$; 2D $=60$

quare

$\frac{BB-2AC+2D}{4}=\frac{323}{4}=80\frac{3}{4}$, cujus radix quarta vix minor est quam 3, quandoquidem ipsius 3 quarta potestas est 81.

45. Sic autem demonstrari potest hoc theorema, quod hactenus inobservatum affert Auctor, sed sine demonstratione. Coefficiens B secundi termini complectitur facta omnia e binis radicibus. Quare BB continebit. *Primo* quadrata omnium factorum e binis radicibus

$$a^2b^2;\ a^2c^2;\ a^2d^2\ \&c;\ b^2c^2;\ b^2d^2\ \&c;\ c^2d^2;\ c^2e^2\ \&c.$$

N 2 Si,

Si, ex. gr., quatuor tantum ponantur radices

$a; b; c; d;$

ita poterunt ordinari hæc quadrata

$$a^2 (b^2 + c^2 + d^2) + b^2 (c^2 + d^2) + c^2 d^2$$

Secundo bina facta e quadratis singularum in binas reliquas

$$2a^2bc; 2a^2bd; 2a^2cd \text{ \&c}; 2b^2ad; 2b^2cd; \text{ \&c.}$$

Et, manendo in hypothesi quatuor radicum, bina facta e quadratis singularum in binas reliquas, erunt

$$2a^2 (bc+bd+cd) + 2b^2 (ac+ad+cd) + 2c^2 (ab+ad+bd) + 2d^2 (ab+ac+bc)$$

Tertio bina facta e singulis quaternis. Sed singula hæc facta e quaternis conficiuntur ex factis diversis, quæ singula habent duos Factores diversos, ductis in alia facta diversa, quæ singula pariter habent duos Factores diversos. Hic ergo, (per N.um 27. Comment. ad Cap. II. hujus pag. 16,) erit $p = n = 2$, & unum idemque factum semper repetitum invenietur $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$..ies.

Hoc in nostra hypothesi erit $6abcd$.

46. Sed C est summa factorum e ternis radicibus, & A est summa singularum. Quare AC complectetur,

Primo quadrata singularum radicum ducta in binas reliquas, ut BB secundo loco; sed semel sumta in AC, & bis in 2AC.

Secundo facta e singulis quaternis; ut BB tertio loco. Hic autem est $p = 1$; & $n = 3$; quare unum idemque factum repetitum invenietur semper $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 3} = 4$..ies in AC; & octies in 2AC.

47. Igitur BB — 2AC continebit excessum omnium factorum e quadratis binarum radicum, quæ nempe continet BB primo loco, supra bis summam factorum e quaternis; id est, in exemplo assumto

$$a^2 (b^2 + c^2 + d^2) + b^2 (c^2 + d^2) + c^2 d^2 - 2abcd$$

Sed hæc summa restituitur addendo 2D, id est in exemplo $2abcd$. Igitur omnino est BB — 2AC + 2D summa omnium factorum e quadratis binarum radicum.

48. Atqui hæc summa continet factum ex quadrato maximæ radicis in summam quadratorum e reliquis; factum ex quadrato secundæ radicis in summam quadratorum e reliquis, & sic semper; ut per se constat, & in exemplo dispicitur.

Di-

Dicatur hæc summa $= \beta$, & summa quartarum poteſtatum e ſingulis radicibus $= \alpha$;

In noſtro exemplo eſt

$$\alpha = a^4 + b + c^4 + d^4.$$

Harum quartarum poteſtatum, ut & radicum, numerus eſt n. Ergo (Vide Addit. pag. 62. Lemm. IV.)

β minor eſt quam $\frac{n-1}{2}\alpha$, eſt autem $\frac{n-1}{2}\alpha$ minor quam na^4; ponitur enim a radix maxima. Quare fortius

$$\frac{\beta}{n} = \frac{BB - 2AC + 2D}{n} \text{ minor eſt quam } a^4.$$

49. Habetur ergo duplex limes, *major* per regulam NEWTONI, *minor* per regulam MAC-LAURINI, inter quos conſiſtit radix maxima.

50. Circa hoc theorema MAC-LAURINI obſervandum illud exhibere quantitatem vera radice minorem. Quapropter perficeretur theorema, ſi inveniretur methodus determinandi aliam quantitatem, illa majorem quam præbet theorema, tamen vera radice minorem.

51. Sed, ſi pro coefficiente tertii termini, quadrandus ſumeretur coefficiens aliquis ſequens, ex. gr. C quarti termini, & adhiberentur correctiones neceſſariæ, ut manerent ſecundæ poteſtates inter ſe multiplicatæ,

$$a^2b^2\ (c^2 + d^2 + e^2 + \&c) + a^2c^2\ (d^2 + e^2 + \&c) + \&c. +$$
$$b^2c^2\ (d^2 + e^2) + b^2d^2\ (e^2 + \&c) + \&c.$$

quoniam eſt a^2b^2 minor quam a^4, quia ponitur a radix maxima, & idem verum eſt de ceteris, adhuc minor eſſet limes ſic determinatus limite priore.

52. Si vero eſſet æquatio trium dimenſionum; tunc $D = 0$, & limes determinaretur per

$$\frac{BB - 2AC}{2}$$

53. Sit nunc, ex hypotheſi N*i*. VI. hujus, radicum ſumma

$$+ \alpha + \beta - \gamma - \delta - \varepsilon - \&c.$$

ita ut radices duæ α & β, ſint poſitivæ, reliquæ negativæ. Erit ſumma quadratorum

$$+ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 + \&c = K$$

 ſum-

summa cuborum

$$+\alpha^3+\beta^3-\gamma^3-\delta^3-\epsilon^3-\&c = L$$

summa quartarum potestatum

$$+\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+\delta^4+\epsilon^4+\&c. = M$$

Hæ autem summæ potestatum inveniuntur per N.um VIII. Cap. III. pag. 55. hujus, & per N.os 50. &c. pag. 70. &c. hujus. Hinc $\sqrt{KM}$ paulo major quam $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3+\epsilon^3+\&c.$ (per N.um 30. pag. 96. hujus).

atque ideo

$\frac{\sqrt{KM}+L}{2}$ paulo major quam $\alpha^3+\beta^3$ (N°. 42. pag. 98. hujus). atque inventa est, *quam proxime*, summa cuborum e duabus radicibus positivis.

54. Pariter, erit summa quintarum potestatum

$$+\alpha^5+\beta^5-\gamma^5-\delta^5-\epsilon^5-\&c = N$$

summa sextarum

$$+\alpha^6+\beta^6+\gamma^6+\delta^6+\epsilon^6+\&c = O$$

& summa septimarum

$$+\alpha^7+\beta^7-\gamma^7-\delta^7-\epsilon^7-\&c = P$$

Quapropter $\sqrt{NP}$ non multum differet ab

$$+\alpha^6+\beta^6-\gamma^6-\delta^6-\epsilon^6-\&c$$

Quare $\frac{\sqrt{NP}+O}{2}$ parum differet ab $\alpha^6+\beta^6$

&

$\frac{\sqrt{NP}-O}{2}$ parum differet ab $-\gamma^6-\delta^6-\epsilon^6-\&c.$

Nos, brevitatis gratia, ponemus æquales, negligendo differentiam. Hoc posito, est

$$(\alpha^3+\beta^3)^2 = \alpha^6+2\alpha^3\beta^3+\beta^6 = \left(\frac{\sqrt{RM}+L}{2}\right)^2$$

&

$\sqrt{NP}$

$$\sqrt{NP} + O - \left(\frac{\sqrt{RM} + L}{2}\right)^2 = 2\alpha^6 + 2\beta^6 - \alpha^6 - 2\alpha^3\beta^3 - \beta^6 = \alpha^6 - 2\alpha^3\beta^3 + \beta^6$$

cujus radix quadratica eſt $\alpha - \beta$, differentia cuborum duarum radicum poſitivarum α, & β.

Jam eſt

$(\alpha^3 + \beta^3) + (\alpha^3 - \beta^3) = 2\alpha^3$; hinc invenitur α,

ſed

$(\alpha^3 + \beta^3) - (\alpha^3 - \beta^3) = 2\beta^3$; unde invenitur β.

55. Conſtat autem ex N°. 12. pag. 89. hujus,

quod ſi pro poteſtatibus, quarum exponentes ſunt

2; 3; 4; 5; 6; 7.

ſumerentur poteſtates, quarum exponentes eſſent

4; 5; 6; 7; 8; 9; vel 6; 7; 8; 9; 10; 11 &c.

propius accederetur ad veram radicem. Hæc tradit Auctor N°. VI. Hujus. Nunc ad N^um VII.

56. Totius rei fundamenta jacta jam ſunt ab Auctore in N°. II. Cap. III. pag. 40. hujus, & a nobis in N^is 15...32. pag. 61...64. hujus. Nam ibi oſtendimus quod, ſubſtituendo in propoſita, $y + e$ pro x, ſi transformata habet omnes terminos poſitivos, eſt e major quam maxima radix poſitiva propoſitæ (N°. 25. pag. 64. hujus). Tunc enim transformata habebit omnes terminos poſitivos; atque ideo radices omnes negativas (N°. 23. pag. 13. hujus). Poſuimus autem $y + e = x$; & $y = x - e$; debet autem eſſe y quantitas negativa; quia y exponit transformatæ radices, & illæ ſunt negativæ; eſt igitur $x - e$ quantitas negativa, ac e major quam x, id eſt quam quævis radix propoſitæ. Ut ergo inveniatur *limes major quavis radice affirmativa*, ita erit in transformata quantitas e determinanda, ut omnes in transformata termini fiant *affirmativi*; id eſt *ejusdem ſigni cum altiſſimo termino æquationis* (N°. VII. in fine), qui poni ſolet affirmativus.

57. Sed quantitas e *determinanda*, quovis ſigno poteſt exponi; ergo & per x; dummodo intelligamus quod hæc littera, quæ in propoſita exponit radices æquationis, in noſtra hypotheſi exponit quantitatem e ita determinandam, ut omnes termini in transformata fiant poſitivi.

58. Atqui, hoc poſito, quod nempe x ſit idem ac e in transformata, ipſa propoſita locum tenet ultimi termini in transformata (N°. 16 pag. 61. 62. hujus). Propoſita ordinis n, ut loco citato, poſtquam ejus termini ſinguli ducti fuerunt in exponentes.

$$n;\ n-1;\ n-2,\ n-3;\ n-4;\ n-5.\ \ldots\ 0$$

&

& divisi per e, vel per x, locum tenet penultimi termini in transformata &c. (N^is 17... 20. pag. 62. 63 hujus). Igitur.

59. *Si multiplicetur æquationis terminus unusquisque per numerum dimensionum ejus* (vel per exponentem, quem habet incognita x in ipso termino multiplicato), *& dividatur factum per radicem æquationis*, (id est per ipsam incognitam x). *Dein rursus multiplicetur unusquisque terminorum prodeuntium per numerum unitate minorem quam prius* (qui erit, ut constat, exponens quem in quantitate inventa per primam operationem, habebit incognita in ipso termino multiplicato); *& factum dividatur per radicem æquationis*, ut supra. Et sic pergatur donec deveniatur ad binomium. Si hæc, inquam, fiant, invenientur transformatæ coefficientes *ab ultimo*, primus, secundus, tertius, &c..

60. His igitur peractis, supererit determinandus numerus, qui evectus ad aptam potestatem & positus pro x, & ejus potestatibus, in his coefficientibus, eos reddat omnes positivos.

61. Sed hic numerus ita determinandus est, ut sit *minimus* illorum, qui & *integri* sunt, & propositum præstant. Hoc autem efficitur facili tentamine.

62. Dixi numeros tentandos esse debere *integros*; nam proposita ponitur a fractionibus libera, & coefficiente prædita unitate, in altissimo termino. Atqui hujusmodi æquatio nullam habet radicem fractam. (N°. 76. pag. 27. hujus.). Ubi lex, quod altissimus terminus habeat coefficientem unitatem, est intelligenda; alioquin, multiplicando per fractionem, haberetur æquatio rationalis, cujus radices sunt fractæ.

63. Constat binomium, quod hoc pacto invenitur ultimo loco, esse coefficientem termini secundi, a primo, transformatæ; id est $ne \pm A$. Sed A est summa radicum, si eæ sint vel omnes positivæ vel omnes negativæ; est autem n exponens termini altissimi, atque ideo numerus radicum ipsarum. Erit ergo maxima radix major quam $\frac{A}{n}$; & fortius si adsint radices tum negativæ tum positivæ, quarum differentia est A. Quare tentandus statim est numerus proxime major quam $\frac{A}{n}$.

Sic, æquatio

$$x^4 - 26x^3 + 151x^2 - 246x + 80 = 0$$

tractata secundum Auctoris regulam, præbet

$$4x^3 - 78x^2 + 302x - 246$$

vel dividendo per 2

$$2x^3 - 39x^2 + 151x - 123$$

&

&

$$6x^2 - 78x + 231$$

ac

$$12x - 78 = 4x - 26.$$

Hic autem est $n = 4$; ac $\frac{26}{4} = 6\frac{1}{2}$; tentamen ergo incipio a 7. Hic numerus, substitutus pro x, dat, ut 8, secundo loco numeros negativos, & 9 tertio: tento 10; hinc

$$4x - 26 = 40 - 26 = 14$$

$$6x^2 - 78x + 231 = 600 - 780 + 231 = + 51$$

positivum; ut

$$2x^3 - 39x^2 + 231x - 403 = 2000 - 3900 + 2310 - 403 = + 7$$

sed ipsa æquatio dat -80; est ergo maxima radix major quam 10. Reipsa hujus æquationis radices sunt

$$11;\ 8;\ 5;\ 2;$$

Patet autem quantitatem $\frac{A}{n}$ utilem esse quando radices sunt vel omnes positivæ vel omnes negativæ, quod e signis æquationis intelligitur; & illam eo propius ad radicem accedere, quo minus ipsæ radices quantitate differunt.

64. Numerus sic inventus erit limes *major* maximæ radicis; numerus vero maximus eorum, qui dant aliquod ex factis per hanc regulam repertis, negativum, erit limes *minor* maximæ radicis.

65. Postquam hoc pacto inventus est limes m, qui superat maximam æquationis radicem, assumatur $z = m - x$, & substituendo in proposita $m - z$ hujusque potestates, pro x & ejus potestatibus, habebitur transformata, cujus omnes radices erunt affirmativæ; siquidem est m major quam x, atque ideo $m - x$, vel z, quantitas positiva; quare positivæ sunt omnes radices transformatæ, quas exponit littera z.

Sic igitur *æquatio quævis transformari potest in aliam, cujus radices omnes positivæ sint.*

66. Eadem transformatio perficietur, si *reperiatur limes* n, *qui superet maximam radicem negativam propositæ, & assumatur* $z = x + n$, *atque fiat solita substitutio.* Cum enim sit n major quam quævis radix negativa propositæ, quas exponit x; erit $x + n$ quantitas positiva, atque ideo z, vel quævis transformatæ radix, erit positiva.

Hæc omnia congruunt cum N°s. 22 ... 30. pag. 62. hujus.

67. Cum ergo nota sit facilis methodus propositam transformandi in

 aliam,

aliam, cujus radices omnes sint positivæ, atque ideo signa omnia alternantia (N^{ri} 15. & 20. pag. 61. 62. 63 hujus); has tantum æquationes considerabimus in sequentibus, si quando utile id erit ad faciliorem rerum explicationem.

68. Limes minimus pro hujusmodi æquationibus, est o, qui profecto minor est quam quævis quantitas positiva. Limes autem maximus facile invenietur methodo jam tradita. Superest ut videamus quomodo possint definiri limites ipsarum radicum.

69. Sit æquatio ordinis n, habens omnes radices positivas,

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \&c. \; ..... \pm S = o$$

in qua erit S quantitas positiva si n est numerus par; sed negativa si impar.

70 Si in hac æquatione ponatur o pro x, omnes termini evanescent, & manebit ultimus cum signo quod habet in proposita.

71. Hujus æquations radices sint

$$\omega;\ \psi;\ \chi;\ \phi\ ....\ \xi;\ \nu;\ \mu;\ \lambda\ ....\ \delta;\ \gamma;\ \delta;\ \alpha, \text{ ad numerum } n;$$

& sit quævis præcedens, a sinistra in dextram, minor quam sequens ad dextram, vel ω minor quam ψ; & ψ minor quam χ; & sic de reliquis.

Propositæ æquationis Factores ad eundem numerum n, erunt

$$x - \omega = o;\ x - \psi = o;\ x - \chi = o;\ x - \phi = o\ ...\ x - \xi = o;\ \&c.$$

72. Assumatur nunc quantitas $+\rho$, major quam ν, & minor quam μ. Erit ρ fortius major quam ξ; .. ϕ; χ & reliquæ ad sinistram, & minor quam λ; .. δ; γ; & reliquæ sequentes ad dextram. Si ρ ponatur pro x, Factor $x-\nu$ erit positivus ut & reliqui ad sinistram, & Factor $x-\mu$ negativus ut reliqui ad dextram.

Ex. gr. sit $\nu = \xi + a$; $\mu = \xi + a + b + c$; $\lambda = \xi + a + b + c + d$; & $\rho = \xi + a + b$; atque pro x in Factoribus, ponatur $\rho = \xi + a + b$; fiet Factor

$$x - \nu = x - \xi - a = \xi + a + b - \xi - a = + b$$

positivus; & fortius omnes Factores præcedentes ad sinistram, erunt positivi; nam ex eadem quantitate $\xi + a + b$, demitur quantitas continue minor quam ν. Sed Factor

$$x - \mu = x - \xi - a - b - c = \xi + a + b - \xi - a - b - c = - c$$

erit negativus; & fortius negativi fient omnes Factores sequentes ad dextram, quia ex eadem quantitate $\xi + a + b$, demitur quantitas continue major quam μ.

73. Sit nunc $n = m + p$, & sit m numerus Factorum positivorum, ac p numerus Factorum negativorum.

Factum e Factoribus positivis, quicunque sit numerus eorum, semper est positivum $= + P$.

Factum

Factum e Factoribus negativis, negativum est, si eorum numerus est *impar*, & tunc fit $= -Q$.
Idem est positivum, si Factorum numerus est *par*; & tunc $= +Q$.

Est autem

$$+P.-Q = -PQ; \quad \& +P.+Q = +PQ.$$

Et numeri vulgares alterne sunt pares & impares, vel contra. Ergo alterne facta oriunda ex his substitutionibus, erunt positiva & negativa, vel contra. Quapropter.

74. Si ϱ sit minor quam minima radicum; erit $m = 0$; & $p = n$; vel omnes Factores erunt negativi. Tunc si n est numerus impar, tum factum PQ, tum ultimus propositæ terminus S, habebunt signum $-$.

Si vero sit n numerus par, tum factum PQ, tum ultimus propositæ terminus, habebunt signum $+$.

75. Sit ϱ major quam radix minima ω, & minor quam sequens ψ; erit $m = 1$; & $p = n-1$, vel unus erit Factor positivus. Tunc, si n est numerus impar, par erit $n-1$; & factum PQ habebit signum $+$.

Si vero sit n numerus par, impar erit $n-1$; & factum PQ habebit signum $-$.

76. Sit ϱ major quam secunda radix ψ, (& fortius quam minima ω), sed minor quam sequens χ; erit $m = 2$; & $p = n-2$; vel duo erunt Factores positivi, ceteris manentibus negativis. Tunc, si n est numerus impar, impar quoque erit $n-2$, & factum PQ habebit signum $-$.

Sed si n sit numerus par, par æque erit $n-2$, & factum PQ habebit signum $+$. (Lem. XIII. pag. 85. Addit.)

Hæc, puto, sufficere possunt ad illustrandam propositionem nostram.

77. Hinc facile ad æquationes omnes extenduntur quæ diximus N^{is} 69. ...73. hujus. Sit enim $n = l + k = m + p$; & proposita habeat l radices negativas ac k radices positivas; vel proposita constet ex numero l Factorum formæ

$$x + A = 0; \; x + B = 0; \; x + C = 0; \; \&c.$$

& ex numero k Factorum formæ

$$x - R = 0; \; x - P = 0; \; x - Q = 0; \; \&c.$$

78. Factores prioris formæ, per continuam multiplicationem, conficient æquationem ordinis l, cujus omnes termini erunt positivi; igitur & ultimus S, positivus erit.

79. Factores posterioris formæ, pariter per multiplicationem continuam, conficient æquationem ordinis k, cujus termini erunt alterne positivi & negativi. Igitur ultimus ejus terminus s erit negativus si k est numerus impar, secus vero positivus, ut supra N°. 69.

80. Multiplicando æquationem N^i. 78. ordinis l per æquationem N^i. 79. or-

ordinis k conficietur æquatio ordinis $l+k=n$, in qua erunt radices tum positivæ tum negativæ, & cujus ultimus terminus $+S.\pm s=\pm S$, erit positivus, si numerus radicum negativarum est par, secus vero negativus, pariter ut supra N°. 69.

81. In hac, si ponatur o pro x, manebit dumtaxat ultimus terminus, cum signo quod habebat in proposita, ut N°. 70.

82. Si in eadem pro x ponatur $+\varrho$, seu major seu minor quam quævis radix negativa, ex illis orti Factores positivi

$$x+A=0;\ x+B=0;\ \&c\ \text{fient}\ \varrho+A=0;\ \varrho+B=0\ \&c,$$

& manebunt positivi. Hinc ergo nulla fiet mutatio in signis æquationis propositæ, neque in facto quod oritur ex hac substitutione.

83. Sed mutatio fiet, secundum observata N^{is} 72. & 73. quando pro x in æquatione proposita ponitur $+\varrho$ major quam aliqua radix positiva ν, (atque ideo quam reliquæ hac minores), & minor quam proxime major μ, & quam reliquæ hac majores.

84. Cum ergo quævis æquatio ordinis n, in qua sunt radices tum positivæ tum negativæ, considerari possit tanquam conflata ex duabus, quarum una complectitur omnes radices negativas propositæ, altera omnes radices positivas ejusdem; & cum omnis mutatio, quæ fit in proposita per substitutionem, oriatur ex æquatione habente omnes radices positivas, constat in genere, quod.

85. *Si in æquatione, cujus radices aliquæ sunt positivæ, aliquæ negativæ, pro* $+x$ *ponatur* $+\varrho$, *modo major modo minor quam aliqua propositæ radix positiva, duo quæ conficientur ex hac duplici substitutione, habebunt signa opposita.*

86. Manifesta est hujus conversa. *Si pro æquationis propositæ incognita & ejus potestatibus, substituantur ordine duæ quantitates inæquales, & duæ novæ quantitates, quæ conficiuntur ex his duabus substitutionibus, habeant signa opposita; hæ duæ quantitates, quæ substituuntur, erunt limites unius saltem radicis æquationis propositæ.*

Nam, si utraque quantitas esset minor quam radix aliqua μ, & major quam radix præcedens ν, utrumque productum haberet idem signum ut patet ex demonstratis; quia nempe idem in utroque casu esset numerus Factorum, tum positivorum, tum negativorum.

In exemplum assumamus æquationem N^{i}. 63. pag. 104. hujus

$$x^4-26x^3+231x^2-806x+880=0$$

cujus radices omnes positivæ sunt 11; 8; 5; 2.

In hac statim substituendo o pro x manet $+880$.

substituendo $+1$, qui numerus minor est minima radice 2, fit

$$1-26+231-806+880=+280.$$

Est

Eſt ergo 1 limes *minimus*. Subſtituendo $+3$, qui eſt major quam 2 & minor quam 5, fit

$$81 - 702 + 2079 - 2418 + 880 = -80$$

Si pro $+x$ ponatur $+4$, qui numerus pariter major eſt quam 2 & minor quam 5, productum pariter erit negativum, nempe

$$256 - 1664 + 3696 - 3244 + 880 = -76$$

Si vero pro x ponatur $+6$, deinde $+7$, qui numeri ſunt majores quam 2 & 5, ſed minores quam 8, prodibunt duo facta poſitiva, id eſt ex 6

$$1296 - 5616 + 8316 - 4836 + 880 = +40$$

& e 7

$$2401 - 8918 + 11319 - 5642 + 880 = +40$$

& ſic de reliquis.

Pariter ſumatur æquatio N^{i}. 10. pag. 88. illa, cujus radices ſunt reales, nempe

$$x^4 - 14x^3 + 55x^2 - 66x + 14 = 0$$

Ponendo o pro x, manet $+14$.

Ponendo $+1$, major quam minima radix $2 - \sqrt{3}$, fit

$$1 - 14 + 55 - 66 + 14 = -10$$

Ponendo $+2$, fit $+6$; ponendo $+3$ fit $+14$, & reipſa tum 1, tum 2 tum 3 majores ſunt quam $2 - \sqrt{3}$, ſed minores quam $2 + \sqrt{3}$.

Neque tantum ipſius $2 - \sqrt{3}$ limites ſunt 1 & 2; ſed etiam ipſius $5 - \sqrt{11}$; nam quia $\sqrt{11}$ minor eſt quam 4, profecto $5 - \sqrt{11}$ major eſt quam $5 - 4 = 1$. Sed 1 & 3 limites ſunt utriuſque, nam $\sqrt{11}$ major eſt quam 3, ac $5 - \sqrt{11}$ minor quam $5 - 3 = 2$. Ideo diximus N° 86. hujus, hos eſſe limites unius *ſaltem* radicis.

Ponamus nunc in eadem æquatione $+4$; fiet -10; & numeri 3 ac 4 ſunt limites radicis $2 + \sqrt{3}$.

Ponendo $+5$, fit -66; reipſa 4 & 5 minores ſunt quam maxima radix $5 + \sqrt{11}$.

87. Superfluum duco monere, quod ſi radices omnes eſſent negativæ, aut mutanda eſſent ſigna alterna, ſecundum N^{um} 1. p. 49. & N°s 8...12. p. 58. 59. hujus, aut aſſumenda eſſet $-\varrho$.

88. Sit nunc æquatio generalis ordinis n

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \dots + S = 0$$

in qua coefficientes, quamvis omnes ſcripti ſint poſitivi, intelliguntur quiſque cum ſuo ſigno, ita ut ſint ſigna tum poſitiva tum negativa, atque ideo radices tum poſitivæ tum negativæ, ad arbitrium. Hæ autem radices, quævis cum ſuo ſigno, ſint quæ N°. 71. p. 106. hujus, & creſcant eodem ordine. Hæc transformetur, ſecundum N^um 15. pag. 61. hujus, ponendo $x = y + e$.

89. Terminus ultimus transformatæ erit (N°. 16. pag. 61. hujus)

$$e^n + Ae^{n-1} + Be^{n-2} + Ce^{n-3} + De^{n-4} + \dots + S$$

in quo coefficientes habebunt quiſque eadem ſigna, quæ habebant in propoſita. Si in eo pro $+e$ ſubſtituatur $\pm\mu$, una nempe e propoſitæ radicibus, & quidem $+\mu$ ſi radix ſubſtituta fuerit poſitiva, $-\mu$ ſi ſecus, terminus ille evaneſcet. Nam hæc ſubſtitutio conficiet ex ultimo termino eandem quantitatem, quam conficeret e propoſita (N°. 16. pag. 61. hujus.). Sed propoſita per aptam radicis ſubſtitutionem evaneſcit (N°. 4..7. pag. 56...58. hujus). Ergo &c. (Vide N^um 24. pag. 64. hujus). Reliqua pars æquationis dividi poterit per $y = 0$, & manebit æquatio ordinis $n - 1$, in qua y erit incognita, & $\pm\mu$ ac ejus poteſtates erunt pro e & ejus poteſtatibus. Huic ſe aptant jam dicta: tamen non pigebit rem exponere.

90. Propoſitæ æquationis radices ſint

poſitivæ τ; σ; ϱ; π; o; &c. negativæ λ; $\varkappa$; ι; θ; η; &c.

ſi ſubſtituatur quantitas poſitiva pro e in transformata, radices poſitivæ minuentur, & negativæ augebuntur; ac transformatæ Factores fient

$$y + \mu - \tau = 0;\ y + \mu - \sigma = 0;\ y + \mu - \varrho = 0;\ \&c.$$

orti e radicibus poſitivis; &

$$y + \mu + \lambda = 0;\ y + \mu + \varkappa = 0;\ y + \mu + \iota = 0;\ \&c.$$

orti e radicibus negativis

(N°. 23. pag. 64. hujus.) Sic, ſi proponatur æquatio

$$x^5 - 2x^4 - 158x^3 + 568x^2 + 1021x - 1430, = 0$$

cujus radices poſitivæ ſunt

1; 5; 11;

& negativæ

2; 13.

Po-

Ponatur autem $x = y + 1$, ea transformabitur in

$$\left.\begin{array}{rrrrrr}
y^5 + 5y^4 + & 10y^3 + & 10y^2 + & 5y + & 1 \\
-2y^4 - & 8y^3 - & 12y^2 - & 8y - & 2 \\
& -158y^3 - & 474y^2 - & 474y - & 158 \\
& & +568y^2 + & 1136y + & 568 \\
& & & +1021y + & 1021 \\
& & & & -1430
\end{array}\right\} = 0$$

quæ, deleto ultimo termino evanescente, & divisa per y fit

$$y^4 + 3y^3 - 156y^2 + 92y + 1680 = 0$$

cujus Factores sunt

$$y + 1 - 5 = y - 4;\ y + 1 - 11 = y - 10;\ y + 1 + 2 = y + 3;$$
$$y + 1 + 13 = y + 14$$

91. Si vero alia quantitas, præter unam e propositæ radicibus, assumta fuisset pro μ, mansisset ultimus terminus, & constaret e differentiis ac summis Ni. 90. inter se multiplicatis; atque esset

$$(\mu - \tau)\ (\mu - \sigma)\ (\mu - \pi)\ \&c.\ (\mu + \lambda)\ (\mu + \varkappa)\ (\mu + \theta)\ \&c.$$

92. Sed si in transformata pro e substituatur quantitas negativa, augentur radices positivæ, & minuuntur negativæ; ac Factores sunt

$$y - \mu - \tau = 0;\ y - \mu - \sigma = 0;\ y - \mu - \pi = 0;\ \&c.$$

orti e radicibus positivis, &

$$y - \mu + \lambda = 0;\ y - \mu + \varkappa = 0;\ y - \mu + \theta = 0;\ \&c.$$

orti e radicibus negativis.

(No. 28. pag. 64. hujus). Quare, nisi sit μ una e propositæ radicibus, manebit ultimus terminus, & constabit, ut No. 91., summis & differentiis inter se multiplicatis.

93. Factum e summis Ni. 90. est semper positivum. Factum e summis Ni. 92. est positivum quando eæ summæ sunt numero pari, secus vero negativum.

94. Si in transformata ponatur pro e quantitas *positiva*, & *par differentiarum* numerus mutet signum, id est, aliquot differentiæ

$$\mu - \tau;\ \mu - \sigma;\ \mu - \pi;\ \mu - o;\ \&c.$$

ad numerum parem, fiant *negativæ*, ceteris manentibus positivis, factum e pari negativorum Factorum numero erit positivum; positivum pariter est factum

factum e Factoribus positivis. Ergo *factum ex omnibus manebit positivum.*

95. Si vero, dum substituitur quantitas positiva, *impar* sit numerus *differentiarum* quæ fiunt negativæ, factum ex his erit negativum, & *negativum* reddet *factum ex omnibus.*

96. Contra, si substituatur quantitas *negativa*, & aliquot differentiæ, ad numerum vel parem vel imparem

$$-\mu+\lambda;\ -\mu+\kappa;\ -\mu+\iota;\ -\mu+\theta;\ \&c.$$

fiant *positivæ*, reliquæ maneant *negativæ*; factum e positivis semper erit positivum; factum e negativis, pariter positivum, si earum numerus est par; Factum e summis pariter est positivum, si summarum numerus est par. Quare, si *par est tum numerus tum differentiarum negativarum*, tum *summarum, factum ex omnibus est positivum.*

97. Sed si alteruter numerus, vel differentiarum negativarum, vel summarum, sit *impar*, *factum ex omnibus erit negativum.*

98. Si tandem uterque numerus, tum differentiarum, tum summarum negativarum, est *impar*, *factum ex omnibus est positivum.*

99. Quando numerus differentiarum & summarum æquat numerum radicum propositæ, & substituitur quantitas positiva, minor quam minima radix positiva æquationis, tot erunt differentiæ negativæ, quot radices positivæ; atque illarum factum habebit idem signum ac factum harum; atque ideo ultimus transformatæ terminus idem signum ac ultimus propositæ.

100. Idem accidit si substituitur quantitas negativa, minor quam minima radix negativa propositæ.

101. Sed, quando in transformata ponitur pro e una e radicibus positivis propositæ, numerus differentiarum unitate minuitur; &, evanescente ultimo transformatæ termino (N°. 89. pag. 110. hujus), manet in penultimo factum e differentiis, qui est par & $= 2l$, si numerus radicum positivarum in proposita erat impar & $= 2l+1$; & contra est impar & $= 2l-1$, si numerus radicum positivarum est par & $= 2l$. Pariter si substituitur quantitas negativa, numerus differentiarum unitate decrescit, & fit par ac $= 2k$, si numerus radicum negativarum in proposita, est impar & $= 2k+1$; & contra.

102. Sint propositæ æquationis radices, ordine crescentes

ω; ψ; χ; φ; υ; &c. positivæ; λ; κ; ι; θ; η; &c. negativæ.

substituendo $+\omega$ in transformata, erunt ejus Factores

$$y+\omega-\omega=0=y;\ y+\omega-\psi=0;\ y+\omega-\chi=0;\ y+\omega-\varphi=0\ \&c.$$

omnes negativi, præter primum $= 0$

Substituendo $+\psi$; Factores erunt

$y+$

$$y+\psi-\omega=0;\ y=0;\ y+\psi-\chi=0;\ y+\psi-\varphi=0;\ \&c.$$

omnes negativi, præter primum positivum, & secundum $= 0$.

Substituendo $+\chi$; Factores erunt

$$y+\chi-\omega=0,\ y+\chi-\psi=0;\ y+\chi-\chi=0=y;\ \&c.$$

quorum duo primi sunt positivi; tertius $= 0$; reliqui negativi & sic de reliquis.

Hic observandum hanc substitutionem reducere differentias jam inventas, sed sub signo contrario; & quidem ut quæ (negligendo $y = 0$) fuit in prima substitutione, prima, secunda, tertia, &c; sit prima substitutionis secundæ, tertiæ, quartæ, &c.; quæ in secunda substitutione est secunda, tertia, quarta, &c, sit secunda substitutionis tertiæ, quartæ, quintæ &c.

103. Igitur terminus, qui manet in transformata & per substitutionem reducta, ultimus, qui nempe est penultimus transformatæ non reductæ, idest tandem quantitas

$$nx^{n-1}+(n-1)\,Ax^{n-2}+(n-2)\,Bx^{n-3}+(n-3)\,Cx^{n-4}+\&c.$$

sit alterne positiva & negativa per substitutionem ordinatam radicum propositæ in transformata, cujus terminus est hæc ipsa quantitas, pro e vel pro x; licet enim quantitatem indeterminatam quocunque simbolo exponere; sed animadvertendum hic litteram x non exponere propositæ radices, ut in proposita.

Sic, si proponatur æquatio in exemplum jam assumta ad N.um 90. hujus, pag. 110.

$$x^5-2x^4-158x^3+568x^2+1021x-1430=0$$

ex hac per notas regulas educetur penultimus transformatæ terminus

$$5x^4-8x^3-474x^2+1136x+1021$$

In hac pro x & ejus poteſtatibus ponatur, *primo*, minima propositæ radix positiva $+1$, inveniemus residuum

$$+1680=4.10.-3.-14=(5-1)(11-1)(-1-2)(-1-13)$$

Ponatur *secundo* $+5$, & erit residuum

$$-3024=-4.+6.-7.-18=(1-5)(11-5)(-2-5)(-13-5).$$

Ponatur *tertio* $+11$; residuum erit

$$+1820=-10.-6.-13.-24=(1-11)(5-11)(-2-11)(-13-11)$$

 Sub-

Substituendo *quarto* minimam e radicibus negativis -2, fit

$$-3003 = 3.7.13.-11 = (1+2)(5+2)(11+2)(-13+2)$$

Tandem substituendo -13, residuum invenitur

$$+66528 = 14.18.24.11 = (13+1)(13+5)(13+11)(13-2)$$

in his ea accidunt quæ attulimus N^is^ 92...103. hujus. pag. 111...113.

104. Cum ergo radices æquationis propositæ, ordine, substitutæ in

$$nx^{n-1} + (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} + (n-3)Cx^{n-4} + \&c.$$

dent facta alterne positiva & negativa, radices illæ sunt limites inter hujus quantitatis radices. (N°. 4. & 86. pag. 37. & 108. hujus). Nam, seu ponatur quantitas illa $= 0$, seu secus, semper substitutio supra descripta dabit residua alterne negativa & positiva.

105. Sint nunc radices æquationis

$$nx^{n-1} + (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} + (n-3)Cx^{n-4} + \&c. = 0$$

t; s; r; q; &c. positivæ, & f; d; c; b &c. negativæ

& hæ ordine crescant more solito.

Jam una ex ejus radicibus est o, quia hæc æquatio ab origine erat ordinis n, & divisa fuit per $x = 0$. Est autem o minor quam propositæ radix minima ω, & est ω limes æquationis nuper inventæ; oportet ergo ut sit ω minor quam t. Quare ψ erit major quam t & minor quam s; &c.

106. Quod esse nequeat ω major quam t, res sic probari potest. Radices positivæ æquationis ordinis n sint numero $= l$; substituta minima in transformata, vel ponendo ultimum transformatæ terminum evanescere, quod idem est, (N°. 89. pag. 110. hujus); radices positivæ æquationis ordinis $n-1$ erunt numero $= n-1$. Si esset ω major quam t & minor quam s; ψ major quam s & minor quam r; &c., superessent duæ radices maximæ æquationis ordinis n, quæ singulæ majores essent quam maxima radix æquationis ordinis $n-1$. Ideo hæ substitutæ una post aliam in æquatione ordinis $n-1$, darent duo facta cum iisdem signis, quod est contra demonstrata N°. 103. hujus.

107. Cum sit ω major quam o & minor quam t; ψ major quam t & minor quam s; χ major quam s & minor quam r; & sic de reliquis; erit contra o minor quam ω; t major quam ω, & minor quam ψ; s major quam ψ & minor quam χ; &c. Quare radices æquationis ordinis $n-1$, erunt limites radicum æquationis ordinis n. His addi debet o; & limes maximus jam inventus.

108.

108. Æquationes ita comparatæ, ut unius radices ſint limites radicum alterius, dicuntur *æquationes limitum.*

Quapropter æquationes, quas Newtonus deſcripſit N°. VII. hujus pag. 84. & quarum exemplum attulit in fine pag. 85., ſunt ſibi mutuo æquationes limitum.

109. Quo magis receditur ab æquatione propoſita, vel quo minor eſt exponens æquationis limitum, eo magis limites recedunt a propoſitæ radicibus. Sit enim propoſita æquatio generalis, qua ſæpius uſi ſumus; & ejus radices poſitivæ (nam quod dicitur de poſitivis facile traducitur ad negativas) illæ ipſæ, quæ ſupra N°. 102. pag. 112. hujus; deſignentur nempe litteris græcis incipiendo ab ultima, quæ exponit minimam propoſitæ radicem, & pergendo ordine. Pariter æquationis limitum primæ

$$nx^{n-1} + (n-1)\,Ax^{n-2} + (n-2)\,Bx^{n-3} + (n-3)\,Cx^{n-4} + \&c. = 0$$

radices exprimantur literis latinis minoribus & italicis, incipiendo a t, quæ exponit minimam hujus radicem, & pergendo ad s; r; &c. Æquationis limitum ſecundæ,

$$\frac{n.\overline{n-1}}{2}\,x^{n-2} + \frac{\overline{n-1}.\overline{n-2}}{2}\,Ax^{n-3} + \frac{\overline{n-2}.\overline{n-3}}{2}\,Bx^{n-4} + \&c. = 0$$

radices exponantur litteris minoribus romanis

t; s; r; p; q; &c.

Æquationis tertiæ radices litteris majoribus italicis

T; S; R; P; Q; &c.

Æquationis quartæ litteris majoribus romanis

T; S; R; P; Q; &c.

Oſtenſum eſt eſſe t inter ω & ψ; s inter ψ & χ; r inter χ & ϕ; p inter ϕ & υ; &c. Pariter eſſe t inter t & s; s inter s & r; r inter r & p; &c.; T inter t & s; S inter s & r; R inter r & p; &c.; T inter T & S; S inter S & R; R inter R & P; &c.; unde patet propoſitum.

110. Quæ demonſtrata fuerunt de propoſita multiplicata in ſingulis terminis per exponentem incognitæ in ipſo termino, vera ſunt etiam ſi aſſumatur quævis alia progreſſio arithmetica, & per hujus terminos multiplicentur ordine ſinguli termini propoſitæ. Sit enim ultimus progreſſionis arithmeticæ aſſumtæ terminus m, & differentia terminorum ſit p. Ea debet habere terminorum numerum $= n + 1$, quot nempe ſunt termini propoſitæ, quæ eſt ordinis n; demto ultimo, qui eſt $= m$, manet numerus terminorum, atque ideo differentiarum, $= n$: atqui in ſingulis progreſſionis terminis numerus differentiarum unitate creſcit; ergo in primo ter-

 mino

mino adjungi ipsi m debet np, & in sequentibus $(n-1)p$; $(n-2)p$; &c., & quidem per additionem, si terminus ultimus m est minimus; per substractionem, si is est maximus. Erit ergo progressio

$$m \pm np;\ m \pm (n-1)p;\ m \pm (n-2)p;\ \ldots\ m \pm 3p;\ m \pm 2p;\ m \pm p;\ m;$$

In qua potest terminus aliquis esse $= 0$, & tunc, si progressio decrescit a primo termino $m + np$ ultimum versus, illi qui sequuntur (ad dextram) terminum evanescentem, erunt negativi; si vero progressio crescat a primo termino $m - np$ ultimum versus, illi qui præcedunt (ad sinistram) terminum evanescentem, erunt negativi.

Nunc proposita

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} \ldots + Px^2 + Rx + S = 0$$

multiplicata per hanc progressionem, dat

$$mx^n + mAx^{n-1} + mBx^{n-2} + mCx^{n-3} + mDx^{n-4} \ldots + mPx^2 + mRx + mS$$

$$\pm npx^n \pm (n-1)pAx^{n-1} \pm (n-2)pBx^{n-2} \pm (n-3)pCx^{n-3} \pm (n-4)Dx^{n-4} \ldots$$

$$\pm 2pPx^2 \pm pRx$$

Harum duarum sericrum prima est ipsa æquatio ducta in m. Sed ea, per hypothesim, $= 0$; ergo & ejus multiplex $= 0$; nec mutat valorem alterius. Altera autem est

$$\pm px\,(nx^{n-1} + (n-1)\,Ax^{n-2} + (n-2)\,Bx^{n-3} + (n-3)\,Cx^{n-4} + \&c.)$$

cujus divisor est px & Factor compositus est ipsa æquatio, quæ oritur e proposita multiplicando terminos singulos per exponentem. Hæc, ex demonstratis, substituendo, ordine, propositæ radices a minima ad maximam, dat facta alterne positiva & negativa, quæ ducta in $+p$, manent alterne positiva & negativa, qualia erant; sed ducta in $-p$ fiunt alterne negativa & positiva. Ergo &c.

Exemplo sit æquatio trium dimensionum

$$x^3 - 11x^2 + 31x - 24 = 0$$

cujus radices, positivæ omnes, sunt 1; 3; 7.

hæc ducta in exponentes & divisa per x, dat

$$3x^2 - 22x + 31$$

quæ, substituendo ordine

$+1$;

$+ 15; + 35; + 75$; dat $+ 125; - 8; + 24$

eadem ducta per terminos seriei

$0; 1; 2; 3$, dat $- 11x^2 + 52x - 63$

quæ per eandem substitutionem præbet

$- 12; + 24; - 168$

Eadem ducta in terminos seriei

$5; 2; - 1; - 4$ fit $5x^3 - 22x^2 - 31x + 84$

&, per solitam substitutionem, invenitur

$+ 36; - 72; + 504$.

sunt ergo omnes hæ æquationes limitum propositæ.

111. Si proposita æquatio esset potestas n binomii $x + \omega$; vel si esset

$$A = n\omega; B = \frac{n . n - 1}{2} \omega^2; \ C = \frac{n . n - 1 . n - 2}{2 . 3} \omega^3;$$

$$D = \frac{n . n - 1 . n - 2 . n - 3}{2.3.4} \omega^4; \ \&c.$$

tunc prima series N°. 112. præcedentis maneret

$$m \ (x + \omega)^n$$

sed secunda fieret

$$px \ (nx^{n-1} + (n-1) \, n\omega x^{n-2} + \frac{(n-2) \ . \ n \ . \ n-1}{2} \ \omega^2 x^{n-3} +$$

$$\frac{(n-3) \, n . n - 1 \ . \ n - 2}{2 . 3} \ \omega^3 x^{n-4} \ \ldots + n\omega^{n-1})$$

id est

$$pnx \ (x^{n-1} + (n-1) \, \omega x^{n-2} + \frac{n - 1 . n - 2}{2} \, \omega^2 x^{n-3} \ \ldots + \omega^{n-1})$$

$$= pnx \, (x + \omega)^{n-1}$$

112. Si quis propositæ terminus abesset, asterisco supplendus esset, ut suus terminorum numerus æquationi constet.

113. Constat hæc esse vera, quatenus radices sunt reales in proposita, etiamsi præter reales, aliquæ sint imaginariæ.

Sic, si æquatio trium dimensionum, nuper in exemplum allata, multiplicetur per

$$x^2 - 4x + 6 = 0$$

cujus radices duæ sunt imaginariæ $2 + \sqrt{-2}$, & $2 - \sqrt{-2}$; fiet

$$x^5 - 15x^4 + 81x^3 - 211x^2 + 270x - 126 = 0$$

unde

$$5x^4 - 60x^3 + 243x^2 - 422x + 270$$

hæc, substituendo,

$+1$; $+3$; $+7$; dat $+36$; -24; $+648$

pro tribus radicibus realibus.

114. Sed, quævis quantitas substituatur in æquatione, cujus radices omnes sunt imaginariae, factum orietur semper positivum. Si enim æquatio hujusmodi

$$x^2 \pm 2mx + mm + nn = 0$$

si pro x substituatur quantitas quævis minor quam m; ex. gr. $m - p$, fiet æquatio

$$m^2 - 2mp + p^2 \pm 2m^2 \mp 2mp + m^2 + n^2$$

id est, si fit $+ 2mx$

$$4m^2 - 4mp + p^2 + n^2 = (2m - p)^2 + n^2, \text{ \& } m^2 + n^2, \text{ si fit } - 2mx.$$

quæ semper est positiva, quia positivum est quadratum ipsius $2m - p$. Fortius manebit quantitas positiva, si pro x substituatur vel m vel quantitas major quam m.

115. Observandum esse demonstratum idem accidere etiam si quantitas substituta sit negativa, quia quadratum semper erit positivum.

116. Cum ergo res demonstrata sit pro æquationibus quadraticis; & semper binæ imaginariæ coeant in æquationem quadraticam, factum ex his factis peculiaribus, erit positivum, & propositio in genere est demonstrata.

117. Quando igitur tot inveniuntur paria limitum, quot sunt radices æquationis propositæ, ea habet omnes radices reales; & in genere, pro-

po-

posita tot habet radices reales quod inveniuntur limitum paria.

118. Prima limitum aquatio, jam toties nominata, deducitur ab ultimo transformatæ termino (N°.17..20. pag.62.63. hujus). Hæc tota nihilo æqualis est. Nihilo pariter æqualis ostensus est ejus ultimus terminus, quando pro e substituitur aliqua e propositæ radicibus. Quare tota transformata, una cum termino qui erat penultimus, nunc ultimus factus est, nihilo æqualis est. Ejus radices sunt differentiæ vel summæ radicum æquationis propositæ, quarum factum est ille terminus

$$ne^{n-1} + (n-1)Ae^{n-2} + (n-2)Be^{n-3} + (n-3)Ce^{n-4} + \&c.$$

qui profecto non evanescit; neque evanescet quia pro e scripta sit littera x, quod pendet a scribentis voluntate. Sed, si terminus ille ponatur nihilo æqualis, illius radices (quæ nec sunt differentiæ nec summæ radicum propositæ) demonstratæ sunt limites radicum propositæ, & singulæ majores quam respondentes radices propositæ; idest illius minima major quam minima propositæ &c.

Sic æquatio trium dimensionum jam allata

$$x^3 - 11x^2 + 31x - 21 = 0$$

substituendo $y + e$ pro x fit

$$\left.\begin{array}{llll} y^3 + & 3ey^2 + & 3e^2y + & e^3 \\ & -11y^2 - & 22ey - & 11e^2 \\ & & +31y + & 31e \\ & & & -21 \end{array}\right\} = 0$$

Hæc transformata, ponendo $e = 1$, quæ est una e propositæ radicibus, habet ultimum terminum nihilo æqualem, sed penultimum $= 12$. Non ergo est

$$3e^2 - 22e + 31 = 3x^2 - 22x + 31 = 0$$

Reliquæ transformatæ

$$y^2 - 8y + 12 = 0$$

radices sunt 6; & 2; differentiæ duarum radicum reliquatum 7 & 3 a substituta. Interim si ponatur

$$3x^2 - 22x + 31 = 0$$

erit

$$x = \frac{11}{3} \pm \frac{2}{3}\sqrt{7}$$

est

est autem $\sqrt{7} = 2,645$; quare $x = \frac{11 \pm 5,290}{3} =$ vel $5,430$ vel $1,903$
Posterior numerus medius est inter 1 & 3, prior inter 3 & 7

119. Sed penultimus transformatæ terminus fieret nihilo æqualis, si duæ æquationis propositæ radices essent æquales. Nam, facta substitutione N°. 90. pag. 110. hujus, ille constabit e differentiis

$$\mu - \tau;\ \mu - \sigma;\ \mu - \zeta;\ \mu - \pi;\ \&c,$$

& e summis

$$\mu + \lambda;\ \mu + \kappa;\ \mu + \iota;\ \mu + \theta;\ \&c.;$$

eritque numerus summarum ac differentiarum simul $= n - 1$; hæ autem jungendæ per multiplicationem sunt ad numerum $n - 2$, in quovis e factis simplicibus, quæ simul sumta conficiunt coefficientem termini penultimi; Factor autem quivis, ex. gr. $\mu - \sigma$, erit in omnibus factis simplicibus, uno dempto complectente reliquos Factores omnes (N°. 106. pag. 27. Tomi I.). Ergo, si $\mu = \sigma$, id est si una radix propositæ substituatur in transformata, non evanescet penultimus hujus terminus, sed manebit factum simplex illud, in quo non est Factor $\mu - \sigma = 0$, nempe

$$(\mu - \tau)\ (\mu - \varrho)\ (\mu - \pi)\ \&c.\ (\mu + \lambda)\ (\mu + \kappa)\ (\mu + \iota)\ (\mu + \theta)\ \&c.,$$

quod confirmat quæ diximus N°. 116. hujus. Sed si μ æquet etiam aliquam aliam radicem ϱ, tunc erit $\mu - \varrho = 0$, & omnino evanescentem reddet terminum penultimum. Erat autem $\mu = \sigma$; nunc est $\mu = \varrho$; quare $\sigma = \varrho$, & duæ radices æquationis propositæ sunt æquales.

120. Igitur æquatio

$$nx^{n-1} + (n-1)\ Ax^{n-2} + (n-2)\ Bx^{n-3} + (n-3)\ Cx^{n-4} \ldots = 0$$

& inservit propositæ, quando ea habet duas radices æquales, & complectitur limites radicum propositæ, si sint inæquales. Quapropter vocabitur vel æquatio limitum, vel æquatio radicum æqualium.

121. Si æquatio ordinis n, in qua sunt duæ radices æquales, exponatur per Q, ejus æquatio radicum æqualium exponi debet per $\frac{Q}{x + \varrho}$; ubi ϱ ponitur una e radicibus æqualibus.

122. Si æquatio ordinis n habeat radicum æqualium numerum q, & multiplicentur singuli propositæ termini per exponentes, æquatio ordinis $n - 1$, quæ hinc conficitur, habebit radicum æqualium numerum $q - 1$.

Sit æquatio generalis consueta.

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots + Px^3 + Qx^2 + Rx + S = 0$$

&

& ponatur $n = q + r$: quia æquatio propofita habet q radices æquales, (quas defignabo per ω,) ea per multiplicationem confecta erit ex $(x + \omega)^q$, & ex æquatione ordinis r,

$$x^r + Ax^{r-1} + Bx^{r-2} + Cx^{r-3} + Dx^{r-4} \ldots + Px^3 + Qx^2 + Rx + S = 0;$$

atque ideo ipfa propofita poterit exprimi hoc pacto

$$x^r (x + \omega)^q + Ax^{r-1} (x + \omega)^q + Bx^{r-2} (x + \omega)^q \ldots + Px^3 (x + \omega)^q +$$

$$Qx^2 (x + \omega)^q + Rx (x + \omega)^q + S (x + \omega)^q = 0.$$

123. Conftat æquationem ordinis r habere, pro termino $s+1$ .. mo, ipfius x exponentem $r - s$; fit ille terminus Mx^{r-s}, factum $Mx^{r-s} (x + \omega)^q$, fi ordine fcribantur finguli poteftatis termini, habebit exponentes

$$q+r-s;\ q+r-s-1;\ q+r-s-2;\ q+r-s-3 \ \ldots\ r-s.$$

Nunc in progreffione Ni. 110. pag. 116. hujus, ponatur $r-s$ pro m, & q; $q-1$; $q-2$; &c. pro np; $(n-1)p$; $(n-2\ p$; &c; id eft 1 pro p, & q pro n; & pro æquatione ibidem propofita fubftituatur,

$$Mx^{r-s} (x + \omega)^q = Mx^{r-s} \left(x^q + q\omega x^{q-1} + \frac{q \cdot q-1}{2} \omega^2 x^{q-2} + \ldots\ldots \omega^q\right);$$

invenietur æquatio multiplicata per progreffionem arithmeticam, cujus

prima feries

$$(r-s)\, Mx^{r-s} \left(x^q + q\omega x^{q-1} + \frac{q \cdot q-1}{2} \omega^2 x^{q-2} \ldots + \omega^q\right) = (r-s) Mx^{r-s} (x+\omega)^q$$

Series altera

$$+ Mx^{r-s+1} \left(qx^{q-1} + q \cdot q - 1\omega x^{q-2} + \frac{q \cdot q-1 \cdot q-2}{2} \omega^2 x^{q-3} \ldots + \omega^{q-1}\right)$$

$$= qMx^{r-s+1} (x + \omega)^{q-1},$$

ubi Factor compofitus $(x + \omega)^{q-1}$, habet radicum æqualium numerum $q-1$.

124. Summa terminorum conftituentium terminum hunc generalem, dividi poteft per x; quo facto manet is

$$(r-s)\ Mx^{r-s-1}\ (x+\omega)^q + qMx^{r-s}\ (x+\omega)^{q-1}\ \ldots$$

Eſt autem $(r-s)\ Mx^{r-s-1}\ (x+\omega)^q$ ipſe terminus generalis æquationis compoſitæ diviſus per x & multiplicatus per exponentem ipſius x; & $qMx^{r-s}\ (x+\omega)^{q-1}$, eſt idem terminus diviſus per $x+\omega$, & multiplicatus per exponentem ipſius $(x+\omega)^q$. Hinc conſtat quomodo facile inveniri poſſint ſinguli termini. Rem tamen explicemus aliquot exemplis.

125. Jam, quamdiu $r-s$ eſt nihilo major, manebit utraque ſeries $(r-s)\ Mx^{r-s}\ (x+\omega)^q$ & $qMx^{r-s+1}\ (x+\omega)^{q-1}$. Sed quando $r-s=0$, id eſt $r=s$, atque $s+1=r+1$, evaneſcet ſeries $(r-s)\ Mx^{r-s}\ (x+\omega)^q$ & manebit $qMx\ (x+\omega)^{q-1}$. Hoc autem accidet in ultimo compoſitæ termino $S\,(x+\omega)^q$; nam æquatio ordinis r habet terminorum numerum $r+1=s+1$, ac terminus $s+1$..*mus* eſt ipſe ultimus.

Igitur ultimus compoſitæ terminus, multiplicatus per ſeriem arithmeticam

$$q;\ q-1;\ q-2;\ q-3;\ q-4;\ \ldots\ 0$$

fit

$$qSx\ (x+\omega)^{q-1}.$$

In termino præcedente eſt $s=r-1$; hinc $1=r-s$; & $q+r-s=q+1$, quare

$$(r-s)\ Mx^{r-s}\ (x+\omega)^q + qMx^{r-s+1}\ (x+\omega)^{q-1} = Rx\ (x+\omega)^q + qRx^2$$
$$(x+\omega)^{q-1} = Rx\ ((x+\omega)+qx)\ (x+\omega)^{q-1} = Rx\ ((q+1)x+\omega)\ (x+\omega)^{q-1}$$

Tertius, ab ultimo, terminus dat $s=r-2$; hinc $2=r-s$, & $q+r-s=q+2$; quapropter tunc

$$(r-s)\ Mx^{r-s}\ (x+\omega)^q + Mx^{r-s+1}\ (x+\omega)^{q-1} = 2Qx^2\,(x+\omega)^q + qQx^3$$
$$(x+\omega)^{q-1} = Qx^2\,((2x+2\omega)+qx)\ (x+\omega)^{q-1} = Qx^2((q+2)x+2\omega)(x+\omega)^{q-1}$$

Quartus ab ultimo dat $s=r-3$; unde $3=r-s$; & $q+r-s=q+3$, atque

$$(r-s)Mx^{r-s}\ (x+\omega)^q + qMx^{r-s+1}\ (x+\omega)^{q-1} = 3Px^3\,(x+\omega)^q + qPx^4$$
$$(x+\omega)^{q-1} = Px^3\ (3x+3\omega+qx)\,(x+\omega)^{q-1} = Px^3\,((q+3)x+3\omega)\,(x+\omega)^{q-1}$$

Et

Et sic progrediendo ab ultimo primum versus. Sed in ipso primo est $s = 0$; quare $r - s = r$, & $q + r - s = q + r$; unde

$$(r-s)\, Mx^{r-s} \, (x+\omega)^q + qMx^{r-s+1} \, (x+\omega)^{q-1} = rx^r \, (x+\omega)^q + qx^{r+1}$$

$$(x+\omega)^{q-1} = x^r \, (rx + r\omega + qx)\,(x+\omega)^{q-1} = x^r \, ((r+q)x + r\omega)\,(x+\omega)^{q-1}$$

Secundus terminus dat $s = 1$; atque ideo $r - s = r - 1$, & $q + r - s = q + r - 1$; unde

$$(r-s)\, Mx^{r-s} \, (x+\omega)^q + qMx^{r-s+1} \, (x+\omega)^{q-1} = (r-1) Ax^{r-1} (x+\omega)^q + qAx^r$$

$$(x+\omega)^{q-1} = Ax^{r-1} \,(rx - x + r\omega - \omega + qx)(x+\omega)^{q-1} =$$

$$Ax^{r-1}((r+q-1)x + (r-1)\,\omega)\,(x+\omega)^{q-1}$$

In tertio est $s = 2$; & $r - s = r - 2$, ac $q + r - s = q + r - 2$: hinc

$$(r-s)\, Mx^{r-s} \, (x+\omega)^q + qMx^{r-s+1} \, (x+\omega)^{q-1} = (r-2)\, Bx^{r-2} \, (x+\omega)^q +$$

$$qBx^{r-1} \, (x+\omega)^{q-1} = Bx^{r-2} \, (rx - 2x + r\omega - 2\omega + qx)\,(x+\omega)^{q-1} =$$

$$Bx^{r-2} \, ((r+q-2)x + (r-2)\omega)\,(x+\omega)^{q-1}$$

In quarto est $s = 3$; $r - s = r - 3$, ac $q + r - 3$; quare

$$(r-s)\, Mx^{r-s} \, (x+\omega)^q + qMx^{r-s+1} \, (x+\omega)^{q-1} = (r-2)\, Cx^{r-3} \, (x+\omega)^q +$$

$$qCx^{r-2} \, (x+\omega)^{q-1} = Cx^{r-3} \, (rx - 3x + r\omega - 3\omega + qx)\,(x+\omega)^{q-1} =$$

$$Cx^{r-3} \, ((r+q-3)x + (r-3)\,\omega)\,(x+\omega)^{q-1}$$

Abunde, puto, ad casus peculiares aptatum est theorema generale N. 124. Nunc.

126. Quoniam singuli termini æquationis propositæ, multiplicati quisque per suos exponentes, complectuntur potestates

$$(x+\omega)^q \text{ \& } (x+\omega)^{q-1}$$

ultimus autem complectitur tantum $(x+\omega)^{q-1}$, patet totam propositam, post aptam multiplicationem per exponentes, continere radices æquales ad numerum $q-1$. Potest autem hæc dividi per x, per quem multiplicati sunt singuli termini, & æquatio ordinis $r + q - 1 = n - 1$, sic in-

inventa, eſt ipſa propoſita, cujus termini ſinguli multiplicati ſunt per ſuos exponentes. Ergo &c.

127. Æquatio ſupra inventa ſponte diſtribuitur in duas ſeries, quarum una, diviſa per x, eſt

$$(x+a)^q \; (rx^{r-1} + (r-1)\,Ax^{r-2} + (r-2)\,Bx^{r-3} + (r-3)\,Cx^{r-4} \ldots + 3Px^2 + 2Qx + R)$$

altera, pariter diviſa per x, eſt

$$q\,(x+a)^{q-1} \; (x^r + Ax^{r-1} + Bx^{r-2} + Cx^{r-3} \ldots + Px^3 + Qx^2 + Rx + S)$$

quæ ſimul additæ complent inventam. Eſt autem prima ſeries factum ex ipſius $x+a$ poteſtate q in æquationem radicum æqualium ipſius $x^r + Ax^{r-2} +$ &c., & ſecunda ſeries eſt factum viciſſim ex æquatione radicum æqualium poteſtatis $(x+a)^q$ in propoſitam $x^r + Ax^{r-1} +$ &c; quod eſt obſervandum.

Præbeamus exemplum arithmeticum. Æquatio

$$x^7 - 31x^6 + 401x^5 - 2791x^4 + 11195x^3 - 25525x^2 + 29875x - 13125 = 0$$

conficitur ex

$$x^4 - 20x^3 + 150x^2 - 500x + 625 = 0 = (x-5)^4$$

& ex

$$x^3 - 11x^2 + 31x - 21 = 0 = (x-1)\,(x-3)\,(x-7).$$

Æquatio propoſita ſeptimi gradus, multiplicando quemque terminum per ſuum exponentem, & factum dividendo per x, dat

$$7x^6 - 186x^5 + 2005x^4 - 11164x^3 + 33585x^2 - 51050x + 29875 = 0$$

Hic $r = 3$; $q = 4$; $a = -5$. Igitur, ex theoremate præcedente,

$$x^r \; (r+q)\,x + ra)\,(x+a)^{q-1} = x^3(7x-15)\,(x-5)^3 = (7x^4 - 15x^3)\,(x-5)^3 =$$
$$7x^7 - 120x^6 + 750x^5 - 2000x^4 + 1875x^3$$

&

$$Ax^{r-1}\,((r+q-1)\,x + (r-1)a)\,(x+a)^{q-1} = -11x^2\,(6x-10)\,(x-5)^3 =$$
$$(-66x^3 + 110x^2)\,(x-5)^3 = -66x^6 + 1100x^5 - 6600x^4 + 16500x^3 - 13750x^2$$

&

Et duæ partes jam inventæ, simul

$$7x^7 - 186x^6 + 1850x^5 - 8600x^4 + 18375x^3 - 13750x^2.$$

Jam

$$Bx^{r-2}\ ((r+q-2)x + (r-2)\omega)\ (x+\omega)^{q-1} = 31x\ (5x-5)\ (x-5)^3 =$$

$$(155x^2 - 155x)\ (x-5)^3 =$$

$$+ 155x^5 - 2480x^4 + 13950x^3 - 31000x^2 + 19375x,$$

quam adde summæ priori, & invenies

$$7x^7 - 186x^6 + 2005x^5 - 11080x^4 + 32325x^3 - 44750x^2 + 19375x$$

Tandem $Cx^{r-3}((r+q-3)\ x+(r-3)\ \omega)\ (x+\omega)^{q-1} = -21\ (4x)\ (x-5)^3 =$

$$-84x^4 + 1260x^3 - 6300x^2 + 10500x$$

Et, addendo summæ jam inventæ, ac dividendo per x, reperies æquationem superiorem.

Patet autem hanc habere tres radices æquales, quia dividi potest per $(x-5)^3$, manente quoto

$$7x^3 - 81x^2 + 265x - 239 = 0$$

128. Si vero plures essent æquationes radicum æqualium inter se multiplicatæ, ut

$$(x+\omega)^q\ (x+\psi)^t\ (x+\chi)^u:\ \&c.$$

æquatio inventa post consuetam exponentium multiplicationem dividi posset,

per $(x+\omega)^{q-1}$; per $(x+\psi)^{t-1}$; per $(x+\chi)^{u-1}$ &c.

Ex. gr. sit æquatio

$$x^7 - 15x^6 + 90x^5 - 282x^4 + 501x^3 - 407x^2 + 272x - 60 = 0 =$$

$$(x-1)^3\ (x-2)^2\ (x-3)\ (x-5) = 0$$

Hæc tractata secundum regulam, dat

$$7x^6 - 90x^5 + 450x^4 - 1128x^3 + 1503x^2 - 814x + 272 = 0$$

quæ divisa per

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = (x-1)^{q-1} = 0$$

 re-

relinquit quotum

$$7x^4 - 76x^3 + 291x^2 - 470x + 272 = 0$$

Quotum hoc divisum per

$$x - 2 = (x - 2)^t = (x - 2)^{t-1} = 0$$

præbet

$$7x^3 - 62x^2 + 167x - 136 = 0$$

& hæc posterior æquatio neque per $x - 1$, neque per $x - 2$ dividi poteſt.

129. Hujus rei ratio eſt, quod ultimus compoſitæ terminus eſt ipſe terminus ultimus quantitatis

$$S(x+\omega)^q \ (x+\psi)^t \ (x+\chi)^u \text{ \&c; nempe } S\omega^q \ \psi^t \ \chi^u \text{ \&c.}$$

Cum autem tota hæc quantitas facta e poteſtatibus inter ſe multiplicatis, multiplicari debeat in ſingulis terminis per exponentes ipſius x, terminus ultimus multiplicatus erit per o. Hoc evaneſcente, tota ſeries dividi poterit per x, qui per multiplicationem adjungi poterit ipſi S, & manebit, neglectis terminis ſeriei arithmeticæ,

$$Sx(x + \omega)^{q-1} \ (x + \psi)^{t-1} \ (x + \chi)^{u-1} \text{ \&c.}$$

130. Si eſſet $x + \omega = x + a \pm \sqrt{b}$, atque ideo ſi quantitas ſurda eſſet in æquatione radicum æqualium rationale, neceſſario eſſet eadem poteſtas alterius binomii $x + \psi = x + a \mp \sqrt{b}$ (N°. 45. pag. 19. hujus.). Tunc ultimus compoſitæ terminus eſſet

$$Sx \ (x+a+\sqrt{b})^{q-1} \ (x+a-\sqrt{b})^{q-1} = (x^2+2ax+a^2-b)^{q-1}$$

& ſupereſſet æquatio rationalis.

Ita æquatio

$$x^4-4x^3+2x^2+4x-1 = 0 = (x-1-\sqrt{2})^2 \ (x-1+\sqrt{2})^2 = (x^2-2x-1)^2$$

fit, ex regula, poſt diviſionem per 4

$$x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0 = (x^2 - 2x - 1) \ (x - 1).$$

131. Patet idem accidere quando radices æquales ſunt imaginariæ, quia & ipſæ ſemper ſunt binæ oppoſitæ, & factum ex binis erit formæ

$$x^2 + 2ax + a^2 + b$$

Sit

Sit ex. gr. æquatio

$$x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 9 = 0 = (x - 1 + \sqrt{-2})^2\,(x - 1 - \sqrt{-2})^2$$

Hinc, per methodum consuetam, habetur

$$4x^3 - 12x^2 + 20x - 12 = x^3 - 3x^2 + 5x - 3 = (x - 1 + \sqrt{-2})\,(x - 1 - \sqrt{-2})\,(x - 1)$$

Ubi una est potestas ejusdem radicis $(x+\omega)^q$.

132. Constat ex N°. 123. pag. 121. hujus, æquationem compositam divisam per $(x+\omega)^{q-1}$

relinquere quotum, quod sic scribi potest

$$+ r\omega x^r + (r-1)A\omega x^{r-1} \,..\, + 4M\omega x^4 + 3P\omega x^3 + 2Q\omega x^2 + R\omega x$$

$$(r+q)x^{r+1} + (r+q-1)Ax^r + (r+q-1)Bx^{r-1} \,..\, + (q+3)Px^4 + (q+2) = 0$$

$$Qx^3 + (q+1)Rx^2 + qSx$$

133. Quare si cognoscatur una e radicibus æqualibus ω, & earum numerus q, facile detegetur æquatio, quæ cum $(x+\omega)q$ confecit propositam. Nam quoti secundum terminum multando quantitate $r\omega$, & reliquum dividendo per $r+q-1$, invenietur A, coefficiens inveniendus secundi termini. Hunc multiplicando per $(r-1)\,\omega$, auferendo a quoti tertio termino, & residuum dividendo per $r+q-2$, invenietur B; &c.

Sic, N°. 124. pag. 122. hujus, erat $q = 4$; $\omega = 5$, & quotum

$$7x^3 - 81x^2 + 265 - 239 = 0$$

cum sit $q+r = 7$, & $q = 4$; est $r = 3$; ac $r\omega = 15$: sed $81 - 15 = 66$, atque $\frac{66}{6} = 11 = A$. Jam $(r-1)\,\omega = 10$; & $(r-1)\,\omega A = 110$. Atqui $265 - 110 = 155$, & $\frac{155}{5} = 31$. Quare $B = 31$. Tandem $(r-2)\omega = 5$; $(r-2)\omega B = 155$; & $239 - 155 = 84$; & $\frac{84}{4} = 21$; ergo $C = 21$, & æquatio investiganda est

$$x^3 - 11x^2 + 31x - 21 = 0$$

Qualis reipsa erat.

134. Quotum jam inventum, nempe divisum per x, continet summam e duabus æquationibus limitum, quæ inserviunt ipsi multiplicanti,

$$x^r + Ax^{r-1} + Bx^{r-2} + Cx^{r-3} + Dx^{r-4} \;...\; + Qx^3 + Px^2 + Rx + S = 0$$

Ha-

Harum una deducta est e proposita, multiplicando singulos terminos per terminos seriei arithmeticæ,

$$r\omega;\ (r-1)\omega;\ (r-2)\omega;\ (r-3)\omega;\ (r-4)\omega\ \ldots\ 3\omega;\ 2\omega;\ 1\omega;\ 0$$

alterum vero dat proposita, cujus termini, more solito, multiplicati sunt per

$$(r+q);\ (r+q-1);\ (r+q-2);\ (r+q-3)\ \ldots\ (q+3);\ q+2);\ (q+1);\ q$$

135. Quando est $q = 1$; vel una est radix sibi æqualis, aut, (quod idem est,) radices omnes inæquales sunt, proposita fit

$$(x+\omega)(x^r + Ax^{r-1} + Bx^{r-2} + Cx^{r-3} \ldots + Qx^3 + Px^2 + Rx + S = 0 =$$

$$x^{r+1} + (\omega+A)x^r + (\omega A + B)x^{r-1} + (\omega B + C)x^{r-3} \ldots + (\omega Q + P)x^3 +$$

$$(\omega P + R)x^2 + (\omega R + S)x + \omega S = 0$$

& quotum N^i. 133. evadet

$$(r+1)x^r + r(\omega + A)x^{r-1}\ (r-1)\ (\omega A + B)x^{r-2} + (r-2)\ (\omega B + C)x^{r-3} +$$

$$\ldots\ 3(\omega Q + P)x^2 + 2(\omega P + R)x + \omega R + S = 0$$

Prorsus ut N°. 104. pag. 114. hujus. Quare id quod ibi demonstratum est, nunc alio pacto demonstratur. *Alio pacto*, inquam; nam quod potestas $(x+\omega)^n$, si ejus singuli termini multiplicentur per exponentes ipsius x, præbeat $nx(x+\omega)^{n-1}$, etsi quasi corollarium deductum sit N°. 110. pag. 116. hujus a propositione generale, tamen per se patet. Quandoquidem omnes potestatis $(x+\omega)^n$ termini, præter primum & ultimum, habebunt n inter coefficientium Factores, per theorema binomiale. Sed multiplicatio per exponentes ipsius x, delet ultimum terminum qui multiplicatur per 0, & primum multiplicat per n. Ergo post hanc multiplicationem, omnes termini sunt multiplicati per n; sed & per x, quod constat. Quapropter Factor nx præponi poterit summæ terminorum superstitum, quorum primus exponentem habebit $n-1$, secundus $n-2$; &c., qui sunt exponentes potestatis $(x+\omega)^{n-1}$. Item secundus ejus terminus, qui nunc habet coefficientem unitatem, multiplicatur per $n-1$: tertius, qui nunc habet coefficientem $\frac{n-1}{2}$, multiplicatur per $n-2$, & coefficientem habet $\frac{n-1 \cdot n-2}{2}$; &c. Hi autem sunt coefficientes potestatis $(x+\omega)^{n-1}$; quæ debet habere n terminos, quot relinquit, post multiplicationem, potestas

testas $(x+\omega)^n$; hæc enim habebat $n+1$ terminos, quorum ultimus expunctus est. Ergo &c.

136. Quanquam $(x+\omega)^{n-1}$ contineat $n-1$ Factores æquales, tamen, ut habeatur æquatio vera & completa, sumi debet ejus multiplex $n(x+\omega)^{n-1}$. Sunt enim in $(x+\omega)^n$ Factores æquales numero n, quorum quisque, ordine, potest auferri per divisionem. Erunt ergo omnino n quotientes diversi.

137. Ut lux affundatur huic afferto, ponamus æquationis ordinis n Factores esse

$$x+a;\ x+b;\ x+c;\ x+d;\ x+e;\ \&c.$$

ad numerum n; & æquationem ex his conflatam esse Q. Si hæc dividitur per singulos ordine Factores, manebit post singulas divisiones

$$\frac{Q}{x+a};\ \frac{Q}{x+b};\ \frac{Q}{x+c};\ \frac{Q}{x+d};\ \frac{Q}{x+e},\ \&c.$$

& quotientes erunt numero n. Nunc denotet $x+m$ ambigue singulos divisores hujus quotientis, vel singulos Factores æquationis Q, habebitur

$$\frac{Q}{x+m};\ \frac{Q}{x+m};\ \frac{Q}{x+m};\ \frac{Q}{x+m};\ \frac{Q}{x+m};\ \&c.$$

ad numerum n. Sed omnes exprimi debent. Fiet ergo $\frac{nQ}{x+m}$. Exprimat nunc $x+m$ unum e Factoribus æqualibus, & patebit propositum.

138 Ex observatis N°. 127. pag. 124. hujus, potest intelligi quod si esset

$$x+\omega = y^m + ay^{m-1} + by^{m-2} + cy^{m-3} \dots + py^3 + qy^2 + ry + s = Q.$$

Æquatio, quæ ex n radicibus æqualibus ipsius

$$(y^m + ay^{m-1} + by^{m-2} + cy^{m-3} \dots + py^3 + qy^2 + ry + s)^n = Q^n$$

unam adimit, est

$$ny\ (my^{m-1} + (m-1)ay^{m-2} + (m-2)by^{m-3} \dots + 3py^2 + 2qy + r) = nQ^{n-1}$$

Idem deduci potest ex N°. 124. pag. 121. 122. hujus.

Sed rem demonstrare non pigebit.

139. Sint æquationis Q Factores

 $y+$

$$y+\alpha;\ y+\beta;\ y+\gamma;\ y+\delta;\ \&c.$$

ad numerum m; vel sit

$$Q = y^m + ay^{m-1} + by^{m-2} \dots + py^3 + qy^2 + ry + s =$$
$$(y+\alpha)\ (y+\beta)\ (y+\gamma)\ (y+\delta).\ \&c.$$

quæritur quomodo exprimenda sit per Q æquatio ambigue repræsentans

$$(y+\alpha)^{n-1}(y+\beta)^n(y+\gamma)^n(y+\delta)^n\&c.;\ (y+\alpha)^n(y+\beta)^{n-1}(y+\gamma)^n(y+\delta)^n;\&c.;$$
$$(y+\alpha)^n(y+\beta)^n(y+\gamma)^{n-1}(y+\delta)^n\ \&c.;\ (y+\alpha)^n(y+\beta)^n(y+\gamma)^n(y+\delta)^{n-1};\&c;$$

&c.

Jam quantitas

$$my^{m-1} + (m-1)ay^{m-2} + (m-2)by^{m-3} \dots + 3py^2 + 2qy + r$$

ea est quæ oritur ex æquatione Q transformata ut N°. 137. pag. præcedente, atque ideo exponit ambigue

$$\frac{Q}{y+\alpha};\ \frac{Q}{y+\beta};\ \frac{Q}{y+\gamma};\ \frac{Q}{y+\delta};\ \&c.$$

Est autem

$$\frac{Q}{y+\alpha} = (y+\beta)\ (y+\gamma)\ (y+\delta)\ \&c.;\ \&$$
$$Q^{n-1} = (y+\alpha)^{n-1}\ (y+\beta)^{n-1}\ (y+\gamma)^{n-1}\ (y+\delta)^{n-1}\ \&c.$$

Quapropter

$$\frac{Q}{y+\alpha}\cdot Q^{n-1} = (y+\alpha)^{n-1}\ (y+\beta)^n\ (y+\gamma)^n\ (y+\delta)^n\ \&c.$$

Continet igitur $n-1$ Factores æquales ipsi $y+\alpha$. Sed ea ut completa habeatur, multiplicari debet per n. (N°. 132. hujus). Ergo &c.

Est autem $\frac{Q}{y+\alpha}$ dimensionum $m-1$, & Q^{n-1} dimensionum $mn-m$, quare quantitas inventa est dimensionum $mn-1$, ut debebat.

Sit, ut exemplum demus,

$$Q = x^3 - 11x^2 + 31x - 21 = 0$$

&,

&, elevando ad secundam potestatem,

$$Q^2 = x^6 - 22x^5 + 183x^4 - 724x^3 + 1423x^2 - 1302x + 441 = 0$$

Hæc multiplicata per exponentes, & divisa per x, fit

$$6x^5 - 110^4 + 732x^3 - 2172x^2 + 2846x - 1302 = 0 =$$

$$2(3x^2 - 22x + 31)\ (x^3 - 11x^2 + 31x - 21)$$

Ubi æquatio limitum propositæ est Factor unus

$$3x^2 - 22x + 31.$$

140. Si exponens ipsius Q est fractus, velut $\frac{n}{n+r}$, dico æquationem, quæ continet numerum Factorum æqualium unitate minorem quam ante, constare ex æquatione limitum ipsius Q ducta in exponentem fractum $\frac{n}{n+r}$, & in ipsius Q potestatem unitate minorem quam ante, cujus nempe exponens est $\frac{n}{n+r} - 1 = \frac{-r}{n+r}$.

Nam, quia exponens ipsius Q est $\frac{n}{n+r}$, ponitur Q^n constare e numero $n+r$ Factorum æqualium, qui eam restituunt inter se multiplicati, vel quorum unus evectus ad potestatem $n+r$ conficit ipsam Q^n. Sit ergo

$$Q^{\frac{n}{n+r}} = (y+\alpha)^{\frac{n}{n+r}}\ (y+\beta)^{\frac{n}{n+r}}\ (y+\gamma)^{\frac{n}{n+r}}\ \&c.$$

quæritur quomodo per Q & ejus potestates exponi debeat

$$(y+\alpha)^{\frac{-r}{n+r}}\ (y+\beta)^{\frac{n}{n+r}}\ (y+\gamma)^{\frac{n}{n+r}}\ \&c.$$

Jam est

$$Q = (y+\alpha)\ (y+\beta)\ (y+\gamma)\ \&c.,\ \&\ \frac{Q}{y+\alpha} = (y+\beta)\ (y+\gamma)\ (y+\delta)\ \&c.$$

atque

$$Q^{\frac{r}{r+n}} = (y+\alpha)^{\frac{r}{r+n}}\ (y+\beta)^{\frac{r}{r+n}}\ (y+\gamma)^{\frac{r}{r+n}}\ (y+\delta)^{\frac{r}{r+n}}\ \&c.$$

Quare

$$\frac{Q}{y+\alpha}.\,Q^{-\frac{r}{r+n}} = (y+\alpha)^{-\frac{r}{r+n}}\,(y+\beta)^{1-\frac{r}{r+n}}\,(y+\gamma)^{1-\frac{r}{r+n}}\,\&c.$$

Est autem $1 - \frac{r}{r+n} = \frac{r+n-r}{r+n} = \frac{n}{n+r}$. Quare patet propositum, quod pertinet ad ipsas quantitates.

Quod spectat ad coefficientem, toties repeti debet quantitas inventa, quoties divisor $y+\alpha$ continetur in $(y+\alpha)^{\frac{n}{n+r}}$, continetur autem $\frac{n}{n+r}$...ies; quia $y+\alpha$ est $\frac{n+r}{n}$ .. ma potestas ipsius $(y+a)^{\frac{n}{n+r}}$. Ergo &c.

Exemplum dabimus rationale sub forma irrationali, ut melius veritas theorematis dispiciatur. Est

$$(x^2-3x+2)^3 = x^6-9x^5+33x^4-63x^3+66x^2-36x+8 = 0 = Q,$$

quapropter

$$Q^{\frac{2}{3}} = (x^2-3x+2)^2,$$

Hujus æquatio radicum æqualium est

$$2(2x-3)\,(x^2-3x+2) = 4x^3-18x^2+26x-12$$

sed secundum regulam hujus numeri, æquatio radicum æqualium ipsius $Q^{\frac{2}{3}}$, est

$$\frac{2}{3}\,(6x^5-45x^4+132x^3-189x^2+132x-36)\;Q^{\frac{2}{3}-1}$$

Et $Q^{\frac{2}{2}-1} = Q^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{x^2-3x+2}$; per quam si dividatur præcedens, invenietur æquatio radicum æqualium, qualis esse debet.

141. Tandem quando æquatio proposita fracta est, qualem repræsentat $\frac{Q}{R}$, ejus æquatio radicum æqualium est excessus, quo factum e denominatore

tore R in æquationem radicum æqualium numeratoris Q superat factum vicissim e denominatoris R æquatione radicum æqualium in numeratorem Q, divisus per denominatoris quadratum.

Nam ponamus $\frac{Q}{R} = S$, æquatio radicum æqualium fractionis propositæ erit æqualis simili æquationi ipsius S. Est autem $Q = RS$; & æquatio radicum æqualium ipsius Q est factum ex R in æquationem radicum æqualium S, una cum facto ex æquatione radicum æqualium R in S (N°. 127. pag. 124. hujus). Ergo utrinque auferendo posterius factum, excessus, quo æquatio radicum æqualium ipsius Q superat factum ex S in æquationem radicum æqualium R, æqualis est facto ex R in æquationem radicum æqualium ipsius S; ac multiplicando per R, excessus quo factum ex R in æquationem radicum æqualium ipsius Q, superat factum ex RS, vel ex Q, in æquationem radicum æqualium ipsius R, æqualis est quadrato ipsius R multiplicato per æquationem radicum æqualium ipsius S, ac dividendo per quadratum R; &c.

142. Si quæritur æquatio, quæ contineat $n - 2$ Factores æquales, æquatio quæ continet $n - 1$ Factores æquales tractanda est secundum methodos jam traditas, & sic pergendum est donec unus supersit Factor æqualis.

142. Quare si æquatio sit integra & rationalis ordinis n, & ea habeat radices æquales numero q, ut una supersit radix æqualis, statim multiplicari potest per numerum $q - 1$ serierum arithmeticarum inter se ductarum in singulis terminis vel columnis.

$$n;\ n-1;\ n-2;\ n-3;\ n-4 \ldots 4;\ 3;\ 2;\ 1;\ 0$$

$$n-1;\ n-2;\ n-3;\ n-4;\ n-5 \ldots 3;\ 2;\ 1;\ 0$$

$$n-2;\ n-3;\ n-4;\ n-5;\ n-6 \ldots 2;\ 1;\ 0$$

&c.

143. Hic redit observatio N°. 119. pag. 120. hujus; nempe si tres sint radices æquales, evanescet tertius ab ultimo terminus transformatæ; etiam quartus si quatuor; &c. Cum autem hi termini deducantur quilibet e præcedente, multiplicando singulos præcedentis terminos per terminos seriei arithmeticæ divisos per eundem divisorem (N°. 19 pag. 62. hujus); & pro his terminis assumi possint termini alterius seriei arithmeticæ (N°. 110. pag. 114. 115. hujus), atque ideo multiplicis, hinc optime confirmatur Numerus præcedens.

Regulam hanc primus tradidit HUDDENIUS in epistola II. ad SCHOTENIUM, quæ est in CARTESII Geometria &c. latine edita Amstelodami ex Typographia Blaviana anno 1683. pag. 507. Auctor acutissimus eam traducit ad *maxima* & *minima*, (quod & nos statim facturi sumus,); aptat ad æquationes fractas, & ad eas, quæ plures incognitas complectuntur. Eandem demonstravit HUGENIUS (Oper. var. vol. 1. pag. 490. edit. Lugd. Batav. apud Jansonius van der Aa 1724).

144. Uterque pro fractionibus hanc tradit regulam. Quantitates cognitæ, si quæ adsint, deleantur, præter eas quæ sunt in fractionis denominatore. Quantitates reliquæ, si non habent eundem denominatorem, eo reducantur. Singuli termini numeratorem constituentes ducantur in singulos terminos denominatoris, & producta singula multipla sumantur secundum numerum, quo exponens incognitæ in termino numeratoris differt ab exponente ejusdem in termino denominatoris. Signa ponantur ex lege multiplicationis, quoties exponens numeratoris major est exponente denominatoris; quando secus, signa contraria. Hanc regulam recidere in illam, quam attulimus, facile patebit.

145. Si in æquatione, cujus radices positivæ sunt eædem quæ N°. 71. hujus (pag. 106., (nempe expressæ litteris græcis, & crescentes ab ultima ω, primam versus,) ordine, substituatur pro incognita quantitas a, major quam σ, & omnes præcedentes, ultimam versus, sed minor quam ϱ, & omnes sequentes primam versus; factum quod hinc orietur, constabit e differentiis

$$a-\omega;\ a-\psi;\ a-\chi;\ a-\phi\ \ldots\ a-\sigma;\ a-\varrho;\ a-\pi;\ \&c.$$

(N°. 91. hujus, pag. 111); quarum $a-\sigma$ & omnes quæ præcedunt ad sinistram, sunt positivæ, quia e majore a demuntur minores ω; ψ; χ; &c; sed $a-\varrho$; $a-\pi$; & reliquæ sequentes ad dextram, sunt negativæ, siquidem a minore a auferuntur majores ϱ; π; &c..

146. Quia hic tantum quæro facti quantitatem, non signum, (quandoquidem agitur de substitutione quantitatum quæ sunt inter duas proximas radices, & facta oriunda ex his substitutionibus habent idem signum, & quantitate comparanda sunt) assumam, pro negativis defectibus, excessus positivos $\varrho-a$; $\pi-a$, qui defectibus æquales sunt, sed oppositi.

147. Quo magis crescit a, eo magis crescunt primæ quantitates

$$a-\omega;\ a-\psi;\ a-\chi;\ a-\phi\ \ldots\ a-\sigma$$

& eo magis decrescunt aliæ illæ

$$\varrho-a;\ \pi-a;\ o-a;\ \&c.$$

Crescit igitur factum e primis, & decrescit factum ex aliis. Quare factum ex omnibus inde crescit, hinc decrescit.

148. Tamen hæc facta crescunt ad certum finem usque, deinde decrescunt.

Quoniam enim posuimus $a-\sigma$ ultimam quantitatum positivarum, etiam præcedens $a-\tau$ positiva est; & minimum $a-\sigma=1$; ac $a=\tau+1$; quia substituuntur numeri integri. Quapropter in prima substitutione Factores positivi erunt

$$\tau+1-\omega;\ \tau+1-\psi;\ \tau+1-\chi;\ \tau+1-\phi\ \ldots\ 1.$$

&

& Factores negativi, signis mutatis, atque ideo facti positivi,

$$\varrho-\tau-1;\ \pi-\tau-1;\ o-\tau-1;\ \xi-\tau-1;\ \nu-\tau-1;\ \mu-\tau-1;\ \&c.$$

Sed, quia substituuntur, ordine, numeri naturales, erunt in secunda substitutione Factores positivi

$$\tau+2-\omega;\ \tau+2-\psi;\ \tau+2-\chi;\ \tau+2-\varphi\ \ldots\ 2$$

& Factores negativi, pariter signis mutatis,

$$\varrho-\tau-2;\ \pi-\tau-2;\ o-\tau-2;\ \xi-\tau-2;\ \nu-\tau-2;\ \mu-\tau-2;\ \&c.$$

Singuli Factores positivi primæ substitutionis, minores sunt quam singuli Factores positivi respondentes secundæ substitutionis. Ergo hactenus factum e primis minus est quam factum e secundis, ut jam observatum est N°. præcedente. Præterea est

$$(\tau+2-\omega)(\tau+2-\psi)=(\tau+1-\omega)(\tau+1-\psi)+1\,(\tau+1-\omega)+1\,(\tau+1-\psi)+1=$$

$$AB+A+B+1$$

ponendo $+\tau+1-\omega=A$; & $\tau+1-\psi=B$.

Eodem pacto, factum e tribus

$$(AB+A+B+1)(\tau+2-\chi)=(AB+A+B)(\tau+1-\chi)+1\,(AB+A+B)+$$

$$1\,(\tau+1-\chi)+1=CD+C+D+1$$

ponendo $AB+A+B=C$; & $\tau+1-\chi=D$

149. Ergo quando factum ex omnibus Factoribus positivis primæ substitutionis exponitur per MN; factum e Factoribus omnibus positivis secundæ substitutionis exponendum erit per

$$MN+M+N+1.$$

150. Eodem pacto probabitur, quod quando factum ex omnibus Factoribus, qui erant negativi & facti sunt positivi mutatione signorum, primæ substitutionis, exponitur per PQ, factum respondens e Factoribus secundæ substitutionis, exponendum est per

$$PQ-P-Q+1.$$

Hoc autem factum positivum est, quia oritur e Factoribus positivis. Sed majus est quam unitas; nam hæc theoremata excludunt radices imaginarias, & si $\varrho-\tau$ esset quantitas minor quam unitas, esset $\varrho-\tau-1$ quantitas negativa; & si $\varrho-\tau=1$, esset $\varrho-\tau=0$; neutrum fieri potest in nostro casu.

Cum

Cum ergo sit $\varrho - \tau - 1$ major unitate, & $\pi - \tau - 1$ major quam $\varrho - \tau - 1$, &c; seu plures sint hujusmodi Factores, seu sit unus, semper erit $PQ - P - Q + 1$ major unitate, quare &

$$(MN + M + N + 1)\ (PQ - P - Q + 1) \text{ major quam } MNPQ$$

151. Crescunt ergo facta a primo ad secundum. Nunc demonstrandum ea pariter crescere ab ultimo ad penultimum. Quod est facilius. Cum enim debeat esse $a - \varrho$ quantitas negativa, minimum, erit $a - \varrho = -1$ & $a = \varrho - 1$. Tunc ergo ultimæ substitutionis Factores positivi erunt

$$\varrho - 1 - \omega;\ \varrho - 1 - \psi;\ \varrho - 1 - \chi;\ \varrho - 1 - \phi;\ \varrho - 1 - \upsilon:\ \&c\ \dots\ \varrho - \sigma - 1$$

& negativi, signis mutatis, ut supra

$$1;\ \pi - \varrho + 1;\ o - \varrho + 1;\ \xi - \varrho + 1;\ \nu - \varrho + 1;\ \mu - \varrho + 1;\ \&c.$$

Sed in penultima substitutione, Factores positivi

$$\varrho - 2 - \omega;\ \varrho - 2 - \psi;\ \varrho - 2 - \chi;\ \varrho - 2 - \phi;\ \varrho - 2 - \upsilon;\ \&c\ \dots\ \varrho - \sigma - 2$$

ac negativi, signis mutatis

$$2;\ \pi - \varrho + 2;\ o - \varrho + 2;\ \xi - \varrho + 2;\ \nu - \varrho + 2,\ \mu - \varrho + 2.\ \&c.$$

& ponendo, ut supra, facta ex ultimis MN ac PQ, facta e penultimis erunt $MN - M - N + 1$ ac $PQ + P + Q + 1$. Et quia $\varrho - \sigma - 2$ debet esse quantitas positiva, erit $\varrho - \sigma - 1$ major unitate, unde factum e penultimis majus facto ex ultimis.

152. Cum ergo facta crescant, tum incipiendo a primo ultimum versus, tum incipiendo ab ultimo primum versus, constat eadem, incipiendo a primo crescere ad certum finem usque, & deinde decrescere. Est ergo saltem unum factum omnium maximum.

153. Exponat littera y, facta quæ oriuntur e singulis substitutionibus. Erit ergo

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3}\ \dots\ + Px^3 + Qx^2 + Rx + S = y$$

vel

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3}\ \dots\ + Px^3 + Qx^2 + Rx \begin{matrix} +S \\ -y \end{matrix} = 0$$

Nunc, aut plures sunt ipsius y valores maximi, atque ideo æquales; aut unus est maximus.

Si plures sint maximi, habebit æquatio plures radices æquales. Si unus est maximus, duo erunt valores æquales hinc inde a maximo; nam, etiamsi per numerorum naturalium substitutionem facta crescant per saltum, reipsa crescunt

crescunt fluxu continuo. Si enim pro 1; 2; &c; ponerentur numeri 1; $1\frac{1}{2}$ vel 1, 5; 2,&c., factum medium inveniretur inter duo oriunda ex 1 & ex 2: si 1; $1\frac{1}{4}$ vel 1,25; $1\frac{1}{2}$ vel 1,50; $1\frac{3}{4}$ vel 1,75; 2, tria media invenirentur; & si numeri 1, & 2 exponerentur lineis, quæ crescunt fluxu continuo, innumerabilia. Quoniam autem eodem pacto decrescunt facta quo creverant, oportet ut duo sint hinc inde æqualia.

154. Sumatur igitur æquatio, quæ propositæ est radicum æqualium, & habebitur numerus radicum æqualium unitate minutus. Hæc ergo continebit maximum valorem. At hæc æquatio est ipsa æquatio limitum, quia hic ultimus terminus est $s - y$, qui evanescit dum multiplicatur per o. Ergo æquatio limitum continet maxima facta.

In exemplum assumamus æquationem

$$x^3 - 57x^2 + 936x - 3780 = 0$$

cujus radices sunt 6; 21; 30. Ex regula habetur

$$3x^2 - 114x + 936 = 0 = x^2 - 38x + 312$$

cujus radices sunt 12, & 26. Ponendo $x = 12$, propositæ factum sic facile invenitur

$$x^3 - 57x^2 = (x - 57)x^2 = (12 - 57)x^2 = -45x^2.$$

Et

$$x^3 - 57x^2 + 936x = -45x^2 + 936x = (-45x + 936)x =$$

$$(-540 + 936)x = +396x = 4752$$

unde auferendo 3780, manet factum + 972

sed ponendo $x = 11$, habetur

$$x^3 - 57x^2 = (x - 57)x^2 = (11 - 57)x^2 = -46x^2.$$

Item

$$-46x^2 + 936x = (-46x + 936)x = (-506 + 936)x = 430x = 4736,$$

unde auferendo 3780, manet factum + 950 priore minus

Item ponendo $x = 13$, est

$$x^3 - 57x^2 = (+13 - 57)x^2 = -44x^2;$$

&

$$-44x^2+956x = (-44x+956)x = (-572+936)x = +364x = 4732$$

unde auferendo 3780, manet factum 952, item priore minus.

Vix autem differunt duo facta 950, & 952; unde constat quod vel paulisper augendo 11, vel minuendo 13, magis accederetur ad æqualitatem. Ponatur nunc $x = 10$, habebitur

$$x^3 - 57x^2 = (10 - 57)x^2 = -47x^2$$

&

$$-47x^2+936x = (-47x+936)x = (-470+936)x = 4660$$

unde auferendo 3780, manet factum adhuc minus 880

Tandem ponatur $x = 14$, erit

$$x^3 - 57x^2 = (14 - 57)x^2 = -43x^2, \ \& \ -43x^2+936x =$$

$$(-602+936)x = 334x = 4676$$

unde auferendo 3780, manet factum 896, item minus.

Igitur tum augendo, tum minuendo numeros substitutos, facta minuuntur. Præterea factorum respondentium differentiæ augentur, quandoquidem duorum maximo proximorum differentia est 2; & remotiorum differentia est 16. Siquis autem poneret 9 & 15 differentiam factorum inveniret 54.

154. Vera quantitas media inter duas est earum summa dimidiata. Hinc statim recideremus in duas radices æquales, nam inter ω & ψ media est $\frac{\omega+\psi}{2}$; quæ substituta dat unam differentiam $\frac{\omega+\psi}{2} - \omega = \frac{\psi-\omega}{2}$, & aliam $\frac{\omega+\psi}{2} - \psi = \frac{\omega-\psi}{2}$, quæ sunt æquales, quamvis oppositæ. Sed hæ duæ radices, inter quas quæritur media, non sunt æquales; atque ideo proposita non habet radices æquales. Ergo ea, quæ secundum regulam deducitur e proposita, continere non potest unam e duabus radicibus æqualibus, quæ non sunt. Si vero vellemus ut educta habeat duas radices æquales, hæc multiplicari deberet per progressionem arithmeticam, & adduceret ad secundam æquationem limitum.

155. In exemplo N°. 153. attigi rationem substituendi numerum datum in æquatione proposita. Hæc ratio rem reddit facillimam, liberat a potestatum formatione, & aliquot multiplicationes tantum postulat. Ideo fusius explicanda videtur, cum nemini quod sciam, venerit in mentem, quod miror.

Huc

Huc tota res recidit, ut in unam summam cogantur duo termini proximi; statim primus & secundus; deinde horum summa & tertius, atque ita porro.

Sit æquatio generalis, ordinis n, consueta, & in ea pro x poni debeat a. Incipio a duobus terminis altissimis. Cum sit

$$x^n + Ax^{n-1} = x^{n-1}(x + A) = x^{n-1}(a + A);$$

pono α pro $a + A$. Igitur summa duorum priorum terminorum est αx^{n-1}; huic adjungatur tertius, eritque

$$\alpha x^{n-1} + Bx^{n-2} = x^{n-2}(\alpha x + B) = x^{n-2}(\alpha a + B);$$

fit $\alpha a + B = \beta$; summa trium priorum terminorum fiet βx^{n-2}; &, addendo quartum terminum, fiet

$$\beta x^{n-2} + Cx^{n-3} = x^{n-3}(\beta x + C) = x^{n-3}(\beta a + C);$$

ponatur $\beta a + C = \gamma$; erit γx^{n-3} summa quatuor priorum terminorum; & sic de reliquis.

156. Si nulli deficiant in æquatione termini, una erit multiplicatio, & una additio vel subductio (pro signis coefficientium) in conjunctione duorum terminorum continuorum. Deficiet additio vel subductio, si qui deficiunt termini in æquatione. Primus, ex. gr. terminus post Cx^{n-3}, sit Gx^{n-7}. Summa hactenus inventa, erat γx^{n-3}. Est ergo

$$\gamma x^{n-3} + Dx^{n-4} = x^{n-4}(\gamma x + D) = x^{n-4}(\gamma x + 0) = x^{n-4}\,\gamma a = \delta x^{n-4}$$

Item

$$\delta x^{n-4} + Ex^{n-5} = x^{n-5}(\delta x + E) = x^{n-5}(\delta x + 0) = x^{n-5}\,\delta a = \epsilon x^{n-5}$$

Pariter

$$\epsilon x^{n-5} + Fx^{n-6} = x^{n-6}(\epsilon x + F) = x^{n-6}(\epsilon x + 0) = x^{n-5}\,\epsilon a = \zeta x^{n-6}$$

Denique

$$\zeta x^{n-6} + Gx^{n-7} = x^{n-7}(\zeta x + G) = x^{n-7}(\zeta a + G) = x^{n-7}\,\eta;\ \&c.$$

Tamen, quando res facilior videbitur, omitti possunt termini nulli, hoc pacto

$$\gamma x^{n-3} + Gx^{n-7} = x^{n-7}(\gamma x^4 + G) = x^{n-7}(\gamma a^4 + G) = \&c.$$

157. Hinc demonstrari potest in genere theorema, quod tradi solet. *Æquationis maximus coefficiens negativus, unitate auctus, superat maximam propositæ radicem positivam.*

Sit æquatio, cujus omnes termini negativi, præter primum

$$x^n - Ax^{n-1} - Bx^{n-2} - Cx^{n-3} \ldots\ldots - Hx^{n-r} \ldots\ldots S = 0$$

& sit H maximus coefficientium negativorum. Fiat

$$x = y + H + 1$$

dico transformatam habere omnes coefficientes positivos; atque ideo (per Num 35. p 64. hujus,) esse $H+1$ majorem quavis radice positiva propositæ.

Nam, quia H major est quam A; B; C; D ... S; ponatur

$$-A = -H + \alpha;\ -B = -H + \beta;\ -C = -H + \gamma \ldots -S = -H + \epsilon$$

Fiet ergo proposita

$$x^n \begin{smallmatrix}-H\\+\alpha\end{smallmatrix} x^{n-1} \begin{smallmatrix}-H\\+\beta\end{smallmatrix} x^{n-2} \begin{smallmatrix}-H\\+\gamma\end{smallmatrix} x^{n-3} \ldots\ldots Hx^{n-r} \ldots \begin{smallmatrix}-H\\+\sigma\end{smallmatrix} = 0$$

Nunc assumatur exponens s, & pro x ponendo $H+1$; habebitur

$$(H+1)^s + (\alpha - H)(H+1)^{s-1} + (\beta - H)(H+1)^{s-2} + (\gamma - H)(H+1)^{s-3} + \&c.$$

Hujus summa invenietur positiva per regulam Ni. præcedentis. Est enim

$$(H+1)^s + (\alpha - H)(H+1)^{s-1} = (H+1+\alpha-H)(H+1)^{s-1} = (1+\alpha)(H+1)^{s-1}$$

summa duorum priorum terminorum. Sed

$$(1+\alpha)(H+1)^{s-1} + (\beta - H)(H+1)^{s-2} = ((1+\alpha)(H+1) + \beta - H)(H+1)^{s-2} =$$

$$(\alpha H + \alpha + H + 1 + \beta - H)(H+1)^{s-2} = (\alpha H + \alpha + \beta + 1)(H+1)^{s-2}$$

Et summa trium priorum terminorum est positiva; atque, pergendo, tota invenietur positiva

158. Quare, si omnes termini, post primum, negativi sunt, primus major est quam summa reliquorum; & fortius si inter eos aliqui sint positivi, qui vel primum positivum augent, vel reliquos negativos minuunt.

159. Ergo si tum primus, tum summa reliquorum multiplicetur per eundem numerum p; erit factum e primo termino in p majus quam factum e summa reliquorum pariter in p; & fortius si primus terminus ducatur in p; summa reliquorum in numerum minorem $p - q$; atque adhuc fortius, si primus terminus ducatur in p; secundus in $p - q$; tertius in $p - 2q$, & sic

sic semper minuendo numerum multiplicantem.

160. Hinc & ex N^{is} 16...19. pag. 61. 62. hujus, constat transformatæ coefficientes omnes esse positivos, & demonstratum est theorema propositum. Quando quidem *primo*, ponendo $s = n$, habebitur ultimus transformatæ terminus, positivus per N^{um} 157. Ponendo $s = n - 1$ habebitur coefficiens penultimi, cujus singuli termini ducendi sunt in singulos terminos progressionis arithmeticæ.

$$n;\ n-1;\ n-2;\ n-3;\ n-4;\ n-5;\ \&c.$$

& erit positivus per N^{um}. 159., per quem etiam inveniuntur positivi reliqui facile determinandi. *Secundo*, cum hæc vera sint de æquatione, cujus omnes termini sunt negativi, præter primum, fortius vera erunt de proposita, in qua sunt alii termini positivi. Tunc autem proposita habet plures radices positivas, & maximus negativus coefficiens, auctus unitate, superat earum maximam. Raro quidem satis prope accedit hic limes; tamen utilis esse potest.

161. Ex dictis constat nullos esse limites radicum imaginariarum. Siquidem limites, major & minor, substituti in æquatione dant facta alterne positiva & negativa (N°. 85. pag. 108. hujus); & nulla est quantitas, quæ substituta in æquatione, cujus radices omnes sunt imaginariæ, dat factum negativum, N^{is} 114...116. pag. 118. hujus.); fortius nulla quæ dat factum nihilo æquale; nam illud semper est positivum.

162. Si duæ radices sunt æquales, nulla est quantitas inter eas media, nempe minor quam una & major quam altera. Tunc autem æquatio limitum continet unam e duabus radicibus æqualibus, (N^{is} 119. 122. pag. 120. hujus;) eadem unam radicem habet nihilo æqualem (N°. 105. pag. 114. hujus.) Ergo radicum æqualium limes est vel o, vel una e radicibus æqualibus. Hinc

163. Quando tot inveniuntur limitum paria, quot sunt radices æquationis propositæ, nec o est limitum unus, æquatio habet omnes radices reales & inæquales.

164. Siquas radices æquales habet aliqua ex æquationibus limitum, etiam proposita habet radices æquales; & harum numerus facile determinatur. Proposita sit ordinis n, & æquatio limitum sit m..ma, vel ordinis $n - m$, quoniam æquatio limitum unitate depressior est quam præcedens; & prima unitate depressior quam proposita. Nunc æquatio limitum m..ma habeat radicum æqualium numerum p; numerus radicum æqualium in proposita erit $m + p$, quia unam aufert quævis æquatio limitum.

165. Quapropter siqua e radicibus alicujus æquationis limitum substituta in proposita, eam reddit nihilo æqualem, proposita habet aliquot radices æquales. Et si plures radices inæquales alicujus æquationis limitum substitutæ in proposita, eam reddant nihilo æqualem, plures sunt in proposita series radicum æqualium inter se; ita tamen ut una e radicibus æqualibus unius seriei, inæqualis sit uni e radicibus æqualibus alterius seriei.

166. Si æquatio limitum habet radices imaginarias, etiam proposita habet radices imaginarias. Nam si proposita haberet omnes radices reales, eæ substitutæ in æquatione limitum, darent facta alterne positiva & negativa (N°. 103. pag. 113. hujus;) quod est contra N^{um} 114... 116. pag. 118. hujus.

167. Sed si æquatio limitum nullas habet radices imaginarias, non ideo confici potest nullas esse imaginarias in proposita. Nam in æquatione rationali, duæ radices imaginariæ necessario conficiunt æquationem quadraticam rationalem (N^{is} 45. 47. & 48. pag. 19. & 20. hujus), quæ ideo habet radices imaginarias, quia terminus ultimus & positivus est & major quadrato dimidiati coefficientis pro secundo termino. Factum ex his omnibus invenitur in ultimo propositæ termino, quem delet multiplicatio per exponentem. Igitur fieri potest ut quantitas, quæ radices reddebat imaginarias, minuta sit, ita ut radices fiant reales.

168 Æquatio limitum statim est ejusdem ordinis ac proposita; &, cum dividi possit per $x = 0$, una radix imaginaria statim forte ablata est. Ergo tunc & alia, quæ eam semper comitatur.

169. Si proposita est ordinis paris, ejus prima æquatio limitum, ut & tertia, quinta, &c., est ordinis imparis; & habet saltem unam radicem realem (N°. 55. pag. 21. hujus;) ergo quævis æquatio limitum auferre potest duas radices imaginarias. Quare nunc, si duæ tantum sunt imaginariæ in proposita, ipsa prima limitum æquatio; si quatuor tertia, quinta si sex, & reliquæ sequentes nullam habere poterunt radicem imaginariam, a quibus tamen immunis non est proposita.

170. Si proposita est ordinis imparis, ejus prima æquatio limitum habere potest tot imaginarias radices, quot proposita; sed secunda æquatio limitum erit impar, & redibunt observata in N°. præcedente.

CA-

CAPUT V.

Æquationum Reductio per Divisores surdos.

I. Hactenus reductionem æquationum tradidi quæ rationales divisores admittunt. Sed antequam æquationem quatuor, sex, aut plurium dimensionum irreducibilem esse concludere possumus, tentandum erit etiam annon per surdum aliquem divisorem reduci queat; vel quod perinde est, tentandum erit annon æquatio ita in duas æquales partes dividi possit ut ex utrâque radix extrahatur. Id autem fiet per sequentem methodum.

II. *Dispone æquationem secundum dimensiones literæ alicujus, ita ut omnes ejus termini sub signis suis conjunctim æquales sint nihilo, & terminus altissimus affirmativo signo afficiatur. Deinde si æquatio* quadratica *sit (nam & hunc casum ob rei analogiam adjicere lubet) aufer utrobique terminum infimum, & adde quartam partem quadrati cognitæ quantitatis termini medii.*

Ut si æquatio sit $xx - ax - b = 0$, aufer utrobique $-b$ & adde $\frac{1}{4}aa$, & emerget

$$xx - ax + \frac{1}{4}aa = b + \frac{1}{4}aa,$$

&, extracta utrobique radice, fiet

$$x - \frac{1}{2}a = \pm\sqrt{(b + \frac{1}{4}aa)}, \text{ sive } x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(b + \frac{1}{4}aa)}.$$

III. *Quod si æquatio sit* quatuor dimensionum, *sit ea*

$$x^4 + px^3 + qxx + rx + s = 0,$$

ubi p, q, r, & s, *denotant cognitas quantitates terminorum æquationis signis propriis affectas. Fac*

$$q - \frac{1}{4}pp = \alpha;\quad r - \frac{1}{2}\alpha p = \beta.$$

$$s - \frac{1}{4}\alpha\alpha = \zeta.$$

Dein pone pro n communem aliquem terminorum β & 2ζ divisorem integrum, & non quadratum, qui & impar esse debet & per 4 *divisus unitatem relinquere, si terminorum p & r alteruter sit impar. Pone etiam pro k divisorem aliquem quantita-*

titatis $\frac{\beta}{n}$ *si p sit par; vel imparis divisoris dimidium si p sit impar; vel nihil, si dividuum* β *sit nihil. Aufer quotum de* $\frac{1}{2}pk$, *& reliqui dimidium dic l. Dein pro Q pone* $\frac{\alpha + nkk}{2}$, *& tenta si n dividat QQ* — *s*, *& quoti radix sit rationalis & æqualis l. Si hoc contigerit ad utramque partem æquationis adde*

$$nkkxx + 2nklx + nll,$$

& radicem extrahes utrobique, prodeunte

$$xx + \frac{1}{2}px + Q = n^{\frac{1}{2}} \text{ in } kx + l.$$

Exempli gratia, proponatur æquatio

$$x^4 + 12x - 17 = 0,$$

& quia p & q hic desunt, & r est 12, & s est -17, substitutis hisce numeris fiet $\alpha = 0$, $\beta = 12$, & $\zeta = -17$, & ipsorum β & 2ζ seu 12 & -34 communis divisor unicus, nimirum 2, erit n. Porro $\frac{\beta}{n}$ est 6, & ejus divisores 1, 2, 3, & 6 successive tentandi sunt pro k, & -3, $-\frac{3}{2}$, -1, $-\frac{1}{2}$ pro l respective. Est autem $\frac{\alpha + nkk}{2}$ id est kk æquale Q. Est & $\sqrt{(\frac{QQ - s}{n})}$, id est $\sqrt{(\frac{QQ + 17}{2})} = l$. Ubi numeri pares 2 & 6 scribuntur pro k, Q fit 4 & 36, & $QQ - s$ numerus erit impar adeoque dividi non potest per n seu 2. Quare numeri illi 2 & 6 rejiciendi sunt. Ubi vero 1 & 3 scribuntur pro k, Q fit 1 & 9, & $QQ - s$ fit 18 & 98, qui numeri dividi possunt per n, & quotorum radices extrahi. Sunt enim ± 3 & ± 7: quarum tamen sola -3 congruit cum l. Pono itaque $k = 1$, $l = -3$, & $Q = 1$, & quantitatem

$$nkkxx + 2nklx + nll, \text{ id est } 2xx - 12x + 18,$$

addo ad utramque partem æquationis, & prodit

$$x^4 + 2xx + 1 = 2xx - 12x + 18,$$

& extracta utrobique radice,

$$xx + 1 = x\sqrt{2} - 3\sqrt{2}.$$

Quod

Quod si radicis extractionem effugere malueris, pone

$$xx + \frac{1}{2}px + Q = \sqrt{n}(kx + l),$$

& invenietur ut ante

$$xx + 1 = \pm \sqrt{2}(x - 3).$$

Et ex hac æquatione si radices iterum extrahas proveniet

$x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2} \pm \sqrt{(-\frac{1}{2} \mp 3\sqrt{2},)}$ *h. e.* secundum signorum variationes,

$$x = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{(3\sqrt{2} - \frac{1}{2})}, \text{ \& } x = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \sqrt{(3\sqrt{2} - \frac{1}{2})}$$

Item

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{(-3\sqrt{2} - \frac{1}{2})}, \text{ \& } x = \frac{1}{2}\sqrt{2} - (\sqrt{-3\sqrt{2} - \frac{1}{2}}.)$$

Quæ quidem quatuor sunt radices æquationis sub initio propositæ,

$$x^4 + 12x - 17 = 0,$$

Sed earum ultimæ duæ sunt impossibiles.

Proponamus jam æquationem

$$x^4 - 6x^3 - 58xx - 114x - 11 = 0,$$

& scribendo -6, -58, -114, & -11 pro p, q, r, & s respective, orietur $-67 = \alpha$, $-315 = \beta$, & $-1133\frac{1}{4} = \zeta$. Numerorum β & 2ζ, seu -315 & $-\frac{4533}{2}$, communis divisor est unicus, adeoque hic erit n, & ipsius $\frac{\beta}{n}$, seu -105, divisores sunt 3, 5, 7, 15, 21, 35, & 105, qui itaque tentandi sunt pro k. Quare tento primum 3, & quotum -35, qui prodit dividendo $\frac{\beta}{n}$ per k, seu -105 per 3, subduco de $\frac{1}{2}pk$, seu $-3 . 3$, & restat 26; cujus dimidium 13 esse debet l. Sed $\frac{\alpha + nkk}{2}$, seu $\frac{-67 + 27}{2}$ (id est -20) erit Q; & $QQ - s$ erit 411, qui dividi potest per n, seu 3, sed quoti 137 radix non potest extrahi. Quamobrem rejicio 3 & tento 5 pro k.

Quotus qui jam prodit dividendo $\frac{\beta}{n}$ per k, seu -105 per 5, est -21, & huic subducendo de $\frac{1}{2}pk$, seu -3.5, restat 6, cujus dimidium 3 erit l. Est & Q, seu $\frac{\alpha+nkk}{2}$ id est $\frac{-67+75}{2}$, numerus 4. Et $QQ-s$, seu $16+11$ dividi potest per n; & quoti, qui est 9, radix extracta 3 congruit cum l. Quamobrem concludo esse $l=3$, $k=5$, $Q=4$, & $n=3$, & si

$$nkkxx+2nklx+nll, \text{ id est}, 75xx+90x+27$$

ad utramque partem æquationis addatur, radicem utrobique extrahi posse, & prodire

$$xx+\frac{1}{2}px+Q=\sqrt{n}(kx+l), \text{ seu}, xx-3x+4=\pm\sqrt{3}(5x+3),$$

& extracta iterum radice

$$x=\frac{3\pm5\sqrt{3}}{2}\pm\sqrt{(17\pm\frac{21\sqrt{3}}{2})}.$$

Haud secus si proponatur æquatio hæcce

$$x^4-9x^3+15xx-27x+9=0,$$

scribendo -9, $+15$, -27, & $+9$, pro p, q, r, & s respective, emerget $-5\frac{1}{4}=\alpha$, $-50\frac{5}{8}=\beta$, & $2\frac{7}{64}=\zeta$. Ipsorum β & 2ζ, seu $-\frac{405}{8}$ & $\frac{135}{32}$, communes divisores sunt 3, 5, 9, 15, 27, 45, & 135; sed 9 quadratus est, & 3, 15, 27, 135 divisi per numerum 4 non relinquunt unitatem, ut ob imparem terminum p oporteret. His itaque rejectis restant soli 5 & 45 tentandi pro n. Ponamus primo $n=5$, & ipsius $\frac{\beta}{n}$ seu $-\frac{81}{8}$ divisores impares dimidiati nempe $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{27}{2}$, $\frac{81}{2}$, tentandi erunt pro k. Si k ponatur $\frac{1}{2}$, quotus $-\frac{81}{4}$ qui prodit dividendo $\frac{\beta}{n}$ per k, subductus de $\frac{1}{2}pk$, seu $-\frac{9}{4}$, relinquit 18 pro $2l$, & $\frac{\alpha+nkk}{2}$, seu -2, est Q, & $QQ-s$, seu -5 dividi quidem potest per n, seu 5, sed quoti negativi -1 radix impossibilis est, quæ tamen deberet esse 9. Quare concludo k non esse $\frac{1}{2}$, & tento jam si sit $\frac{3}{2}$. Quotum qui oritur dividendo

do $\frac{\beta}{n}$ per k, seu $-\frac{81}{8}$ per $\frac{3}{2}$, nempe quotum $-\frac{27}{4}$, subduco de $\frac{1}{2}pk$, seu $-\frac{27}{4}$, & restat o. Unde l jam nihil erit. Est autem $\frac{\alpha+nkk}{2}$, seu 3, æqualis Q, & $QQ-s$ nihil est; unde rursus l, qui hujus $QQ-s$ divisi per n radix est, invenitur nihil. Quamobrem his ita quadrantibus concludo esse $n=5$, $k=\frac{3}{2}$, $l=0$, & $Q=3$, adeoque addendo ad utramque partem æquationis propositæ terminos

$$nkkxx+2nlkx+nll \text{ id est } \frac{45}{4}xx,$$

& radicem quadraticam utrobique extrahendo, prodire

$$xx+\frac{1}{2}px+Q=\sqrt{n}(kx+l), \text{ id est } xx-4\frac{1}{2}x+3=\sqrt{5}.\frac{3}{2}x.$$

IV. *Eadem methodo reducuntur etiam æquationes literales.* Ut si fuerit

$$x^4-2ax^3\begin{matrix}+2aa\\-cc\end{matrix}xx-2a^3x+a^4=0,$$

substituendo $-2a$, $2aa-cc$, $-2a^3$, & $+a^4$, pro p, q, r, & s respective, obtinebuntur $aa-cc=\alpha$, $-acc-a^3=\beta$, & $\frac{3}{4}a^4+\frac{1}{2}aacc-\frac{1}{4}c^4=\zeta$. Quantitatum β & 2ζ divisor communis est $aa+cc$ qui proinde erit n; & $\frac{\beta}{n}$, seu $-a$, divisores habet 1 & a. Sed quia n duarum est dimensionum, & $k\sqrt{n}$ non nisi unius esse debet, ideo k nullius erit, adeoque non potest esse a. Sit ergo $k=1$, & diviso $\frac{\beta}{n}$ per bb aufer quotum $-a$ de $\frac{1}{2}pk$, seu $-a$ & restabit nihil pro l. Porro $\frac{\alpha+nkk}{2}$, seu aa, est Q, & $QQ-s$ seu, a^4-a^4, nihil est; & inde rursus prodit nihil pro l. Quod arguit quantitates n, k, l, & Q, recte inventas esse; & additis ad utramque partem æquationis propositæ terminis

$$nkkxx+2nklx+nll, \text{ id est, } aaxx+ccxx,$$

radicem utrobique extrahi posse, & extractione illa prodire

$$xx+\frac{1}{2}px+Q=\sqrt{n}(kx+l), \text{ id est } xx-ax+aa=\pm x\sqrt{(aa+cc)}.$$

Et extracta iterum radice

$x=$

$x = \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{(aa+cc)} +$ vel $- \sqrt{((\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa \pm \frac{1}{2}a)\ \sqrt{(aa+cc.)})}$.

V. Hactenus regulam applicui ad extractionem *radicum surdarum:* potest tamen eadem ad extractionem etiam *rationalium* applicari, si modo pro quantitate n usurpetur unitas; eoque pacto una vice examinare possumus utrum æquatio fractis & surdis terminis carens divisorem aliquem duarum dimensionum aut rationalem aut surdum admittat. Ut æquatio.

$$x^4 - x^3 - 5xx + 12x - 6 = 0$$

proponatur, substituendo -1, 5, $+12$, &-6, pro p, q, r, & s respective invenientur $-5\frac{1}{4} = \alpha$, $9\frac{3}{8} = \beta$, & ponendo $n = 1$, quantitatis $\frac{\beta}{n}$, seu $\frac{75}{8}$, divisores sunt 1, 3, 5, 15, 25, 75: quorum dimidia (siquidem p sit impar) tentanda sunt pro k. Et si pro k tentemus $\frac{5}{2}$, fiet $\frac{1}{2}pk - \frac{\beta}{nk} = -5$, & ejus dimidium $-\frac{5}{2} = l$. Item $\frac{\alpha + nkk}{2} = \frac{1}{2} = Q$, & $\frac{QQ - s}{n} = 6\frac{1}{4}$, cujus radix congruit cum l.

Concludo itaque quantitates n, k, l, Q, recte inventas esse; & additis ad utramque partem æquationis terminis

$$nkkxx + 2nklx + nll, \text{ id est } 6\frac{1}{4}xx - 12\frac{1}{2}x + 6\frac{1}{4},$$

radicem utrobique extrahi posse; & extractione illa prodire

$$xx + \frac{1}{2}px + Q = \pm \sqrt{n}(kx+l), \text{ id est } xx - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \pm 1(2\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}),$$

seu

$$xx - 3x + 3 = 0, \ \& \ xx + 2x - 2 = 0,$$

adeoque per hasce duas æquationes quadraticas æquationem propositam quadrato-quadraticam dividi posse. Sed hujusmodi divisores rationales expeditius inveniuntur per aliam methodum supra traditam.

VI. Si quando quantitatis $\frac{\beta}{n}$ multi sunt divisores ita ut omnes pro k tentare molestum fuerit, potest eorum numerus cito minui quærendo omnes divisores quantitatis $\alpha s - \frac{1}{4}rr$. Nam horum alicui, aut imparis alicujus dimidio

midio, debet quantitas Q æqualis esse. Sic in exemplo novissimo $\alpha s - \frac{1}{4}rr$ est $-\frac{9}{2}$; e cujus divisoribus 1, 3, 9, aut iisdem dimidiatis $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$, aliquis debet esse Q. Quare singillatim tentando quantitatis $\frac{\beta}{n}$ divisores dimidiatos $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{15}{2}$, $\frac{25}{2}$, & $\frac{75}{9}$, pro k, rejicio omnes qui non efficiunt $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}nkk$, seu $-\frac{21}{8} + \frac{1}{2}kk$; id est Q, esse aliquem e numeris 1, 3, 9, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$. Scribendo autem $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{15}{2}$, &c. pro k, prodeunt respective $-\frac{5}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $+\frac{51}{2}$, &c. pro Q, e quibus soli $-\frac{3}{2}$ & $\frac{1}{2}$ reperiuntur in prædictis numeris, 1, 3, 9, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$ adeoque, ceteris rejectis, aut erit $k = \frac{3}{2}$, & $Q = -\frac{3}{2}$ aut $k = \frac{5}{2}$, & $Q = \frac{1}{2}$. Qui duo casus examinentur. Atque hactenus de æquationibus *quatuor* dimensionum.

VII. *Si æquatio sex dimensionum reducenda est*, sit ea

$$x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sxx + tx + v = 0,$$

& fac

$$q - \frac{1}{4}pp = \alpha. \quad r - \frac{1}{2}p\alpha = \beta. \quad s - \frac{1}{2}p\beta = \gamma.$$

$$\gamma - \frac{1}{4}\alpha\alpha = \zeta. \quad t - \frac{1}{2}\alpha\beta = \eta. \quad v - \frac{1}{4}\beta\beta = \theta.$$

$$\zeta\theta - \frac{1}{4}\eta\eta = \lambda.$$

Dein sumatur pro n, communis aliquis terminorum 2ζ, η, 2θ, divisor integer & non quadratus, nec per numerum quadratum divisibilis, qui etiam per numerum 4 divisus relinquit unitatem; si modo terminorum p, r, t aliquis sit impar. Pro k sumatur divisor aliquis integer quantitatis $\frac{\lambda}{2nn}$ si p sit par, vel divisoris imparis dimidium si p sit impar, vel nihil si λ nihil sit. Pro Q, quantitas $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}nkk$. Pro l divisor aliquis quantitatis

$\frac{Qr - QQp - t}{n}$, si Q sit integer, vel divisoris imparis dimidium, si Q sit fractus denominatorem habens numerum 2; vel nihil, si dividuum istud $\frac{Qr - QQp - t}{n}$ sit nihil. Et pro R quantitas $\frac{1}{2}r - \frac{1}{2}Qp + nkl$. Dein tenta si $RR - v$ dividi possit per n, & quoti radix extrahi; & praeterea si radix ista aequalis sit tam quantitati $\frac{QR - \frac{1}{2}t}{nl}$ quam quantitati $\frac{QQ + pR - nll - s}{2nk}$. Si haec omnia evenerint, dic radicem illam m; & vice aequationis propositae scribe hanc

$$x^3 + \frac{1}{2}pxx + Qx + R = \pm \sqrt{n}(kxx + lx + m).$$

Etenim haec aequatio, quadrando partes & auferendo utrobique terminos ad dextram, producet aequationem propositam. Quod si ea omnia in nullo casu evenerint, reductio erit impossibilis, si modo prius constet aequationem per divisorem rationalem reduci non posse.

Exempli gratia, proponatur aequatio

$$x^6 - 2ax^5 + 2bbx^4 + 2abbx^3 \begin{matrix} -2aabb \\ +2a^3b \\ -4ab^3 \end{matrix} xx \begin{matrix} +3aab^4 \\ -a^4bb \end{matrix} = 0,$$

& scribendo

$$-2a;\ +2bb;\ +2abb;\ -2aabb + 2a^3b - 4ab^3;$$

$$0;\ \&\ 3aab^4 - a^4bb \text{ pro } p,\ q,\ r,\ s,\ t,\ \&\ v$$

respective, prodibunt

$$2bb - aa = \alpha;\ 4abb - a^3 = \beta;\ 2a^3b + 2aabb - 4ab^3 - a^4 = \gamma;$$

$$-b^4 + 2a^3b + 3aabb - 4ab^3 - \frac{5}{4}a^4 = \zeta;$$

$$-\frac{1}{2}a^5 + 3a^3bb - 4ab^4 = \eta;\ \&\ -aab^4 + a^4bb - \frac{1}{4}a^6 = \theta.$$

Et terminorum 2ζ, η, & 2θ communis divisor est $aa - 2bb$, seu $2bb - aa$ perinde ut aa vel $2bb$ majus sit. Sed esto aa majus quam $2bb$, & $aa - 2bb$ erit n. Debet enim n semper affirmativum esse. Porro

ζ

$$\frac{\zeta}{n} \text{ eſt } -\frac{5}{4}aa+2ab+\frac{1}{2}bb;$$

$$\frac{\eta}{n} \text{ eſt } -\frac{1}{2}a^3+2aab; \ \& \ \frac{\theta}{n} \text{ eſt } \frac{1}{4}a^4+\frac{1}{2}aabb;$$

adeoque

$$\frac{\zeta}{2n} \cdot \frac{\theta}{n} - \frac{\eta\eta}{8nn} \text{ ſeu } \frac{\lambda}{2nn}$$

eſt

$$\frac{1}{8}a^6-\frac{1}{4}a^5b-\frac{1}{8}a^4bb+\frac{1}{2}a^3b^3-\frac{3}{8}aab^4,$$

cujus diviſores ſunt 1, a, aa; ſed quia $\sqrt{n}.k$ non niſi unius dimenſionis eſſe poteſt, & $\sqrt{n}$ unius eſt, ideo k nullius erit; proinde non niſi numerus eſſe poteſt. Quare rejectis a & aa, reſtat ſolum 1 pro k. Præterea $\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}nkk$ dat nihil pro Q, & $\frac{Qr-QQp-t}{n}$ etiam nihil eſt; adeoque l, qui ejus diviſor eſſe debet, erit nihil. Denique $\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}pQ+nkl$ dat abb pro R. Et RR $-v$, eſt $-2aabv+avbb$, quod dividi poteſt per n ſeu $aa-2bb$, & quoti $aabb$ radix extrahi, & radix illa negative ſumpta, nempe $-ab$, indefinitæ quantitati $\frac{QR-\frac{1}{2}t}{nl}$, ſeu $\frac{0}{0}$, non eſt inæqualis, quantitati vero definitæ $\frac{QQ+pR-nll-s}{2nk}$ æqualis eſt. Quamobrem radix illa, $-ab$, eſt m; & loco æquationis propoſitæ ſcribi poteſt

$$x^3+\frac{1}{2}pxx+Qx+R = \sqrt{n}\,kxx+lx+m),$$

id eſt

$$x^3-axx+abb = \sqrt{(aa-2bb)}.(xx-ab).$$

Cujus concluſionis veritatem probare potes quadrando partes æquationis inventæ & auferendo terminos ad dextram ex utraque parte. Ea enim operatione producetur æquatio

$$x^6-2ax^5+2bbx^4+2abbx^3 \begin{matrix} -2a^2b^2x^2 \\ +2a^3bx^2 \\ -4ab^3x^2 \end{matrix} \begin{matrix} +3a^2b^4 \\ -a^4b^2 \end{matrix} = 0$$

quæ

quæ reducenda proponebatur.

VIII. *Si æquatio eſt* octo *dimenſionum*, *ſit ea*

$$x^8+px^7+qx^6+rx^5+sx^4+tx^3+vxx+wx+z=0,$$

& fiat

$$q-\frac{1}{4}pp=\alpha;\ r-\frac{1}{2}p\alpha=\beta;\ s-\frac{1}{2}p\beta-\frac{1}{2}\alpha\alpha=\gamma;$$

$$t-\frac{1}{2}p\gamma-\frac{1}{2}\alpha\beta=\delta;\ v-\frac{1}{2}\alpha\gamma-\frac{1}{4}\beta\beta=\epsilon;$$

$$w-\frac{1}{2}\beta\gamma=\zeta;\ \&\ z-\frac{1}{4}\gamma\gamma=\eta.$$

Et terminorum 2δ, 2ϵ, 2ζ, 8η, quære communem diviſorem qui integer ſit, & non quadratus nec per quadratum diviſibilis, quique etiam per 4 diviſus relinquat unitatem, ſi modo terminorum alternorum p, r, t, w aliquis ſit impar. Si nullus eſt ejuſmodi diviſor communis, certum eſt æquationem per extractionem ſurdæ radicis quadraticæ reduci non poſſe, & ſi non poteſt ea ita reduci, vix occurret illarum omnium quatuor quantitatum diviſor communis. Opuſculum igitur hactenus inſtitutum examinatio quædam eſt utrum æquatio reducibilis ſit necne, adeoque cum ejuſmodi reductiones raro poſſibiles ſint, finem operi ut plurimum imponet.

IX. *Et ſimili ratione ſi æquatio ſit decem, duodecim, vel plurium dimenſionum, impoſſibilitas reductionis cognoſci poteſt.*

Ut ſi ea ſit

$$x^{10}+px^9+qx^8+rx^7+sx^6+tx^5+vx^4+ax^3+bxx+cx+d=0,$$

faciendum erit

$$q-\frac{1}{4}pp=\alpha;\ r-\frac{1}{2}p\alpha=\beta;\ s-\frac{1}{2}p\beta-\frac{1}{4}\alpha\alpha=\gamma;$$

$$t-\frac{1}{2}p\gamma-\frac{1}{2}\alpha\beta=\delta;\ v-\frac{1}{2}p\delta-\frac{1}{2}\alpha\gamma-\frac{1}{4}\beta\beta=\epsilon;\ a-\frac{1}{2}\alpha\delta-\frac{1}{2}\beta\gamma=\zeta$$

$$b-\frac{1}{2}\beta\delta-\frac{1}{4}\gamma\gamma=\eta;\ c-\frac{1}{2}\gamma\delta=\theta,\ d-\frac{1}{4}\delta\delta=\kappa;$$

& quærendus communis diviſor terminorum quinque 2ϵ, 2ζ, 8η, 4θ, 8κ, qui integer ſit & non quadratus, quique etiam per 4 diviſus relinquat unitatem, ſi modo terminorum alternorum p, r, t, a, c aliquis ſit impar.

X.

X. Sic si *duodecim* dimensionum æquatio sit

$$x^{12}+px^{11}+qx^{10}+rx^{9}+sx^{8}+tx^{7}+vx^{6}+ax^{5}+bx^{4}+cx^{3}+dxx+ex+f=0,$$

faciendum erit

$$q-\frac{1}{4}pp=\alpha;\ r-\frac{1}{2}p\alpha=\beta;\ s-\frac{1}{2}p\beta-\frac{1}{4}\alpha\alpha=\gamma;$$

$$t-\frac{1}{2}p\gamma-\frac{1}{2}\alpha\beta=\delta;\ v-\frac{1}{2}p\delta-\frac{1}{2}\alpha\gamma-\frac{1}{4}\beta\beta=\epsilon;$$

$$a-\frac{1}{2}p\epsilon-\frac{1}{2}\alpha\delta-\frac{1}{2}\beta\gamma=\zeta;\ b-\frac{1}{2}\alpha\epsilon-\frac{1}{2}\beta\delta-\frac{1}{4}\gamma\gamma=\eta;$$

$$c-\frac{1}{2}\beta\epsilon-\frac{1}{2}\gamma\delta=\theta;\ d-\frac{1}{2}\gamma\epsilon-\frac{1}{4}\delta\delta=\kappa;\ e-\frac{1}{2}\delta\epsilon=\lambda;\ f-\frac{1}{4}\epsilon\epsilon=\mu;$$

& quærendus communis divisor integer & non quadratus terminorum sex 2ζ, 8η, 4θ, 8κ, 4λ, 8μ, qui per 4 divisus relinquat unitatem, si modo terminorum p, r, t, a, c, e, aliquis sit impar.

XI. Atque ita in infinitum progredi licebit: & æquatio proposita semper per extractionem surdæ radicis quadraticæ irreducibilis erit, ubi ejusmodi divisor communis nullus est. Siquando vero ejusmodi divisor n inventus spem faciat futuræ reductionis, potest ea institui insistendo vestigiis operis quod in æquatione octo dimensionum subjungimus.

Quære numerum quadratum cui per n multiplicato ultimus æquationis terminus z, sub signo proprio adnexus, quadratum numerum efficit. Id autem expedite fiet si ad z, ubi n est par, vel ad $4z$, ubi n est impar, successive addantur n, $3n$, $5n$, $7n$, $9n$, $11n$, & deinceps, donec summa æqualis fiat numero alicui in tabula numerorum quadratorum, quam ad manus esse suppono. Et si nullus ejusmodi quadratus numerus prius occurrit quam summæ illius radix quadratica, aucta radice quadratica excessus illius summæ supra ultimum æquationis terminum, quadruplo major sit quam maximus terminorum æquationis propositæ p, q, r, s, t, v, &c., non opus erit rem ultra tentare. Æquatio enim reduci non potest. Sed si ejusmodi numerus quadratus prius occurrit, sit ejus radix S, si n est par; vel 2S, si n est impar; & $\sqrt{\frac{SS-z}{n}}$ dic h. Debent autem S & h esse numeri integri, si n est par, at si n impar est, possunt esse fracti denominatorem habentes numerum binarium. Et si unus eorum fractus est, alter fractus esse debet. Quod idem de numeris R & m, Q & l, p & k, post inveniendis, observandum est. Et omnes numeri S & h, qui intra præfatum limitem inveniri possunt, in catalogum referendi sunt.

Postea pro k tentandi sunt omnes numeri successive, qui non efficiunt

$nk \pm \frac{1}{2}p$, quadruplo majus quam maximus terminus æquationis, & ponendum est in omni casu $\frac{nkk+\alpha}{2} = Q$. Dein pro l tentandi sunt successive numeri omnes, qui non efficiunt $nl \pm Q$ quadruplo majus quam maximus terminus æquationis, & in omni tentamine ponendum $\frac{-npkk+2\beta}{4} + nkl = R$. Denique pro m tentandi sunt successive omnes numeri qui non efficiunt $nm \pm R$ quadruplo majus quam maximus terminorum æquationis, & videndum an in casu quovis, si fiat

$$s - QQ - pR + nll = 2H, \; \& \; H + nkm = S,$$

sit S aliquis numerorum qui prius pro S in catalogum relati erant; & præterea si alter numerus ei S respondens, qui pro h in eundem catalogum relatus erat, sit his tribus

$$\frac{2RS-w}{2nm}; \quad \frac{2QS+RR-v-nmm}{2nl}, \quad \& \quad \frac{pS+2QR-t-2nlm}{2nk}$$

æqualis. Si hæc omnia in aliquo casu evenerint, vice æquationis propositæ scribenda erit hæcce

$$x^4 + \frac{1}{2}px^3 + Qxx + Rx + S = \sqrt{n}(kx^3 + lxx + mx + h)$$

Exempli gratia proponatur æquatio

$$x^8 + 4x^7 - x^6 - 10x^5 + 5x^4 - 5x^3 - 10xx - 10x - 5 = 0:$$

Et erit

$$q - \frac{1}{4}pp = -1 - 4 = -5 = \alpha; \; r - \frac{1}{2}p\alpha = -10 + 10 = 0 = \beta;$$

$$s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{4}\alpha\alpha = 5 - \frac{25}{4} = -\frac{5}{4} = \gamma; \; t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}\alpha\beta = -5 + \frac{5}{2} = -\frac{5}{2} = \delta;$$

$$v - \frac{1}{2}\alpha\gamma - \frac{1}{4}\beta\beta = -10 - \frac{25}{8} = -\frac{105}{8} = \epsilon; \; w - \frac{1}{2}\beta\gamma = -10 = \zeta;$$

$$z - \frac{1}{4}\gamma\gamma = -5 - \frac{25}{64} = -\frac{345}{64} = \eta.$$

Ergo

2δ;

2δ; 2ι, 2ζ; 8η; respective, sunt -5; $-\frac{105}{4}$; -20; & $-\frac{345}{8}$, & earum divisor communis 5, qui per 4 divisus relinquit 1, perinde ut, ob terminum imparem 5, oportuit. Cum itaque inventus sit divisor communis n, seu 5, qui spem facit futuræ reductionis, quoniam iste impar est,

ad $4z$, seu -20, successive addo n; $3n$; $5n$; $7n$; $9n$; &c.

seu

5; 15; 25; 35; 45; &c.

& prodeunt

-15; 0; 25; 60; 105; 160; 225; 300; 385; 480; 585; 700; 825; 960; 1105; 1260; 1425; 1600.

Ex quibus solum

0; 25; 225; & 1600

quadrati sunt. Quare horum radices dimidiatæ 0; $\frac{5}{2}$; $\frac{15}{2}$; 20; in catalogum referendæ sunt pro S, & $\sqrt{(\frac{SS-z}{n})}$, id est 1; $\frac{3}{2}$; $\frac{7}{2}$; 9, respective pro b. Sed quia $S+nb$, si scribatur 20 pro S & 9 pro b, fit 65, numerus major quadruplo maximi terminorum æquationis, ideo rejicio 20 & 9, & reliquos solum refero in tabulam ut sequitur.

b	1;	$\frac{3}{2}$;	$\frac{7}{2}$;
S	0;	$\frac{5}{2}$;	$\frac{15}{2}$;

His ita dispositis, tento pro k numeros omnes qui non efficiunt $\frac{1}{2}p \pm nk$, seu $2 \pm 5k$, majus quadruplo maximi termini æquationis 40, id est numeros

-8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7;

ponendo

$\frac{nkk+a}{2}$, seu, $\frac{5kk-5}{2}$.

V 2 id

id est numeros

$$\frac{315}{2};\ 120;\ \frac{175}{2};\ 60;\ \frac{75}{2};\ 20;\ \frac{15}{2};\ 0;\ -\frac{5}{2};\ 0;\ \frac{15}{2};\ 20;\ \frac{75}{2};\ 60;\ \frac{175}{2};\ 120.$$

respective pro Q. Imo vero, cum $Q \pm nl$, & multo magis Q, non debeat majus esse quam 40, rejiciendos esse sentio

$$\frac{315}{2};\ 120;\ \frac{175}{2};\ \&\ 60;$$

& qui his respondent

$$-8;\ -7;\ -6;\ -5;\ 5;\ 6;\ 7;$$

adeoque solos

$$-4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;$$

pro k

&

$$\frac{75}{2};\ 20;\ \frac{15}{2};\ 0;\ -\frac{5}{2};\ 0;\ \frac{15}{2};\ 20;\ \frac{75}{2};$$

pro Q respective tentandos. Tentemus autem -1 pro k & 0 pro Q, & in hoc casu pro l tentandi deinceps erunt successive omnes numeri qui non efficiunt $Q \pm nl$ majus quam 40, id est omnes numeri inter 10 & -10, & pro R respective numeri

$$\frac{2\beta - npkk}{4} + nkl,\ \text{seu}\ -5 - 5l$$

id est

$$-55;\ -50;\ -45;\ -40;\ -35;\ -30;\ -25;\ -20;\ -15;\ -10;\ -5;\ 0;$$

$$5;\ 10;\ 15;\ 20;\ 25;\ 30;\ 35;\ 40;\ 45;$$

quorum tamen tres priores & ultimum, quia majores quam 40, negligere licebit. Tentemus autem -2 pro l & 5 pro R, & in hoc casu pro m tentandi præterea erunt omnes numeri qui non efficiunt $R \pm nm$ seu $5 \pm 5m$ majus quam 40, id est numeri omnes inter 7 & -9, & videndum an si ponendo

$$s - QQ - pR + nll,\ \text{id est,}\ 5 - 20 + 20,\ \text{seu},\ 5 = 2H,$$

sit

fit $H+nkm$, seu, $\frac{5}{2}-5m=S$, id est, si ex his numeris

$$-\frac{65}{2};\ -\frac{55}{2};\ -\frac{45}{2};\ -\frac{35}{2};\ -\frac{25}{2};\ -\frac{15}{2};\ -\frac{5}{2};$$

$$\frac{5}{2};\ \frac{15}{2};\ \frac{25}{2};\ \frac{35}{2};\ \frac{45}{2};\ \frac{55}{2};\ \frac{65}{2};\ \frac{75}{2};\ \frac{85}{2};$$

aliquis æqualis sit alicui numerorum o; $\pm\frac{5}{2}$; $\pm\frac{15}{2}$; qui prius in tabulam pro S relati erant. Et hujusmodi quatuor occurrunt

$$-\frac{15}{2};\ -\frac{5}{2};\ \frac{5}{2};\ \frac{15}{2}.$$

quibus respondent

$$\pm\frac{7}{2};\ \pm\frac{3}{2};\ \pm\frac{3}{2};\ \pm\frac{7}{2};$$

pro b in eadem tabula scripti, ut & 2; 1; 0; -1 pro m substituti. Verum tentemus $-\frac{5}{2}$ pro S, 1 pro m, & $\pm\frac{3}{2}$ pro b, & fiet

$$\frac{2RS-w}{2nm}=\frac{-25+10}{10}=-\frac{3}{2},$$

&

$$\frac{2QS+RR-v-nmm}{2nl}=\frac{25+10-5}{-20}=-\frac{3}{2},$$

&

$$\frac{pS+2QR-t-2nlm}{2nk}=\frac{-10+5+20}{-10}=-\frac{3}{2},$$

Quare cum prodeat omni casu $-\frac{3}{2}$, seu b, concludo numeros omnes recte inventos esse, adeoque vice æquationis propositæ scribendum esse

$$x^4 + \frac{1}{2}px^3 + Qxx + Rx + S = \sqrt{n}(kx^3 + lxx + mx + b),$$

id eſt

$$x^4 + 2x^3 + 5x - 2\frac{1}{2} = \sqrt{5}(-x^3 - 2xx + x - 1\frac{1}{2}).$$

Etenim quadrando partes hujus, producetur æquatio illa octo dimenſionum quæ ſub initio proponebatur.

XII. Quod ſi tentando caſus omnes numerorum, prædicti valores omnes ipſius b nullo in caſu inter ſe conſenſiſſent, argumento fuiſſet æquationem per extractionem ſurdæ radicis quadraticæ reduci non potuiſſe.

XIII. Deberent autem aliqua hic in operis abbreviationem annotari, ſed quæ brevitatis cauſa prætereo, cum tantarum reductionum perexiguus ſit uſus, & rei poſſibilitatem potius quam praxin commodiſſimam voluerim exponere. Sunt igitur hæ reductiones æquationum per extractionem *ſurdæ radicis quadraticæ*.

XIV. Adjungere jam liceret reductiones æquationum per *extractionem ſurdæ radicis cubicæ*, ſed & has, ut quæ perraro utiles ſint, brevitatis gratia prætereo.

XV. Sunt tamen reductiones quædam *cubicarum æquationum* vulgo notæ, quas, ſi penitus præterirem, Lector fortaſſe deſideraret. Proponatur æquatio cubica

$$x^3 * + qx + r = 0,$$

cujus ſecundus terminus deeſt. Ad hanc enim formam æquationem omnem cubicam reduci poſſe conſtat ex præcedentibus. Et ſupponatur x eſſe $= a + b$. Erit

$$a^3 + 3aab + 3abb + b^3 \text{ (id eſt } x^3) + qx + r = 0.$$

Sit

$$3aab + 3abb \text{ (id eſt } 3abx) + qx = 0,$$

& erit

$$a^3 + b^3 + r = 0.$$

Per priorem æquationem eſt $b = -\frac{q}{3a}$, & cubice $b^3 = -\frac{q^3}{27a^3}$. Ergo per poſteriorem eſt

$$a^3 - \frac{q^3}{27a^3} + r = 0, \text{ ſeu } a^6 + ra^3 = \frac{q^3}{27},$$

&

& per extractionem affectæ radicis quadraticæ

$$a^3 = -\frac{1}{2}r \pm \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{q^3}{27})}.$$

Extrahe radicem cubicam & habebitur a. Et supra erat, $-\frac{q}{3a} = b$, & $a + b = x$. Ergo $a - \frac{q}{3a}$ radix est æquationis propositæ.

Exempli gratia proponatur æquatio

$$y^3 - 6yy + 6y + 12 = 0.$$

Ad tollendum secundum æquationis hujus terminum ponatur $x + 2 = y$; & orietur

$$x^3 * - 6x + 8 = 0,$$

ubi est

$q = -6$, $r = 8$, $\frac{1}{4}rr = 16$, $\frac{q^3}{27} = -8$, $a^3 = -4 \pm \sqrt{8}$, $a - \frac{q}{3a} = x$, & $x + 2 = y$,

id est

$$2 + \sqrt[3]{(-4 \pm \sqrt{8})} + \frac{2}{\sqrt[3]{(-4 \pm \sqrt{8})}} = y.$$

Et hoc modo erui possunt radices omnium cubicarum æquationum ubi q affirmativum est; vel etiam ubi q negativum est, & $\frac{q^3}{27}$ non majus quam $\frac{1}{4}rr$, *id est ubi duæ ex radicibus æquationis sunt impossibiles*. At ubi q negativum est, & $\frac{q^3}{27}$ simul majus quam $\frac{1}{4}rr$, fit $\sqrt{(\frac{1}{4}rr - \frac{q^3}{27})}$ quantitas impossibilis, atque adeo æquationis radix x vel y, hoc casu impossibilis erit. Scilicet hoc casu *tres sunt radices possibiles*, quæ omnes eodem modo se habent ad æquationis terminos q & r, & indifferenter designantur per literam x vel y, adeoque omnes eadem deberent lege erui & exprimi, qua una aliqua eruitur & exprimitur: *Sed omnes tres lege præfata exprimere impossibile est.* Quantitas $a - \frac{q}{3a}$, qua x designatur, multiplex esse non potest, eaque de

causa

causa hypothesis quod x, hoc in casu ubi triplex est, æqualis esse potest binomio $a-\frac{q}{3a}$, seu $a+b$, cujus nominum cubi a^3+b^3 conjunctim æquentur r, & triplum rectangulum $3ab$ æquetur q, plane impossibilis est; & ex hypothesi impossibili conclusionem impossibilem colligi mirum esse non debet.

XVI. *Est & alius modus has radices exprimendi.* Nimirum de a^3+b^3+r, id est de nihilo, aufer

$$a^3+r, \text{ seu } \frac{1}{2}r\pm\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{q^3}{27})},$$

& restabit

$$b^3=-\frac{1}{2}r\mp\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{q^3}{27})}.$$

Est itaque

$$a=\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}r+\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{q^3}{27})})},$$

&

$$b=\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}r-\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{q^3}{27})})};$$

vel

$$a=\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}r-\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{q^3}{27})})},$$

&

$$b=\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}r+\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{q^3}{27})})},$$

adeoque horum summa

$$\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}r+\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{q^3}{27})})}+\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}rr-\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{q^3}{27})})}, \text{ erit }=x.$$

XVII. *Possunt etiam æquationum biquadraticarum radices mediantibus cubicis erui & exprimi.*

Tol-

Tollendus est autem primum secundus æquationis terminus. Sit æquatio resultans

$$x^4 + qxx + rx + s = 0.$$

Pone hanc multiplicatione duarum

$$xx + ex + f = 0, \ \& \ xx - ex + g = 0$$

generari; id est, candem esse cum hac

$$x^4 * \begin{matrix} +f \\ +g \\ -ee \end{matrix} xx \begin{matrix} +eg \\ -ef \end{matrix} x + fg = 0,$$

& collatis terminis fiet

$$f + g - ee = q, \ eg - ef = r, \ \& \ fg = s.$$

Quare

$$q + ee = f + g; \ \frac{r}{e} = g - f; \ \frac{q + ee + \frac{r}{e}}{2} = g; \ \frac{q + ee - \frac{r}{e}}{2} = f;$$

$$\frac{qq + 2eeq + e^4 - \frac{rr}{ee}}{4} \ (= fg) = s,$$

& per reductionem

$$e^6 + 2qe^4 \begin{matrix} + qq \\ - 4s \end{matrix} ee - rr = 0.$$

Pro ee scribo y, & fiet

$$y^3 + 2qyy \begin{matrix} + qq \\ - 4s \end{matrix} y - rr = 0,$$

æquatio cubica, cujus teminus secundus tolli potest, & radix deinceps per regulam præcedentem, vel secus, extrahi. Dein habita illa radice regrediendum erit ponendo

$$\sqrt{y} = e; \ \frac{q + ee - \frac{r}{e}}{2} = f; \ \frac{q + ee + \frac{r}{e}}{2} = g;$$

& æquationes duæ

$$xx+ex+f = 0, \ \& \ xx-ex+g = 0,$$

extractis earum radicibus, dabunt quatuor radices æquationis biquadraticæ

$$x^4+qxx+rx+s = 0,$$

nimirum

$$x = -\frac{1}{2}e \pm \sqrt{\frac{1}{4}ee-f}, \ \& \ x = \frac{1}{2}e \pm \sqrt{\frac{1}{4}ee-g}.$$

Ubi notandum eſt quod ſi æquationis biquadraticæ radices quatuor poſſibiles ſunt, æquationis cubicæ

$$y^3+2qyy \begin{smallmatrix}+qq\\-4s\end{smallmatrix} y - rr = 0$$

radices tres poſſibiles erunt, atque adeo per regulam præcedentem extrahi nequeunt.

XVIII. *Sic & ſi æquationis quinque vel plurium dimenſionum radices affectæ in radices non affectas, mediis æquationis terminis quoquo pacto ſublatis, convertantur, illa radicum expreſſio ſemper erit impoſſibilis, ubi plures quam una radix in æquatione imparium dimenſionum poſſibiles ſunt, aut plures quam duæ in æquatione parium dimenſionum, quæ per extractionem ſurdæ radicis quadraticæ, methodo ſupra expoſita, reduci nequeunt.*

XIX. Docuit *Carteſius* æquationem biquadraticam per regulas ultimo traditas reducere. *E. g.* proponatur æquatio a nobis ſupra reducta

$$x^4 - x^3 - 5xx + 12x - 6 = 0.$$

Tolle ſecundum terminum ſcribendo $v+\frac{1}{4}$ pro x, & orietur

$$v^4 - \frac{43}{8}vv + \frac{75}{8}v - \frac{851}{256} = 0.$$

Ad tollendas fractiones ſcribe $\frac{1}{4}z$ pro v, & orietur

$$z^4 - 86zz + 600z - 851 = 0.$$

Hic eſt

$$-86 = q, \ 600 = r, \ \& -851 = s,$$

adeoque

$$y^3+2qyy \begin{smallmatrix}+qq\\-4s\end{smallmatrix} y - rr = 0,$$

ſub-

ſubſtitutis æquipollentibus fiet

$$y^3 - 172yy + 10800y - 360000 = 0.$$

Ubi tentando omnes ultimi termini diviſores

$$1;\ -1;\ 2;\ -2;\ 3;\ -3;\ 4;\ -4;\ 5;\ -5;$$

& deinceps uſque ad 100, invenietur tandem $y = 100$. Quod idem multo expeditius per methodum a nobis ſupra expoſitam inveniri potuit. Dein habito y, radix ejus 10 erit e, &

$\dfrac{q+ee-\frac{r}{e}}{2}$, id eſt $\dfrac{-86+100+60}{2}$, ſeu -23 erit f, & $\dfrac{q+ee+\frac{r}{e}}{2}$ ſeu 37 erit g,

adeoque æquationes

$$xx+ex+f=0,\ \&\ xx-ex+g=0,$$

ſcripto z pro x, & ſubſtitutis æquipollentibus, evadent

$$zz+10z-23=0,\ \&\ zz-10z+37=0.$$

Reſtitue v pro $\frac{1}{4}z$, & orientur

$$vv+2\tfrac{1}{2}v-\tfrac{23}{16}=0,$$

$$\&\ vv-2\tfrac{1}{2}v+\tfrac{37}{16}=0.$$

Reſtitue inſuper $x-\frac{1}{4}$ pro v, & emergent

$$xx+2x-2=0,\ \&\ xx-3x+3=0,$$

æquationes duæ, quarum radices quatuor

$$x=-1\pm\sqrt{3},\ \&\ x=1\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{-\tfrac{3}{4}},$$

eædem ſunt cum radicibus quatuor æquationis biquadraticæ ſub initio propoſitæ

$$x^4-x^3-5xx+12x-6=0.$$

Sed hæ facilius per methodum inveniendi diviſores a nobis ſupra explicatam inveniri potuerunt.

COMMENTARIUS

AD

CAPUT V.

Statim afferam regulæ in hoc capite contentæ explicationem & demonstrationem, quam a multis annis habeo, communicatam a celeberrimo *Nicolao* BERNOULLIO, olim apud *Basileenses* Juris Professore, neque hactenus publici juris factam. Similem postea tradidit acutissimus *Colin* MAC-LAURIN, in Algebra sua anglice scripta; sed testari possum hanc Bernoullianam scriptam esse ante alterius editionem.

1. In omni æquatione, fractis & surdis carente, rationalemque radicem integram habente; radix est æqualis divisori alicui termini infimæ dignitatis, seu termini in quem quantitas incognita non ingreditur.

A nobis ostensum est N°. 11. pag. 28. Tomi I.

2. Si talis æquatio habeat radicem rationalem fractam, radix hæc est æqualis fractioni, cujus numerator est divisor aliquis ultimi termini, in quo quantitas incognita est nullius dimensionis, & denominator æqualis divisori alicui coefficientis termini altissimæ dignitatis.

Sequitur facile ex præcedente N°. 1.

3. Hinc, si terminus altissimæ dignitatis sola unitate afficitur, radix æquationis rationalis necessario est quantitas integra.

Demonstratum N°. 76. pag. 27. hujus.

4. Hæc reductio in eo consistit, ut quæratur an non æquatio in duas partes æquales dividi possit, quarum una sit perfectum, altera multiplum quadrati. Proponatur ex. gr. reducenda æquatio

$$x^4 + px^3 + qxx + rx + s = 0,$$

in qua p, q, r, s, significant quantitates, vel numeros integros affirmativos vel negativos. Hæc æquatio fingitur in duas partes dispesci

$$(xx + Px + Q)^2 = n(kx + l)^2,$$

Hoc est

$$x^4 + 2Px^3 + PPxx + 2Qxx + 2PQx + QQ = nkkxx + 2nklx + nll,$$

seu, omnibus terminis ad unam partem translatis,

x^4

$$x^4 + 2Px^3 \begin{matrix} + PPxx \\ + 2Qxx \\ - nkkxx \end{matrix} \begin{matrix} + 2PQx \\ - 2nklx \end{matrix} \begin{matrix} + QQ \\ - nll \end{matrix} = 0,$$

quæ æquatio cum proposita, termino tenus, collata præbet

$$2P = p;\ PP + 2Q - nkk = q;\ 2PQ - 2nkl = r;\ QQ - nll = s;$$

seu

$$P = \frac{1}{2}p;\ Q = \frac{q - PP + nkk}{2} = \frac{q - \frac{1}{4}pp + nkk}{2} =$$

$$(\text{posito } q - \frac{1}{4}pp = \alpha)\ \frac{\alpha + nkk}{2};\ l = \frac{2PQ - r}{2nk} = \frac{\frac{1}{2}\alpha p + \frac{1}{2}pnnkk - r}{2nk} =$$

$$(\text{posito } r - \frac{1}{2}\alpha p = \beta)\ \frac{1}{4}pk - \frac{\beta}{2nk};\ ll = \frac{QQ - s}{n};$$

qui valores quantitatum P, Q, l, & ll, sunt illi ipsi quos NEWTONUS in Regula sua adhibet N°. III. hujus. pag. 143.

5. Præscribit præterea sequentes conditiones.

1. Quantitas n debet esse integra, non fracta.

2. Eadem non debet esse quadratum.

3. Eadem non debet esse divisibilis per quadratum; hæc conditio in sequentibus exemplis adjecta, in exemplo proposito per incuriam omissa fuit.

4. Eadem debet esse divisor quantitatis β.

5. Eadem debet esse divisor quantitatis 2ζ, existente $\zeta = s - \frac{1}{4}\alpha\alpha$.

6. Eadem debet esse impar, &, per 4 divisa, unitatem relinquere, si quantitas p sit impar.

7. Item si r sit impar.

8. Eadem debet esse divisor quantitatis $QQ - s$.

9. Quantitas k debet esse divisor ipsius $\frac{\beta}{n}$, si p sit par.

10. Eadem debet esse dimidium divisoris quantitatis $\frac{\beta}{n}$, si p sit impar.

11. Quantitas Q debet esse divisor quantitatis $\alpha s - \frac{1}{4}rr$, vel imparis divisoris dimidium.

6. Hic primo observandum est, quod si quantitas aliqua, de cujus divisoribus sermo est, sit fracta; NEWTONUS per divisorem intelligat divisorem numeratoris illius fractionis.

Veritas autem conditionum præſcriptarum, ſic demonſtratur.

7. *Conditio* 1. Hæc conditio ad arbitrium aſſumpta eſt, commodioris calculi gratia, nam omnis quantitas compoſita per multiplicationem ex duobus Factoribus, ſive integris ſive fractis, quorum unus ſit quadratus, alter non quadratus, ſemper in tales Factores reſolvi poteſt, quorum unus ſit integer non quadratus; alter quadratus, ſive integer ſive fractus.

8. *Conditio* 2. Si n eſſet quadratum, radix quantitatis $n(kx+l)^2$ futura eſſet rationalis non ſurda, contra hypotheſin.

9. *Conditio*. 3. Hæc conditio etiam ad arbitrium aſſumitur, quia quantitas $(kx+l)^2$ componi intelligitur ex omnibus Factoribus quadratis quantitatis $n(kx+l)^2$.

10. Si in æquatione $nll = QQ - s$, pro ll ponatur ejusdem alter valor ſupra inventus

$$\frac{(2PQ-r)^2}{4nnkk} = \frac{(pQ-r)^2}{4nnkk} = (\text{ob } nkk = 2Q - \alpha)\ \frac{(pQ-r)^2}{4(2Q-\alpha)},$$

proveniet

$$QQ - s = \frac{ppQQ - 2prQ + rr}{8Q - 4\alpha},$$

ſive

$$8Q^3 - 4\alpha QQ - 8sQ + 4\alpha s = ppQQ - 2prQ + rr,$$

Hoc eſt

$$8Q^3 \begin{array}{l} -4\alpha QQ - 8sQ + 4\alpha s \\ -ppQQ + 2prQ - rr \end{array} = 0,$$

vel (ob $4\alpha + pp = 4q$)

$$8Q^3 - 4qQQ \begin{array}{l} -8sQ + 4\alpha s \\ +2prQ - rr \end{array} = 0,$$

cujus æquationis termini procedunt per poteſtates ipſius 2Q habentes coefficientes integros, quare (per N:^is^ 1. & 3.) radix æquationis, 2Q, eſt diviſor integer quantitatis $4\alpha s - rr$, ſi ſcilicet hæc quantitas fuerit impar, quod non diverſum eſt ab eo, quod NEWTONUS invenit, in *conditione* undecima. Ille enim per diviſorem ipſius $\alpha s - \frac{1}{4}rr$ intelligit diviſorem integrum numeratoris hujus fractionis $\frac{4\alpha s - rr}{4}$, cujus dimidium ponit $= \alpha$, quod idem eſt, ac ſi dixiſſet 2Q eſſe diviſorem ipſius $4\alpha s - rq$. Sed ſi $4\alpha s - rq = 4qs - pps - rr$ ſit par, & p etiam par, oportebit ut r quoque ſit

fit par, quo casu singuli termini æquationis

$$8Q^3 - 4qQQ \begin{matrix} -8sQ \\ +2prQ \end{matrix} \begin{matrix} +4as \\ -rr \end{matrix} = 0;$$

erunt per 4 divisibiles, & æquatio reducetur ad

$$2Q^3 - qQQ \begin{matrix} -2sQ \\ +\frac{1}{2}prQ \end{matrix} \begin{matrix} +as \\ -\frac{1}{4}rr \end{matrix} = 0,$$

in qua singuli termini habebunt coefficientes integros; proinde (per N.[is] 1. & 2.) radix æquationis Q erit æqualis divisori quantitatis $as - \frac{1}{4}rr$, vel imparis divisoris dimidio. Quod si vero $4as - rr$ sit par, sed p impar, poterit r esse par vel impar, prout s est par, vel impar; & quidem si s sit pariter par, id est per 4 divisibilis, erit quoque

$$4as - rr = 4qs - pps - rr,$$

& quilibet terminus æquationis per 4 divisibilis, unde idem obtinebit, quod prius; in reliquis vero casibus ubi s est impariter par, aut s & r, impares, quantitas $4as - rr$ non poterit generaliter per 4; sed solum per 2 dividi; divisis igitur omnibus terminis per 2 prodibit æquatio

$$4Q^3 - 2qQQ \begin{matrix} -4sQ \\ +prQ \end{matrix} \begin{matrix} +2as \\ -\frac{1}{2}rr \end{matrix} = 0,$$

cujus æquationis radix Q est vel divisor quantitatis imparis $2as - \frac{1}{2}rr$, (per N.[um] 1. hujus), vel æqualis fractioni, cujus numerator est divisor ejusdem quantitatis $2as - \frac{1}{2}rr$, & denominator divisor aliquis coefficientis 4 altissimi termini $4Q^3$ (per N.[um] 2.) qui divisor tamen non poterit esse 4; sed solum 2, quia, ut supra inventum est, quantitas 2Q debet esse integra, quod iterum non differt a NEWTONI assertione, quia divisor quantitatis $as - \frac{1}{4}rr$, in casu, ubi $4as - rr$, est divisibilis per 2, nihil aliud est, quam divisor numeratoris hujus fractionis $\dfrac{2as - \frac{1}{2}rr}{2}$.

Quia $nll = QQ - s$, neutra quantitatum l & Q potest esse integra, nisi altera quoque simul sit integra; nam si l sit integra, erit etiam $nll = QQ - s$ quantitas integra, quia, per Conditionem 1., quantitas n est integra, unde necessario Q est quan-

quantitas integra; & si Q sit integra, debebit nll esse integra, quia $QQ - s$ est quantitas integra; at quia n nequit esse multiplum quadrati ll, per Conditionem 3., non potest nll esse quantitas integra, existente ll fracta. Quia vero, ut antea demonstratum est, pro Conditione 11., quantitas $2Q$ semper est integra, Q non potest alia esse fractio, quam quæ pro denominatore habet 2, unde sequetur quando Q est fracta quantitas, fore etiam l similiter fractam, id est, æqualem fractioni cujus denominator 2. Fingamus enim $Q = \frac{1}{2}x$, & $l = \frac{y}{z}$, & substituamus hos valores in æquatione $nll = QQ - s$, proveniet

$$\frac{nyy}{zz} = \frac{xx - 4s}{4}, \text{ seu, } n = \frac{(xx - 4s).zz}{4yy};$$

quæ quantitas non potest esse integra, secundum Condit. 1., nisi $xx - 4s$, sit divisibilis per yy, & zz per 4; nam, per hypothesim, xx, adeoque etiam $xx - 4s$, non est divisibilis per 4, nec zz per yy; ponatur igitur $z = 2u$, seu $zz = 4uu$; eritque $n = \frac{(xx - 4s)\,4uu}{yy}$, sed quia $\frac{xx - 4s}{yy}$ est quantitas integra, quantitas n evaderet hac ratione multipla quadrati uu, contra Conditionem 3.; quod ut vitetur, oportet u æqualem esse unitati, adeoque $z = 2$, & $l = \frac{y}{2}$. Hinc porro sequitur fore $nyy = xx - 4s$; adeoque tam n quam yy esse divisorem quantitatis $xx - 4s$, seu numeratoris hujus fractionis $\frac{xx - 4s}{4}$, cui quantitas $QQ - s$ par est. Quæ est conditio octava. Quod si vero quantitates Q, & l sint integræ, per se patet ex æquatione $nll = QQ - s$, esse n divisorem ipsius $QQ - s$.

11. Quod si in æquatione $nll = QQ - s$, pro Q substituatur

$$\frac{a + nlk}{2}, \ \& \ \frac{1}{4}pk - \frac{\beta}{2nk} \text{ pro } l;$$

proveniet hæc æquatio

$$\frac{1}{16}ppnkk - \frac{1}{4}p\beta + \frac{\beta\beta}{4nkk} = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ankk + \frac{1}{4}nnk^4 - s;$$

seu per $4nkk$ multiplicando, & terminos æquationis secundum potestates ipsius nkk ordinando

$$n^3k^6 \begin{matrix} + 2annk^4 \\ - \frac{1}{4}ppnnk^4 \end{matrix} \begin{matrix} + aankk \\ - 4snkk \\ + p\beta nkk \end{matrix} - \beta\beta = 0,$$

quæ

quæ æquatio libera erit a fractionibus, si p fuerit par, nam

$$\frac{1}{4}pp, \ \& \ \alpha = q - \frac{1}{4}pp, \ \& \ \beta = r - \frac{1}{2}\alpha p,$$

erunt quantitates integræ; proinde (per N^{is} 1. & 3. pag. 164.) radix æquationis nkk erit divisor integer quantitatis datæ $\beta\beta$: & quia n est quantitas integra, per Condit. 1., erit quoque kk quantitas integra (nam si fracta esset, n deberet esse multipla ipsius kk, ut nkk possit esse quantitas integra; at quia n non est divisibilis per quadratum, juxta Condit. 3., non potest esse eadem multipla ipsius kk), erit igitur tam n quam kk divisor integer ipsius $\beta\beta$; seu, quia nullus divisor quadratus ipsius $\beta\beta$ potest esse n, erunt n & k divisores integri quantitatis β. Quæ est Conditio quarta. Vocetur h quotus, qui provenit dividendo $\beta\beta$ per nkk; sive sit $\beta\beta = hnkk$, erit hn quadratum, quia $\beta\beta$, & kk sunt quadrata; hinc ipse quotus h debebit esse æqualis quantitati n, multiplicatæ vel divisæ per aliquod quadratum; sed posterior æqualitas locum habere non potest propter Condit. 3; erit igitur $\beta\beta = hnkk = nnkk$ ducto in aliquod quadratum, & extrahendo utrimque radicem quadratam, erit β multiplum ipsius nk & $\frac{\beta}{n}$ multiplum ipsius k, ut habet NEWTONUS. *Conditione* 9. pag. 165. hujus.

12. Porro si $2l = \frac{pQ-r}{nk}$ sit par, debebit etiam r esse par; quia p est par, per hypothesim, & Q quantitas integra ob l integram; quare si r fuerit impar, erit $2l$, & per consequens etiam $2Q$ impar, & quia differentia duorum quadratorum imparium semper est divisibilis per 4, erit differentia ipsarum ll, & QQ quantitas integra, & $QQ - s$ differet ab ll quantitate integra, proinde n seu $\frac{QQ-s}{ll}$ erit unitas cum quantitate integra divisa per ll, id est (quia $2l$ est impar, & n quantitas integra per Conditionem 1.) unitas cum quadruplo quantitatis integræ, hoc est, n erit quantitas impar, quæ per 4 divisa relinquit unitatem; quæ est *conditio septima*.

13. Si in æquatione $nll = QQ - s$ substituatur solus valor ipsius $Q = \frac{\alpha + nkk}{2}$, habebitur æquatio

$$nll = \frac{1}{4}\alpha\alpha + \frac{1}{2}\alpha nkk + \frac{1}{4}nnk^4 - s;$$

seu per 4 multiplicando, & terminos secundum dimensiones ipsius n ordinando

$$k^4nn \begin{matrix} + 2\alpha kkn \\ - 4lln \end{matrix} \begin{matrix} + \alpha\alpha \\ - 4s \end{matrix} = 0,$$

in qua, ob $2l$, k, & α, quantitates integras per superius demonstrata (si

nempe p sit par,) omnes coefficientes potestatum ipsius n sunt quantitates integræ, unde sequitur (per Num 1.) n esse divisorem quantitatis datæ $aa-4s$, seu (ponendo $\frac{1}{4}aa-s=\zeta$) quantitatis 4ζ, vel potius ipsius 2ζ, (quæ est *conditio* quinta,) quia divisores ipsius 4ζ, qui per quadratum 4 multiplicantur, propter Cond. 3., sunt rejiciendi.

14. Demonstratæ itaque sunt generaliter conditiones 1. 2. 3. 8. 11. ac conditiones 4. 5. 7. 9. pro hypothesi quod p sit par. Si p fuerit impar, erit $\alpha = q - \frac{1}{4}pp$, quantitas fracta habens pro denominatore 4; ponatur igitur, $\alpha = \frac{A}{4}$, ubi A significat quantitatem integram imparem; Similiter

$$\beta = r - \frac{1}{2}\alpha p = r - \frac{1}{8}Ap,$$

erit quantitas fracta habens pro denominatore 8; ponatur igitur $\beta = \frac{B}{8}$, ubi B etiam significat quantitatem integram imparem, quibus valoribus in æquatione

$$n^3k^6 \begin{matrix} +2\alpha nnk^4 \\ -\frac{1}{4}ppnnk^4 \end{matrix} \begin{matrix} +\alpha\alpha nkk \\ -4snkk \\ +p\beta nkk \end{matrix} - \beta\beta = 0,$$

pro α & β substitutis, habebitur

$$n^3k^6 \begin{matrix} +\frac{1}{2}Annk^4 \\ -\frac{1}{4}ppnnk^4 \end{matrix} \begin{matrix} +\frac{1}{16}AAnkk \\ -4snkk \\ +\frac{1}{8}Bpnkk \end{matrix} - \frac{1}{64}BB = 0,$$

seu per 64 multiplicando

$$64n^3k^6 \begin{matrix} +32Annk^4 \\ -16ppnnk^4 \end{matrix} \begin{matrix} +4AAnkk \\ -256snkk \\ +8Bpnkk \end{matrix} - BB = 0,$$

ubi omnium terminorum coefficientes sunt integri, quapropter (per Num 1.) radix n erit divisor impar quantitatis BB, vel ipsius B, rejectis nempe divisoribus per quadratum divisibilibus (quæ sunt conditiones tertia & quarta), quod congruit cum NEWTONI assertione, ipse enim divisor quantitatis fractæ $\beta = \frac{B}{8}$ idem est ac divisor quantitatis B. Sed si in eadem

æqua-

æquatione $4nkk$ habeatur pro radice, erit (per N°s 1. & 3.) non solum hæc radix $4nkk$; sed & ipsa quantitas $4kk$ divisor termini BB, hoc est $2k$, divisor ipsius B. Ponatur, ut supra, h quotus qui provenit dividendo BB per $4nkk$, sive sit $BB = 4hnkk$, erit hn quadratum, & ipse quotus h æqualis quantitati n ductæ in aliquod quadratum, fietque $BB = 4nnkk$ ducto in aliquod quadratum, & $B = 2nk$ ducto in aliquam quantitatem integram, adeoque k æqualis dimidio divisoris quantitatis $\frac{B}{n}$. Et hæc est *conditio* decima.

15. Quia igitur k est dimidium divisoris imparis, ponatur $k = \frac{2x+1}{2}$; similiter quia p est impar, ponatur $p = 2y + 1$, & quia n est impar ponatur $n = 2z + 1$; eritque

$$2Q = \alpha + nkk = q - \frac{1}{4}pp + nkk = q - yy - y - \frac{1}{4} + nkk = q - yy - y$$

$$- \frac{1}{4} + 2zkk + kk = q - yy - y - \frac{1}{4} + 2zxx + 2zx + \frac{1}{2}z + xx + x$$

$$+ \frac{1}{4} = q - yy - y + 2zxx + 2zx + \frac{1}{2}z + xx + x,$$

in qua expressione omnes termini sunt quantitates integræ si z fuerit par; sed supra demonstratum est, per condit. 11., quantitatem $2Q$ semper esse integram, oportet igitur ut z sit par, per consequens $n = 2z + 1$, est quantitas impar, quæ per 4 divisa relinquit unitatem. Hæc est *conditio* sexta.

16. Si resumatur æquatio

$$k^4nn \begin{matrix} + 2\alpha kkn + \alpha\alpha \\ - 4lln \quad - 4s \end{matrix} = 0,$$

(quæ supra fuit adhibita pro demonstranda conditione quinta, in hypothesi quod p sit par,) & eadem multiplicetur per 16, ita ut habeatur

$$16k^4nn \begin{matrix} + 32\alpha kkn + 16\alpha\alpha \\ - 64lln \quad - 64s \end{matrix} = 0,$$

evadent omnes termini integri (in hypothesi quod p sit impar, & k dimidium quantitatis imparis per condit. 10.), & radix æquationis n erit (per N^um 1.) divisor quantitatis

$$16\alpha\alpha - 64s, \text{ vel } 64s - 16\alpha\alpha = (\text{posito } A = 4\alpha)\ 64s - AA,$$

quod non abludit a NEWTONI conditione quinta, nam ipse divisor quanti-

titatis 2ζ nihil aliud eſt quam diviſor numeratoris hujus fractionis $\frac{64s - AA}{32} = 2s - \frac{1}{2}aa = 2\zeta$.

17. Brevitatis cauſa omitto demonſtrationem regularum pro reducendis æquationibus ſex, octo, decem, & plurium dimenſionum. Qui veſtigiis hic poſitis inſiſtet, eam haud difficulter inveniet.

18. Si altiſſimus terminus æquationis reducendæ pro coefficiente habeat non unitatem ſed aliam quantitatem, poterit æquatio ſemper in aliam mutari, ſubſtituendo aliam incognitam, ita ut coefficiens altiſſimi termini fiat unitas, & regulæ præſcriptæ ad novam æquationem applicari poſſint.

Sic ſi proponatur æquatio

$$mx^4 + px^3 + qxx + rx + s = 0,$$

multiplicetur ea per m^3, & fiet

$$m^4x^4 + m^3px^3 + m^3qxx + m^3rx + m^3s = 0,$$

ponatur $mx = y$, & habebitur

$$y^4 + py^3 + mqyy + mmry + m^3s = 0,$$

ad quam æquationem regulæ præſcriptæ applicari poſſunt. Vel multiplicentur termini æquationis ſolummodo per m, ut habeatur

$$mmx^4 + mpx^3 + mqxx + mrx + ms = 0.$$

Aſſumatur æquatio

$$(mxx + Px + Q)^2 = n(kx + l)^2,$$

quæ evoluta, & ordinata evadit

$$mmx^4 + 2mPx^3 \begin{matrix} + PPxx \\ + 2mQxx \\ - nkkxx \end{matrix} \begin{matrix} + 2PQx \\ - 2nklx \end{matrix} \begin{matrix} + QQ \\ - nll \end{matrix} = 0,$$

& cum propoſita termino tenus collata præbet

$$P = \frac{1}{2}p;\ Q = \frac{mq - \frac{1}{4}pp + nkk}{2m};\ l = \frac{pQ - mr}{2nk},\ \&\ ll = \frac{QQ - ms}{n},$$

ex quibus æquationibus ſequendo methodum a nobis uſurpatam ſimiles regulæ pro determinandis valoribus quantitatum n, k, Q, l, elicientur.

19. Hactenus BERNOULLIUS. Quoniam vero tum ipſe tum *Mac*-LAURINUS altiorum regularum demonſtrationem lectori quærendam re-

relinquunt, quod suam habet difficultatem, nonnulla addenda esse puto.

Coefficientes æquationis cujusvis exponam per litteras romanas minores; ita ut ordinem alphabeti sequantur, *& a sit coefficiens secundi termini*, &c... Erit ergo nunc æquatio generalis ordinis n, hujusmodi

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} + dx^{n-4} \ldots + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

20. Quoniam hic agitur de radicis extractione, si n est numerus primus, res confici nequit. Sit igitur $n = mr$, & extrahenda sit radix m. ma, ut supersit æquatio ordinis r.

21. Primus e terminis addendis exponentem habebit exponentis m multiplum secundum numerum aliquem, non exclusa unitate. Patet enim polynomium ordinis ms esse posse perfectam potestatem m..mam polynomii ordinis s.

Sic, si æquatio sit quatuor, sex, octo, decem, duodecim &c; dimensionum, & quæratur radix quadrata; erit $m = 2$; & primus terminorum addendorum habebit, pro æquatione quatuor dimensionum, exponentem 2; pro sex, vel 4, vel 2; pro octo vel 6, vel 4, vel 2; pro decem vel 8, vel 6, vel 4, vel 2; pro duodecim, vel 10, vel 8, vel 6, vel 4, vel 2.

Si vero æquatio sex, novem, duodecim, quindecim &c. dimensionum resolvenda sit per extractionem radicis cubicæ, primus terminus addendus habebit exponentem 3; vel 6; vel 9; &c.

22. Erit ergo exponens primi termini addendi maximus $mr - m = m(r-1)$, & minimus m.

23. Sed terminus, cujus exponens est $mr - m$, est $m+1$..us æquationis propositæ; & terminus cujus exponens est m, est $mr - m + 1$. mus. Oportet ergo ut tot termini e proposita, quot præcedunt illum unde incipit additio, sint ipsi termini potestatis m alicujus binomii.

Quando $m = 2$, duo priores termini e proposita esse debent ipsi termini alicujus polynomii elevati ad secundum potestatem. Primus propositæ terminus est semper talis; sed & secundus, cujus coefficiens semper dividi potest non tantum per 2, sed per numerum quemvis.

24. Semper igitur duo priores termini æquationis reductæ per divisores surdos, erunt

$$x^r + \frac{a}{m} x^{r-1}$$

25. Si vero sit m binario major; tunc reliqui termini, qui augendum præcedunt, quales esse debeant investigandum est per theorema binomiale. Ex. gr. sit æquatio sex dimensionum

$$x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$$

& ea reducenda sit per extractionem radicis cubicæ. Addi debent termini quatuor, qui cubum perfectum efficere debent, & æquationem propositam

tam pariter reddere cubum perfectum. Horum primus habebit exponentem 3; & cum a termino cx^3 sint quatuor termini; quatuor pariter erunt addendi, qui constituent cubum binomii. Factum ponatur; & æquatio reducta sit

$$x^2 + \frac{a}{3}x + A = (kx + l)\sqrt[3]{n} \quad .$$

Erit, elevando ad tertiam potestatem

$$x^6 + ax^5 \begin{matrix} + 3Ax^4 \\ + \frac{a^2}{3}x^4 \end{matrix} \begin{matrix} + 2aAx^3 \\ + \frac{a^3}{27}x^3 \end{matrix} \begin{matrix} + 3A^2x^2 \\ + \frac{a^2A}{3}x^2 \end{matrix} + aA^2x + A^3 = n(kx + l)^3$$

Sed propositæ tribus prioribus terminis $x^6 + ax^5 + bx^4$, nihil additum est. Erit igitur

$$b = 3A + \frac{a^2}{3}; \ \& \ A = \frac{3b - a^2}{9}$$

statim ergo oportet ut a dividi possit per ternarium; alioquin esset $\frac{a^2}{3}$ quantitas fracta; atque ideo $2A + \frac{a^2}{3}$, vel b; quod est contra hypothesim; ponitur enim proposita a fractionibus libera. Deinde necesse est ut excessus ipsius b super $a \,.\, \frac{a}{3}$, dividi possit per ternarium. Tunc autem facile determinatur quantitas addenda. Trinomium

$$x^2 + \frac{a}{3}x + \frac{3b - a^2}{9}$$

elevetur ad tertiam potestatem. Differentia hujus potestatis & æquationis propositæ dividatur per communes divisores, e quibus ille eligatur, qui præbet cubum pro quoto; factum erit quod petebatur.

Proponatur reducenda æquatio

$$x^6 + 6x^5 + 18x^4 + 27x^3 + 17x^2 + 9x + 3 = 0$$

Hic est

$$\frac{a}{3} = 2; \ a \,.\, \frac{a}{3} = 12; \ b - \frac{a^2}{3} = 18 - 12 = 6; \ \frac{3b - a^2}{9} = \frac{3\ 6}{9} = 2 = A$$

Igitur

$$(x^2 + 2x + 2)^3 = x^6 + 6x^5 + 18x^4 + 32x^3 + 32x^2 + 24x + 8$$

Hu-

Hujus & æquationis propositæ differentia est

$$5x^3 + 15x^2 + 15x + 5$$

quam totam dividit unus numerus 5, & relinquit quotum

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3$$

Ergo proposita reducta per extractionem radicis cubicæ, est

$$x^2 + 2x + 2 = (x + 1)\sqrt[3]{5}$$

ubi quantitas $(x + 1)\sqrt[3]{5}$ positive sumenda est, quia proposita cubo minor est, ideoque per additionem complenda.

Si resolvenda proponeretur æquatio

$$x^6 - 9x^5 + 33x^4 + 1359x^3 + 7809x^2 + 15516x + 15516x + 10376 = 0$$

inveniretur

$$\frac{a}{3} = 3;\ a.\frac{a}{3} = 27;\ 3b = 99;\ \frac{3b - aa}{9} = \frac{99 - 81}{9} = \frac{18}{9} = 2 = A$$

Est igitur

$$(x^2 - 3x + 2)^3 = x^6 - 9x^5 + 33x^4 - 63x^3 + 33x^2 - 36x + 8$$

Hujus & propositæ differentia est

$$1296x^3 + 7776x^2 + 15552x + 10368$$

negative sumenda, quia proposita cubo major est, ideoque minuenda ut fiat cubus. Hæc differentia divisa per 2, dat

$$648x^3 + 3888x^2 + 7776x + 5184$$

in qua cubi non sunt 648, & 5184. Iterum divido per 2, ut ipsa differentia divisa sit per 4; & invenio

$$324x^3 + 1944x^2 + 3888x + 2592$$

ubi rursus cubi non sunt numeri 324 & 2592. Iterum non divido per 2; tunc enim differentia divisa esset per 8, numerum cubum, & non haberetur divisor surdus. Differentiam ergo divido per 6, vel primum quotum per 3, & prodit

$$216x^3 + 1296x^2 + 2592x + 1728$$

ubi est

$$216 = 6^3;\ 1728 = 12^3,\ \frac{1296}{3} = 432 = 6^2.12;\ \frac{2592}{3} = 864 = 6.12^2;$$

quare æquatio reducta per extractionem radicis cubicæ, eſt

$$x^2 - 3x + 2 = -(6x + 12)\sqrt[3]{6}.$$

26. Eadem æquatio ſex dimenſionum reducenda proponatur per extractionem radicis quadraticæ. Additio terminorum eam complentium incipere poteſt vel a bx^4, vel a dx^2. Incipiet ab hoc ultimo ſi quatuor priores termini pertineant ad quadrinomium aliquod evectum ad ſecundam poteſtatem. Aſſumendum eſt quadrinomium, quia radix quadratica ipſius x^6 eſt x^3, primus nempe terminus æquationis cubicæ, quæ habet quatuor terminos. Ponatur quadrinomium illud

$$x^3 + \frac{a}{2}x^2 + Ax + B$$

Eſt

$$\left(x^3 + \frac{a}{2}x^2 + Ax + B\right)^2 = x^6 + ax^5 \begin{array}{l} + 2Ax^4 + 2Bx^3 + aBx^2 \\ + \frac{a^2}{4}x^4 + aAx^3 + AAx^2 \end{array} + 2ABx + B^2 =$$

$$n(k^2x^2 + 2klx + l^2)$$

& quantitas hæc poſterior utrinque addenda eſt.

Quoniam ponimus nihil addi quatuor prioribus terminis, erit

$$b = 2A + \frac{a^2}{4};\ \text{atque } A = \frac{4b - a^2}{8};\ \&\ 2B + aA = 2B + \frac{4ab - a^3}{8} = c;$$

unde

$$B = \frac{8c - 4ab + a^3}{16}$$

Hoc autem ſi accidat, facile determinabitur quantitas addenda; ſecus ad regulam Auctoris eſt confugiendum.

Determinabitur autem quantitas addenda, definitis A & B, ut ſupra; hinc conficietur quadrinomium, cujus evecti ad ſecundam poteſtatem differentia ab æquatione propoſita, debet eſſe multiplex alicujus binomii quadrati; quod niſi inveniatur, æquatio reduci nequit hoc pacto.

Quantitas autem complens per additionem eſt jungenda, quando propoſita minor eſt quam aſſumta poteſtas; & tunc radix erit realis; ſed per ſubdu-

ductionem quando proposita major est quam assumta potestas, & tunc radix erit imaginaria.

Sit, ex. gr., æquatio

$$x^6 - 2x^5 + 5x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 16x - 17 = 0.$$

Hic est

$$a = 2;\ \frac{a}{2} = 1;\ b = 5;\ b - \frac{a^2}{4} = 5 - 1 = 4;\ A = 2;\ aA = 4;$$

$$c = 6;\ c - aA = 6 - 4 = 2;\ \&\ B = 1$$

Quare assumendum quadrinomium, evehendum ad secundum potestatem

$$(x^3 - x^2 + 2x - 1)^2 = x^6 - 2x^5 + 5x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 4x + 1.$$

Hoc quadratum majus est quam proposita, quantitate

$$2x^2 + 12x + 18 = 2(x^2 + 6x + 9) = 2(x + 3)^2$$

Est igitur reducta

$$x^3 - x^2 + 2x - 1 = (x + 3)\sqrt{2}$$

Si vero fuisset

$$x^6 - 2x^5 + 5x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 8x + 19 = 0$$

iidem invenirentur valores ipsarum A, & B; atque idem quadrinomium, cujus secunda potestas minor est quam æquatio proposita, quantitate eadem; nempe $-2(x+3)^2$; tunc reducta fuisset

$$x^3 - x^2 + 2x - 1 = (x + 3)\sqrt{-2}$$

Tandem si fuisset

$$x^6 - 2x^5 + 5x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 10x - 4 = 0$$

differentia fuisset

$$2x^2 + 6x + 3$$

cujus termini dividi nequeunt per eundem numerum, nec dant quadratum. Quare tunc proposita per hanc methodum reduci non posset.

27. In genere, æquatio ordinis $n = mr$, reduci poterit per extractionem radicis m...mæ, si assumatur polynomium ordinis r; si hujus coefficientes ad numerum $r - 1$ determinari possint per totidem coefficientes æquationis propositæ; & si differentia inter polynomium ordinis r evectum ad

 po-

poteſtatem m, & æquationem propoſitam, ſit multiplex alicujus polynomii evecti ad poteſtatem eandem m.

28. Determinandi ſunt coefficientes ad numerum $r-1$; nam primus terminus ſemper eſt x^r; ſecundi coefficiens ſemper eſt $\frac{a}{m}$. Sed polynomium ordinis r habet $r+1$ terminos; e quo numero ſi ſubducatur binarius, (numerus terminorum qui ſtatim inveniuntur,) manet $r-1$ numerus determinandorum.

29. Ordinis s ſit polynomium, cujus evecti ad poteſtatem m aliquod multiplex addi debet æquationi propoſitæ, ut ea compleatur; illud habebit terminorum numerum $s+1$; & ejusdem poteſtas m numerum terminorum habebit $ms+1$.

30. Oportet ut differentia ſit multiplex hujus polynomii evecti ad poteſtatem m, & quidem per numerum qui non ſit eadem poteſtas, ut inveniatur diviſor ſurdus; diviſor enim rationalis inventus ponitur alio pacto, ſi quis adſit.

31. Differentia diviſa per communem diviſorem, debet eſſe poteſtas m, ut ejus radix extrahi poſſit, nec incognita habeatur ſub ſigno, unde nihil conficeretur.

32. In hac hypotheſi problema eſt determinatum, quando

$$r = \frac{ms+1}{m-1};$$

plus quam determinatum, quando

$$r \text{ ſuperat } \frac{ms+1}{m-1};$$

& contra indeterminatum, quando

$$r \text{ deficit a } \frac{ms+1}{m-1}.$$

Nam ab exponente altiſſimi termini mr ad exponentem ms ſunt termini numero $mr-ms$, qui comparantur cum totidem terminis polynomii ordinis r evecti ad poteſtatem m, & determinant totidem coefficientes ipſius polynomii ordinis r, inter quos nunc recenſeo primum & ſecundum. Hujusmodi coefficientes habet polynomium ordinis r ad numerum $r+1$. Igitur problema erit determinatum ſi

$$r+1 = mr-ms; \text{ vel } ms+1 = mr-r = r(m-1); \ \frac{(ms+1)}{m-1} = r.$$

Si vero ſit $r+1$ minor quam $mr-ms$, minor erit numerus terminorum de-

determinandorum, quam numerus terminorum determinantium, & problema erit plusquam determinatum. Tunc autem $r + 1 + ms$ minor quam mr, & $ms + 1$ minor quam $mr - r$, ac $\frac{ms+1}{m-1}$ minor quam r; atque ideo r major quam $\frac{ms+1}{m-1}$.

Contra si $r + 1$ major est quam $mr - ms$, major erit numerus terminorum determinandorum, quam numerus determinantium, & problema erit indeterminatum. Tunc autem $r + ms + 1$ major quam mr; $ms + 1$ major quam $mr - r$; & $\frac{ms+1}{m-1}$ major quam r.

Hinc liquet indeterminata esse problemata, quorum regulas tradit NEWTONUS in hoc Capite; atque ideo quantitates esse determinandas tentando.

33. Hæc tandem intelligi debent, si æquatio proposita nihil offerat quod problema determinet.

34. Hinc aliquando minui potest numerus tentaminum. Ex. gr. Si proponatur æquatio, quam pro tertio exemplo N*i*. III. pag. 146. hujus, affert Auctor, nempe

$$x^4 - 9x^3 + 15x^2 - 27x + 9 = 0$$

considero ultimum terminum 9 esse quadratum; ut & ultimum terminum assumti trinomii, & quadrati

$$\left(x^2 - \frac{9x}{2} + A\right)^2 = x^4 - 9x^3 + 2Ax^2 - 9Ax + A^2 + \frac{81}{4}x^2$$

quare pono $A = 3$. Hinc binomii assumti potestas secunda fit

$$x^4 - 9x^3 + \frac{105}{4}x^2 - 27x + 9$$

quæ congruit cum æquatione proposita, in omnibus terminis præter tertium. Est autem

$$\frac{105}{4}x^2 - \frac{60x^2}{4} = \frac{45x^2}{2} = \frac{5 \cdot 9x^2}{4}, \text{ unde } \frac{3x}{2}\sqrt{5}$$

est quantitas utrinque addenda æquationi reductæ, quæ est

$$x^2 - \frac{9x}{2} + 3 = \frac{3x}{2}\sqrt{5}$$

 Pror-

Prorſus ut invenit noſter.

Pariter in exemplo N^i. IV. pag. 147. hujus; ultimus propoſitæ

$$x^4 - 2ax^3 \begin{matrix} +2a^2 \\ -cc \end{matrix} x^2 - 2a^3x + a^4 = 0$$

terminus a^4, eſt quadratus; hujus radicem a^2 ponendo pro A in aſſumto trinomio, invenitur

$$(x^2 - ax + a^2)^2 = x^4 - 2ax^3 + 3a^2x^2 - 2a^3x + a^4$$

Eſt autem differentia

$$(3a^2 - 2a^2 + c^2)x^2 = (a^2 + c^2)x^2$$

Quare fit reducta

$$x^2 - 2ax + a^2 = x\sqrt{(a^2 + c^2)}$$

35. Aſſumto polynomio ordinis r, & eo elevato ad poteſtatem m, poſſent, ejus ſingulos terminos comparando cum terminis æquationis generalis, determinari valores ſingularum litterarum græcarum, quas NEWTONUS adhibet. Quo facto quærendi ſupereſſent valores Diviſorum, & leges quibus adſtricti ſunt. Sed præſtabit rem in genere efficere pro $m = 2$; vel pro reductione per extractionem radicis quadraticæ. Sit ergo æquatio generalis ordinis paris

$$x^{2r} + \mathrm{a}x^{2r-1} + \mathrm{b}x^{2r-2} + \mathrm{c}x^{2r-3} + \mathrm{d}x^{2r-4} + \mathrm{e}x^{2r-5} + \mathrm{f}x^{2r-6} + \&c. = 0,$$

in qua litteræ romanæ minores a; b; c; d; &c; reſpondent ordine minoribus p; q; r; s; &c. Auctoris; & aſſumatur polynomium

$$x^r + \frac{\mathrm{a}}{2}x^{r-1} + \mathrm{A}x^{r-2} + \mathrm{B}x^{r-3} + \mathrm{C}x^{r-4} + \mathrm{D}x^{r-5} + \mathrm{E}x^{r-6} + \&c.$$

cujus ſecunda poteſtas æquare debet propoſitam ad quadratum completam.

36. Coefficientes ſingulorum terminorum hujus quadrati, facile determinabuntur conſiderando exponentes ſingulorum terminorum polynomii aſſumti conficere progreſſionem arithmeticam, atque ideo æquales eſſe ſummas binorum æquidiſtantium, & medii duplum, ſi eorum numerus ſit impar. Quare ſi quæritur coefficiens termini, qui in quadrato exponentem habet numerum parem $2r - 2s$; coefficiens primi termini, nempe unitas, ducatur in coefficientem termini, qui in binomio aſſumto exponentem habet $r - 2s$; deinde coefficiens termini ſecundi in coefficientem termini præcedentis, cujus nempe exponens eſt $r - 2s + 1$; & ſic ſemper; hæc facta duplicentur, & ſumma dabit coefficientem quæſitum. Si vero exponens

nens esset par, medius coefficiens quadrandus esset, & non duplicandus. Per hanc regulam invenientur.

terminorum in quibus est	coefficientes
x^{2r-1}	a
x^{2r-2}	$2A + \frac{a^2}{4}$
x^{2r-3}	$2B + aA$
x^{2r-4}	$2C + aB + AA$

& sic de reliquis.

37. Nunc si æquales essent æquatio proposita & assumti polynomii quadratum, esset, ad sinistram scribendo simbola nostra & simbola Auctoris ad dextram,

$$b = 2A + \frac{a^2}{4};\ \text{unde}\ b - \frac{a^2}{4} = 2A = \alpha = q - \frac{p^2}{4},$$

Quare

$$aA = \frac{a\alpha}{2};\ \&\ c = 2B + a\alpha;\ c - \frac{a\alpha}{2} = 2B = \beta = r - \frac{1}{2}p\alpha.$$

Hinc

$$aB = \frac{a\beta}{2};\ AA = \frac{\alpha\alpha}{4};\ d = 2C + aB + AA;\ d - \frac{a\beta}{2} - \frac{\alpha\alpha}{4} = 2C = \gamma = s - \frac{1}{2}p\alpha - \frac{\alpha\alpha}{4}.$$

Hinc sexti termini coefficiens

$$2D + aC + 2AB = 2D + \frac{a\gamma}{2} + \frac{\alpha\beta}{2} = e;\ e - \frac{a\gamma}{2} - \frac{\alpha\beta}{2} = 2D = \delta = t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}\alpha\beta.$$

Et coefficiens septimi termini

$$2E + aD + 2AC + B^2 = 2E + \frac{a\delta}{2} + \frac{\alpha\gamma}{2} + \frac{\beta\beta}{4} = f,$$

ac

$$f - \frac{a\delta}{2} - \frac{\alpha\gamma}{2} - \frac{\beta\beta}{4} = 2E = \varepsilon = v - \frac{1}{2}p\delta - \frac{1}{2}\alpha\gamma - \frac{1}{4}\beta\beta.$$

Pariter coefficiens termini octavi

$$2F + aE + 2AD + 2BC = 2F + \frac{a\epsilon}{2} + \frac{\alpha\delta}{2} + \frac{\beta\gamma}{2} = g;$$

&

$$g - \frac{a\epsilon}{2} - \frac{\alpha\delta}{2} - \frac{\beta\gamma}{2} = 2F = \zeta = a - \frac{1}{2}p\epsilon - \frac{1}{2}\alpha\delta - \frac{1}{2}\beta\gamma.$$

Sed coefficiens noni termini

$$2G + aF + 2AE + 2BD + CC = 2G + \frac{a\zeta}{2} + \frac{\alpha\epsilon}{2} + \frac{\beta\delta}{2} + \frac{\gamma\gamma}{4} = h;$$

&

$$h - \frac{a\zeta}{2} - \frac{\alpha\epsilon}{2} - \frac{\beta\delta}{2} - \frac{\gamma\gamma}{4} = 2G = \eta.$$

Coefficiens decimi termini

$$2H + aG + 2AF + 2BE + 2CD = 2H + \frac{a\eta}{2} + \frac{\alpha\zeta}{2} + \frac{\beta\epsilon}{2} + \frac{\gamma\delta}{2} = i;$$

&

$$i - \frac{a\eta}{2} - \frac{\alpha\zeta}{2} - \frac{\beta\epsilon}{2} - \frac{\gamma\delta}{2} = \theta.$$

Coefficiens undecimi termini

$$2I + aH + 2AG + 2BF + 2CE + DD = 2I + \frac{a\theta}{2} + \frac{\alpha\eta}{2} + \frac{\beta\zeta}{2} + \frac{\gamma\epsilon}{2} + \frac{\delta\delta}{4} = k;$$

&

$$k - \frac{a\theta}{2} - \frac{\alpha\eta}{2} - \frac{\beta\zeta}{2} - \frac{\gamma\epsilon}{2} - \frac{\delta\delta}{4} = 2I = \kappa.$$

Coefficiens termini duodecimi

$$2K + aI + 2AH + 2BG + 2CF + 2DE = 2K + \frac{a\kappa}{2} + \frac{\alpha\theta}{2} + \frac{\beta\eta}{2} + \frac{\gamma\zeta}{2} + \frac{\delta\epsilon}{2} = l;$$

&

$$l - \frac{a\kappa}{2} - \frac{\alpha\theta}{2} - \frac{\beta\eta}{2} - \frac{\gamma\zeta}{2} - \frac{\delta\epsilon}{2} = 2K = \lambda.$$

Cocf-

Coefficiens termini decimi tertii

$$2L + aK + 2AI + 2BH + 2CG + 2DF + EE = 2L + \frac{a\lambda}{2} + \frac{\alpha\kappa}{2} + \frac{\beta\theta}{2} + \frac{\gamma\eta}{2} + \frac{\delta\zeta}{2} + \frac{\epsilon\epsilon}{4} = m;$$

&

$$m - \frac{a\lambda}{2} - \frac{\alpha\kappa}{2} - \frac{\beta\theta}{2} - \frac{\gamma\eta}{2} - \frac{\delta\zeta}{2} - \frac{\epsilon\epsilon}{4} = 2L = \mu.$$

& sic semper, Factores

$$\frac{a}{2};\ \frac{\alpha}{2};\ \frac{\beta}{2};\ \frac{\gamma}{2};\ \frac{\delta}{2};\ \frac{\epsilon}{2};\ \&c.$$

jungendo ordine cum litteris græcis, quæ propius accedunt ad finem in alphabeto græco. Sic in decimo tertio erat $\frac{a\lambda}{2}$; in decimo quarto erit $\frac{a\kappa}{2}$; in decimo quinto $\frac{a\nu}{2}$; &c; & in omnibus terminis denominatis a numero impari jungendo quadratum quartæ partis litteræ eo pertinentis.

38. Nunc videndum quid accidat æquationibus singulis finitis. Et primo quidem sit $2r = 4$; ac $r = 2$, polynomium assumtum fiet trinomium

$$x^2 + \frac{a}{2}x + A$$

quare in coefficientibus quadrati evanescent litteræ omnes post A; ut & in valoribus litterarum græcarum. Erit igitur, non mutatis coefficientibus secundi & tertii termini, coefficiens quarti $aA = \frac{a\alpha}{2}$, & manebit

$$c - \frac{a\alpha}{2} = \beta = r - \frac{1}{2}p\alpha$$

Et ultimi coefficiens fiet

$$AA = \frac{\alpha\alpha}{4};\ \text{unde}\ d - \frac{\alpha\alpha}{4} = \gamma = s - \frac{\alpha\alpha}{4} = \zeta$$

Ut NEWTONUS N°. III. pag. 143. hujus.

39. Sit $2r = 6$; ac $r = 3$, polynomium assumtum fiet quadrinomium

x^3

$$x^3 + \frac{a}{2}x^2 + Ax + B$$

& evanescentibus C; D; &c.; fient coefficientes determinandi, manentibus duobus primis,

Tertius

$$= d - \frac{a\beta}{2} - \frac{\alpha\alpha}{4} = \gamma = s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{4}\alpha\alpha = \zeta$$

Quartus

$$= e - \frac{\alpha\beta}{2} = \delta = t - \frac{1}{2}\alpha\beta = \eta; \text{ quintus } B^2 = f - \frac{\beta\beta}{4} = \epsilon = v - \frac{1}{4}\beta\beta = \theta$$

qui valores conveniunt cum NEWTONIANIS VII. pag. 149. hujus. Ille quidem ponit ad arbitrium

$$s - \frac{1}{2}p\beta = \gamma;\ \gamma - \frac{1}{4}\alpha\alpha = \zeta = s - \frac{1}{2}p\beta - \frac{1}{4}\alpha\alpha$$

substituendo pro γ valorem. Addit etiam, alia de caussa,

$$\zeta\theta - \frac{1}{4}\eta\eta = \lambda$$

40. Sit $2r = 8$; ac $r = 4$; habebitur quinquinomium assumtum

$$x^4 + \frac{a}{2}x^3 + Ax^2 + Bx + C.$$

Evanescent igitur D; E; &c, & fient coefficientes, manentibus tribus primis,

Quartus

$$e - \frac{2\gamma}{2} - \frac{\alpha\beta}{2} = \delta = t - \frac{1}{2}p\gamma - \frac{1}{2}\alpha\beta; \text{ quintus } f - \frac{\alpha\gamma}{2} - \frac{\beta\beta}{4} = \epsilon = v - \frac{1}{2}\alpha\gamma - \frac{1}{4}\beta\beta$$

Sextus

$$g - \beta\gamma = \zeta = w - \frac{1}{2}\beta\gamma; \text{ septimus, } h - \frac{\gamma\gamma}{4} = \eta = z - \frac{1}{4}\gamma\gamma$$

Prorsus ut NEWTONUS N° VIII. pag. 152. hujus.

41.

41. Sit $2r = 10$, ac $r = 5$; erit sexinomium

$$x^5 + \frac{a}{2}x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

Evanescent igitur E; F; &c; & manentibus quatuor primis coefficientibus quales erant in N°. præcedente, fiet

Quintus

$$f - \frac{a\delta}{2} - \frac{\alpha\gamma}{2} - \frac{\beta\beta}{4} = \varepsilon = v - \frac{1}{2}p\delta - \frac{1}{2}\alpha\gamma - \frac{1}{4}\beta\beta$$

sextus

$$g - \frac{\alpha\delta}{2} - \frac{\beta\gamma}{2} = \zeta = a - \frac{1}{2}\alpha\delta - \frac{1}{2}\beta\gamma; \text{ septimus } h - \frac{\beta\delta}{2} - \frac{\gamma\gamma}{4} = \eta = b - \frac{1}{2}\beta\delta - \frac{1}{4}\gamma\gamma;$$

octavus

$$i - \frac{\gamma\delta}{2} = \theta = c - \frac{1}{2}\gamma\delta; \text{ nonus } k - \frac{\delta\delta}{4} = \kappa = d - \frac{1}{4}\delta\delta$$

Quos valores reperit Auctor N°. IX. pag. 152. hujus.

42. Sit $2r = 12$; & $r = 6$. Assumtum erit septinomium

$$x^6 + \frac{a}{2}x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E.$$

& evanescentibus F; G; &c., manebunt quatuor primi coefficientes, quales erant N°. 40., quintus qualis N°. præcedente, & fient

sextus

$$g - \frac{a\varepsilon}{2} - \frac{\alpha\delta}{2} - \frac{\beta\gamma}{2} = \zeta = a - \frac{1}{2}p\varepsilon - \frac{1}{2}\alpha\delta - \frac{1}{2}\beta\gamma$$

septimus

$$h - \frac{\alpha\varepsilon}{2} - \frac{\beta\delta}{2} - \frac{\gamma\gamma}{4} = \eta = b - \frac{1}{2}\alpha\varepsilon - \frac{1}{2}\beta\delta - \frac{1}{4}\gamma\gamma$$

octavus

$$i - \frac{\beta\varepsilon}{2} - \frac{\gamma\delta}{2} = \theta = c - \frac{1}{2}\beta\varepsilon - \frac{1}{2}\gamma\delta; \text{ nonus } k - \frac{\gamma\varepsilon}{2} - \frac{\delta\delta}{4} = \kappa = d - \frac{1}{2}\gamma\varepsilon - \frac{1}{4}\delta\delta.$$

Decimus

$$l - \frac{\delta\epsilon}{2} = \lambda = d - \frac{1}{2}\delta\epsilon; \text{ undecimus } m - \frac{\epsilon\epsilon}{4} = \mu = e - \frac{\epsilon}{4}\epsilon\epsilon.$$

Qui sunt valores inventi ab Auctore N°. X. pag. 163. hujus.

Hinc, nisi fallor, constat quomodo facile liceat *progredi in infinitum* (ut recte Newtonus N°. XI. pag. 153. hujus;) in inventione harum quantitatum. Nunc quaerenda est ratio determinandi *leges*, quibus obstringuntur & faciliora redduntur tentamina.

43. Æquationis generalis reducendæ, atque ideo datæ cujusvis, duo priores termini semper respondent duobus prioribus terminis polynomii assumti & quadrati (N°. 24 pag. 173. hujus). Ergo primus terminus complendus in æquatione proposita, is est qui exponentem habet $2r - 2$; quandoquidem nunc agimus de reductione per extractionem radicis quadraticæ. Assumatur ergo polynomium

$$kx^{r-1} + lx^{r-2} + mx^{r-3} + ox^{r-4} + px^{r-5} + qx^{r-6} + sx^{r-7} + \&c.$$

Hic evehendus est ad secundam potestatem; multiplicandus per n, (numerum non quadratum, ne Divisor fiat rationalis,) in singulos terminos; & hi singuli termini jungendi sunt terminis respondentibus æquationis reducendæ, ut ea fiat quadrata & æqualis quadrato polynomii assumti N°. 35. pag. 180. hujus. Hinc complebuntur coefficientes inventi N^is 36 ... 42. pag. 181...186. hujus.

44. Coefficientes polynomii N^i. præcedentis, evecti ad secundam potestatem, facile determinantur per N^um 36. pag. 180. hujus.; & terminorum, quorum exponentes sunt

$$2r - 2;\ 2r - 3;\ 2r - 4;\ 2r - 5;\ 2r - 6;\ 2r - 7;\ 2r - 8;\ \&c.,$$

coefficientes multiplicati per n, ordine, erunt

$$nk^2;\ 2nkl;\ 2nkm + nl^2;\ 2nko + 2nlm;\ 2nkp + 2nlo + nm^2;\ \&c.$$

Quare coefficientes completi æquationis reducendæ, & vere æquales coefficientibus quadrati polynomii assumti, erunt hactenus

$$b + nk^2 = 2A + \frac{a^2}{4};\ c + 2nkl = 2B + aA;\ d + 2nkm + nl^2 = 2C + aB + AA;$$

$$e + 2nko + 2nlm = 2D + aC + 2AB;\ f + 2nkp + 2nlo + nm^2 = 2E + aD + 2AC + B^2;\ \&c.$$

45. Nunc idem polynomium N^i. 43., a fine descriptum, fit

$$z + yx + wx^2 + ux^3 + tx^4 + sx^5 + \&c.$$

coefficientes terminorum, in quibus x exponentes habet

$$0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ \&c.$$

erunt, ordine, per n multiplicandi,

$$z^2;\ 2zy;\ 2zw + y^2;\ 2zu + 2yw;\ 2zt + 2yu + ww;\ 2zs + 2yt + 2uw;\ \&c.$$

46. Polynomium assumtum, cujus secunda potestas æquare debet propositam, postquam completa fuerit, pariter a fine descriptum, sit

$$S + Rx + Qx^2 + Px^3 + Ox^4 + Mx^5 + \&c.$$

& coefficientes terminorum, de quibus igit N^us^ præcedens, erunt

$$S^2;\ 2SR;\ 2SQ + R^2;\ 2SP + 2RQ;\ 2SO + 2RP + Q^2;\ 2SM + 2RO + 2QP;\ \&c.$$

47. Tandem æquatio proposita & complenda, pariter a fine descripta, sit

$$u + tx + sx^2 + rx^3 + qx^4 + px^5 + \&c.$$

Erit

$$u + nz^2 = S^2;\ \text{atque}\ S^2 - u = nz^2$$

48. Quare n est unus e divisoribus ipsius $S^2 - u$; & quidem ita ut quotiens sit quadratus; ut præcipit NEWTONUS, dicens N°. III.; pag. 144. hujus, *tenta si* n *dividat* QQ — s, *& quoti radix sit rationalis*; & idem præcipiens de RR — v, N°. VII. pag. 159. hujus; & in genere N°. X. pag. 153. hujus, *quære numerum quadratum, cui per* n *multiplicato ultimus æquationis* (reducendæ) *terminus sub proprio signo adnexus quadratum numerum efficit*. Nam in genere & pro omnibus æquationibus intelligenda sunt hæc verba, ut patet, quoniam in genere est

$$u + nz^2 = S^2.$$

49. Quod autem præcipit Auctor, N°. XI. pag. 153. hujus ut, ad inveniendum *numerum quadratum, cui per* n *multiplicato ultimus æquationis* reducendæ *terminus sub proprio signo adnexus quadratum numerum efficiat, ipsi* ultimo termino reducendæ, *ubi* n *est par, vel* ejusdem quadruplo, *ubi* n *est impar, successive addantur*

$$n;\ 3n;\ 5n;\ 7n;\ 9n;\ 11n;\ 13n;\ 15n;\ \&c.,$$

& deinceps, donec summa æqualis fiat alicui numero quadrato, non sic intelligendum est quasi hæ summæ esse debeant, ordine, ubi n est par, ponendo,

do, more noſtro, u pro ultimo cujusvis æquationis reducendæ termino.,

$$u + n;\ u + 3n;\ u + 5n;\ u + 7n;\ u + 9n;\ u + 11n;\ \&c.$$

ſed ut cuique ſummæ addatur terminus ſequens in ſerie allata; ita ut eæ ſummæ ſint, ordine

$$u + n;\ u + n + 3n = u + 4n;\ u + 4n + 5n = u + 9n;\ \&c.$$

Idem facile intelligitur quando n eſt impar, ponendo nempe 4u, pro u.

50. Conſtat ſummam numerum imparium e ſerie naturali arithmetica deſumtorum, conficere ſemper numerum quadratum. Ergo ex Auctoris præſcripto, habetur ſemper numerus quadratus per n multiplicatus. Sit enim ſeries

$$1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 11;\ \ldots\ 1 + 2C$$

quoniam differentia eſt 2, erit C numerus differentiarum. Sed, poſt primum, qui nullam habet differentiam, tot ſunt termini, quot differentiæ; erit ergo omnino numerus terminorum $C + 1$; quare ſumma progreſſionis erit

$$\frac{(2C + 1 + 1)\ (C + 1)}{2} = (C + 1)^2$$

51. Conſideremus attentius coefficientes deſcriptos in fine N^{i}. 44. pag. 186. hujus. Erat primo

$$b + nk^2 = 2A + \frac{a^2}{4};\ \&\ b - \frac{a^2}{4} + nk^2 = 2A = \alpha + nk^2$$

per N^{um} 37. pag. 181. hujus. Hinc

$$\alpha = 2A - nk^2$$

& α dividi nequit per n, nec per k, niſi A ſit per n vel per k diviſibilis, vel $A = 0$.

52. Eſt autem eadem quantitas

$$2A - b + \frac{a^2}{4} - nk^2$$

coefficiens tertii termini; & quando a eſt impar, etiam $\frac{a^2}{4}$ impar eſt & fractus; integer autem eſt

$$b = 2A + \frac{a^2}{4} - nk^2$$

Igi-

Igitur, aut

$$2A + \frac{a^2}{4} = 0; \text{ aut } \frac{a^2}{4} - nk^2 = 0; \text{ aut vel } 2A + \frac{a^2}{4}; \text{ vel } \frac{a^2}{4} - nk^2$$

dividi poterunt per 4. Sed neque primum, neque secundum, neque tertium fieri potest, si A est quantitas integra; manet ergo ultimum.

Non primum, quia tunc $\frac{a^2}{4} = -2A$; est autem $\frac{a^2}{4}$ numerus impar, per hypothesim; & 2A est semper par. Esset igitur numerus impar æqualis pari.

Non secundum, quia tunc $\frac{a^2}{4} = nk^2$; & $\frac{a^2}{4k^2} = n$; & n esset numerus quadratus, contra conditionem secundam.

Non tertium; sit enim, si fieri potest

$$2A + \frac{a^2}{4} = x, \text{ numero intego. Ergo } 8A + a^2 = 4x$$

sed 8A est ut & $4x$ numerus par: a^2 impar, & summa vel differentia duorum numerorum, paris & imparis, semper est impar, quæ tamen æquare debet numerum parem $4x$.

Hinc aliquando minuitur numerus tentaminum; nam dispiciendum est an $\frac{a^2}{4} - nk^2$ conficiat numerum divisibilem per quaternarium.

53. Erat secundo

$$c + 2nkl = 2B + aA; \text{ vel, } \frac{c + nkl - 2B}{a} = A = \frac{\alpha + nk^2}{2}$$

per N^{um} 37. Unde

$$c - \frac{a\alpha}{2} + 2nkl - \frac{ank^2}{2} = 2B = 2nkl - \frac{ank^2}{2} + \beta$$

per eundem N^{um} 37. Quare

$$\beta = 2B + nk\left(\frac{ak}{2} - 2l\right)$$

& neque β dividi poterit per n, neque per k, nisi sit vel B divisibilis per n vel per k, vel B $= 0$.

54. Tertio erat

$$d + 2nkm + nl^2 = 2C + aB + AA.$$

&

$$\mathrm{d} + 2nkm + nl^2 - 2\mathrm{C} - \mathrm{aB} = \mathrm{AA} = \left(\frac{\alpha + nk^2}{2}\right)^2$$

Ideo

$$\frac{\mathrm{d} - \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha nk^2}{2} - \frac{n^2k^4}{4} + 2nkm + nl^2 - 2\mathrm{C}}{\mathrm{a}} = \mathrm{B} = nkl - \frac{\mathrm{a}nk^2}{4} + \frac{\beta}{2}$$

per N^{um} præcedentem. Hinc

$$\mathrm{d} - \frac{\mathrm{a}\beta}{2} - \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha nk^2}{2} - \frac{n^2k^4}{4} + 2nkm + nl^2 + \frac{\mathrm{a}^2nk^2}{4} - \mathrm{a}nkl = 2\mathrm{C} =$$

$$\gamma - \frac{n^2k^4}{4} + k^2\left(\frac{\mathrm{a}^2n}{4} - \frac{\alpha n}{2}\right) + k(2nm - \mathrm{a}nl) + nl^2$$

per N^{um} 37., vel tandem

$$\gamma = 2\mathrm{C} + n\left(\frac{nk^4}{4} + k^2\left(\frac{\mathrm{a}^2}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) + k(2m - \mathrm{a}l) + l^2\right)$$

& γ dividi non poterit per n, nisi vel C dividi possit per n, vel sit C $=$ o. Sed γ tunc dividetur per k quando $l = 0$ & præterea vel C divisibilis per k, vel C $=$ o.

55. Erat quarto

$$\mathrm{e} + 2nko + 2nlm = 2\mathrm{D} + \mathrm{aC} + 2\mathrm{AB}$$

Est autem

$$\mathrm{aC} = \frac{\mathrm{a}\gamma}{2} - \frac{\mathrm{a}n^2k^4}{8} + k^2\left(\frac{\mathrm{a}^3n}{8} - \frac{\mathrm{a}\alpha n}{4}\right) + k\left(\mathrm{a}nm - \frac{\mathrm{a}^2nl}{2}\right) + \frac{\mathrm{a}nl^2}{2}$$

&

$$2\mathrm{AB} = \frac{\alpha\beta}{2} - \frac{\mathrm{a}n^2k^4}{4} + n^2k^3l + k^2\left(\frac{\beta n}{2} - \frac{\mathrm{a}\alpha n}{4}\right) + \alpha nkl$$

Erit igitur

$$\mathrm{e} + 2nko + 2nlm = 2\mathrm{D} + \frac{\alpha\beta}{2} + \frac{\alpha\gamma}{2} - \frac{3\mathrm{a}n^2k^4}{8} + n^2k^3l +$$

$$k^2\left(\frac{\mathrm{a}^3n}{8} - \frac{\mathrm{a}\alpha n}{2} + \beta n\right) + k\left(\mathrm{a}nm - \frac{\mathrm{a}^2nl}{2} + \alpha nl\right) + \frac{\mathrm{a}nl^2}{2}$$

Hinc

Hinc

$$2D = \frac{3an^2k^4}{8} - n^2k^3l - k^2\left(\frac{a^3n}{8} - \frac{a\alpha n}{2} + \frac{\beta n}{2}\right) - k\left(anm - \frac{a^2nl}{2} + \alpha nl - 2no\right)$$

$$+ c + 2nlm + \frac{anl^2}{2} - \frac{\alpha\beta}{2} - \frac{\alpha\gamma}{2}.$$

&

$$2D - \frac{3an^3k^4}{8} + n^2k^3l + k^2\left(\frac{a^3n}{8} - \frac{a\alpha n}{2} + \frac{\beta n}{2}\right) + k\left(anm - \frac{a^2nl}{2} + \alpha nl - 2no\right)$$

$$+ 2nlm + \frac{anl^2}{2} = c - \frac{\alpha\beta}{2} - \frac{\alpha\gamma}{2} = \delta$$

per N*um* 40. pag. 184. hujus. Quare neque δ dividi poterit per n, nisi sit aut D per n divisibilis, aut $D = 0$; neque per k, nisi evanescat $2nlm + \frac{anl^2}{2}$, & præterea vel D dividatur per k, vel iterum sit $D = 0$.

56. Quinto erat

$$f + 2nkp + 2nlo + nm^2 = 2E + aD + 2AC + BB$$

Est autem

$$aD = \frac{3a^2n^2k^4}{16} - \frac{an^2k^3l}{2} + k^2\left(-\frac{a^4n}{16} + \frac{a\alpha n}{4} - \frac{a\beta n}{4}\right) +$$

$$k\left(-\frac{a^2nm}{2} + \frac{a^3nl}{4} - \frac{a\alpha nl}{4} + ano\right) + anlm + \frac{a^2nl^2}{4} + \frac{\alpha\delta}{2}$$

&

$$2AC = -\frac{n^3k^6}{8} + k^4\left(\frac{a^2n^2 - 2\alpha n}{8}\right) + k^3\left(n^2m - \frac{n^2\alpha l}{2}\right) + k^2\left(\frac{n\alpha a^2}{8} - \frac{n\alpha^2}{4} + \frac{n^2l^2 + n\gamma}{2}\right)$$

$$+ k\left(n\alpha m - \frac{a\alpha nl}{2}\right) + \frac{\alpha nl^2}{2} + \frac{\alpha\gamma}{2}.$$

atque

$$BB = \frac{n^2a^2k^4}{16} - \frac{n^2ak^3l}{2} + k^2\left(n^2l^2 - \frac{na\beta}{4}\right) + nkl\beta + \frac{\beta\beta}{4}$$

Quare

$$f + 2nkp + 2nlo + nm^2 = 2E - \frac{n^3k^6}{8} + k^4\left(\frac{3a^2n^2}{8} - \frac{3\alpha n^2}{4}\right) +$$

$$k^3\left(n^2m - \frac{3an^2l}{2}\right) + k^2\left(\frac{3n^2l^2}{2} + \frac{3a^2\alpha n}{8} - \frac{\alpha^2n}{4} - \frac{a^4n}{16} - \frac{3a\beta n}{4} + \frac{n\gamma}{2}\right) +$$

$k(\alpha nm$

$$k(\alpha nm - \alpha\alpha nl - \frac{\alpha^2 nm}{2} + \frac{\alpha^3 nl}{4} + \alpha no + \beta nl) + \frac{\alpha nl^2}{2} +$$

$$\alpha nlm + \frac{\alpha^2 nl^2}{4} + \frac{\alpha\gamma}{2} + \frac{\alpha\delta}{2} + \frac{\beta^2}{4}.$$

Unde facile deducetur, quod

$$f - \frac{\alpha\gamma}{2} - \frac{\alpha\delta}{2} - \frac{\beta\beta}{4} = \epsilon$$

per Num 41. pag. 185. hujus, dividi nequit per n, nisi vel E dividatur per n, vel E $=$ 0; neque per k, nisi

$$\frac{\alpha nl^2}{2} + \alpha nlm + \frac{\alpha^2 nl^2}{4} - 2nlo - nm^2 = 0$$

& præterea vel E dividi possit per k, vel rursus E $=$ 0.

57. Inspiciendo coefficientes descriptos N°. 44. pag. 186. hujus, constabit tot esse coefficientes, qui dividi nequeunt per n, nisi præcedentes omnes vel nihilo æquentur vel per n dividi possint, quot sunt litteræ A; B; C; &c. in polynomio ordinis r, quod evectum ponitur ad secundam potestatem. Sunt autem in eo hujusmodi litteræ ad numerum $r - 1$; quia polynomium illud habet terminos numero $r + 1$; quorum primus coefficientem habet unitatem; secundus datum a. Nunc constat idem accidere litteris græcis α; β; γ; δ; &c.

Quare, recte monet Auctor N°. III. pag. 143. hujus, n non quærendam inter divisores unius α, quando æquatio reducenda est quatuor dimensionum; tunc enim $r - 1 = 1$.

Et N°. VII. pag. 149. hujus, non quærendam inter divisores duarum priorum (unam enim ibi addit frustra), quia tunc $r - 1 = 2$; æquatio nempe reducenda est sexti ordinis. Item N°. VIII. pag. 152. hujus, non quærendam inter divisores trium priorum. Nam æquatio reducenda est octo dimensionum, & $r - 1 = 3$. Quod etiam observat in numeris sequentibus.

58. Reducenda ordinis $2r$ habet $2r$ coefficientes; pro singulis habentur singulæ substitutiones demto primo. Habebuntur ergo litteræ græcæ $2r - 1$. Sed assumta ordinis r habet coefficientes determinandos $r - 1$. Erunt ergo $2r - r + 1 - 1 = r$; litteræ græcæ, in quarum valoribus nihilo æquales erunt r posteriores literæ in assumta, nempe

S; R; Q; P; O; &c.

quare hi valores ad numerum r, habebunt n pro communi divisore. Hæc optime congruunt cum iis quæ tradit Auctor N°. III. pag. 141. N°. VII. pag.

pag. 149. N°. IX. pag. 152. N°. X. pag. 153. hujus. Patet autem progressus in infinitum, quia si æquatio reducenda sit in genere ordinis $2r$, quærendus est numerus n communis divisor quantitatum, in genere descriptarum N°. 37. pag. 181. hujus, ad numerum r.

59. Jam in omni tentamine, cujuscunque ordinis sit æquatio reducenda, poni debet

$$A = \frac{a + nkk}{2}, \text{ per N}^{um} \text{ 51. pag. 181. hujus.}$$

$$B = \frac{-ank^2 + 2\beta}{4} + nkl, \text{ per N}^{um} \text{ 53. pag. 189. hujus.}$$

$$C = \frac{d - AA - aB + nl^2}{2} + nkm, \text{ per N}^{um} \text{ 54. pag. 190. hujus.}$$

$$D = \frac{e - aC}{2} - AB + nko + nlm, \text{ per N}^{um} \text{ 55. pag. 190. hujus.}$$

$$E = \frac{f - BB - aD - nm^2}{2} - AC + nkp + nlo, \text{ per N}^{um} \text{ 56. pag. 191. hujus.}$$

Et sic semper, donec deveniatur ad ultimam litteram S, cujus valor $\sqrt{(u + nz^2)}$ inventus est N°. 48. pag. 187. & N^{is} 49. 50. pag. 187. 188. hujus. Dispiciendum igitur est an hi duo valores conveniant, quoniam uterque determinatus est per conjecturam; ultimus quidem via explanata N^{is} 43. & 50. citatis; primus via explananda dum tradetur quomodo detegendi sint valores ipsarum k; l; m; o; &c. Ex his, quæ generalia sunt, facile deducuntur præcepta peculiaria, quæ pro æquatione octo dimensionum tradit noster N°. XI. pag. 154. hujus; observando illum scribere Q ubi nos A; illum R ubi nos B; convenire in ultimo termino S, & in æquatione reducenda me non iisdem uti simbolis, quibus Newtonus.

60. Quod autem addit loco citato, esse debere b (nos dicimus z), numerum ipsi S respondentem, æqualem his tribus

$$\frac{2RS - w}{2nm}; \quad \frac{2QS + RR - v - nm^2}{2nl}; \quad \frac{pS + 2QR - t - 2nlm}{2nk}$$

facile deducitur in genere e coefficientibus, quos incipiendo ab ultimo termino, descripsimus N^{is} 45. & 46. pag. 186. hujus: unde patet esse pro termino secundo ab ultimo

$$2nzy + t = 2SR; \text{ atque } z = \frac{2SR - t}{2ny};$$

pro tertio versus primum

$$2nzw + ny^2 + s = 2SQ + R^2, \ \& \ z = \frac{2SQ + R^2 - s - ny^2}{2nw},$$

pro quarto pariter versus primum

$$2nzv + 2nyw + r = 2SP + RQ; \ \& \ z = \frac{2SP + 2RQ - r - 2nyw}{2nv}$$

Ex eodem numero facile deducentur reliqui valores, quorum ultimus ille erit, qui habebit uS, & ut noster pS.

Quoniam autem litteræ majores determinandæ sunt numero $r-1$, & ultima S ordine jungitur cum præcedentibus, ad numerum $r-2$, & præterea cum a, coefficiente secundi termini in reducenda; erunt ergo hujusmodi valores ad numerum $r-1$. Sic auctor loco citato invenit tres pro æquatione octo dimensionum; quatuor erunt pro decem; quinque pro duodecim; atque ita porro.

61. Quod autem S jungatur cum præcedentibus coefficientibus sui polynomii, nempe cum R; Q; P; &c.

Et quod A; B; C; &c. jungantur cum sequentibus; item quod z jungatur cum y; w; v; &c; quod k; l; m &c. jungantur cum sequentibus, & ad quem numerum facile constat e formatione secundæ potestatis. Nam.

Polynomium assumtum

$$x^r + \frac{a}{2}x^{r-1} + Ax^{r-2} + Bx^{r-3} + Cx^{r-4} + Dx^{r-5} + Ex^{r-6} + \&c,$$

cujus quadratum æquari debet propositæ, postquam ea completa fuerit, habet litteras majores A; B; &c., determinandas ad numerum $r-1$, (N°. 57. pag. 192. hujus). Harum quævis, in quadrato, per multiplicationem jungitur cum coefficientibus omnium polynomii quadrandi terminorum, primo non excluso; invenietur ergo in $r+1$ terminis quadrati. Habet autem quadratum illud terminos numero $2r+1$. Sunt ergo omnino termini numero r, e quibus abest littera quævis; &, demto primo x^{2r}, qui coefficientem habet unitatem; demto pariter secundo, qui habet coefficientem a determinatum, manent termini numero $r-2$, e quibus abest littera quævis major determinanda.

Est itaque prima A in $r+1$ primis terminis quadrati, incipiendo a tertio ejusdem termino; abest ab $r-2$ posterioribus. Ultima S invenitur in ultimis terminis $r+1$; abest ab $r-2$ prioribus. Secunda B est in $r+1$ primis terminis quadrati incipiendo a quarto; abest a tertio, & ab $r-3$ posterioribus. Penultima R invenitur in $r+1$ ultimis terminis, quorum primus est quadrati penultimus; abest ab ultimo & ab $r-3$ prioribus, &c. semper intelligendo quamvis litteram abesse a duobus primis.

62.

62. Sed aliud assumtum polynomium, quadrandum & postea per n multiplicandum, nempe

$$kx^{r-1} + lx^{r-2} + mx^{r-3} + ox^{r-4} + px^{r-5} + qx^{r-6} + sx^{r-7} + \&c.$$

terminos habet numero r, & totidem coefficientes determinandos k; l; m; &c. Horum quisque per multiplicationem jungitur cum sequentibus, quorum numerus est $r - 1$. Sed & quisque coefficiens quadrandus est, vel (quod idem est) quisque coefficiens jungitur cum omnibus, illo ipso non excluso; invenietur igitur in terminis numero r. Illud autem polynomium quadratum terminos habet numero $2r - 1$; quare quilibet coefficiens aberit a terminis numero $r - 1$.

Sic k erit in r prioribus, & aberit ab $r - 1$ posterioribus; l erit in r prioribus, incipiendo a secundo, & aberit a primo & ab $r - 2$ posterioribus: m erit in r prioribus, incipiendo a tertio, & aberit a primo, a secundo, & ab $r - 3$ posterioribus: &c.

63. Cum per N.um 47. pag. 187. hujus, sit

$$u + nz^2 = S^2 = u + n(C+1)^2$$

per N.um 50. pag. 188. hujus; erit

$$z = C + 1$$

& numerus z (vel b apud nostrum N°. XI. pag. 153. hujus) definitur ex numero additionum, quæ fiunt ad ultimum propositæ terminum, secundum N.um 49. pag. 187. hujus, eoque vel integro vel dimidiato.

Sic in exemplo, quod loco citato affert Auctor, ut fiat $S^2 = 0$, duæ sunt faciendæ additiones,

$$\text{prima} - 20 + 5 = -15; \text{ secunda} - 15 + 15 = 0$$

& numerus ipsi S respondens est $1 = \frac{2}{2}$, quia nempe n est impar. Pariter ut inveniatur $S^2 = 25$, tres faciendæ sunt additiones, nempe duæ jam descriptæ, & præterea $0 + 25 = 25$, & $\frac{3}{2}$ est numerus tunc ipsi S respondens.

64. Ex eadem æquatione facile conficitur esse S quantitatem integram, ubi z est integra, & vicissim.

Nam æquatio reducenda ponitur a fractionibus libera; ideo est u quantitas integra; integra pariter ponitur n; ergo &c.

65. Nunc dico quod, si S est quantitas fracta, nullum alium denominatorem habere potest, quam binarium; & quod tunc n est numerus impar atque unitate superans multiplicem quaternarii. Nam, quia est u quantitas integra, &

u =

$$u = S^2 - nz^2$$

quantitas integra debet esse $S^2 - nz^2$; quare si fractæ sunt S & z, necessario habebunt eundem denominatorem; unius pars alteram destruet, & reliqua conficient quantitatem integram. Ponatur

$$S = \frac{A}{B};\ \& \ z = \frac{A \pm C}{B}.$$

Erit

$$S^2 - nz^2 = \frac{A^2 - nA^2 \mp 2nAC - nC^2}{B^2} = u.$$

Ut hujus quantitatis pars destruat ipsam $\frac{A^2}{B^2}$, oportet ut n exponatur per numerum aliquem unitate auctum; sit

$$n = D + 1$$

substitutione facta, erit

$$u = \frac{A^2 - DA^2 - A^2 \mp 2DAC \mp 2AC - DC^2 - C^2}{B^2}$$

&, delendo quæ se destruunt,

$$u = -\frac{DA^2 \mp 2DAC \mp 2AC - DC^2 - C^2}{B^2}$$

quæ debet esse quantitas integra. Statim constat poni non posse

$n = D - 1$; tunc enim $A^2 - (D - 1)A^2 = A^2 - DA^2 + A^2$

neque pars partem destrueret. Debet autem reliqua quantitas esse integra. Si A & D ponantur divisibiles per B; ex. gr.

$$A = BE \ \& \ D = BF, \text{ manebit } \frac{2AC + DC^2 + C^2}{B} = \frac{2EC + FC^2}{B} + \frac{C}{B^2}$$

Præterea erit $S = \frac{A}{B} = E$, quantitas integra, & manebit u quantitas fracta. Si A & C ponantur divisibiles per B; erunt tum S tum z quantates integræ.

Igitur nullo pacto fieri potest ut sit B divisor ipsius A. Cum tamen quantitas supra descripta debeat esse integra, ponatur $D = B^2F$; habebitur

u

$$u = -AF^2 \mp ACF \mp \frac{2AC - C^2}{B^2} - C^2F$$

unde vel $2AC$ & C^2, vel tum C tum C^2, dividentur per B^2. Si non C sed $2AC$ dividitur per B^2, erit $B = 2$ & $C = 2G$.

Si tum C tum C^2 dividuntur per B^2; quoniam coefficiens termini penultimi præbere debet quantitatem integram; & ille dat

$$t = 2SR - 2nzy = \frac{2AR}{B} - 2nzy$$

etiam R dividentur per B: Hinc per coefficientem tertii termini, ab ultimo, etiam Q demonstrabitur divisibilis per B, & procedendo versus primos terminos, reliquæ litteræ majores, donec perveniatur ad A; quæ pariter dividi debet per B, vel, quod idem est, esse ejus multiplex; non ergo erit A nec 2A quantitas fracta.

Tunc autem (N°. 52. pag. 188. 189. hujus), $\frac{a^2}{4} - nk^2$ dividi debet per 4; ita ut fractio $\frac{a^2}{4}$ deleatur, & maneat quantitas integra, ponatur ergo

$$k = x \pm \frac{a}{2}, \text{ manente } n = D + 1 = B^2F + 1$$

eritque

$$\frac{a^2}{4} - nk^2 = + \frac{a^2}{4} - B^2Fx^2 - \mp B^2Fax \mp ax - \frac{B^2Fa^2}{4} - \frac{a^2}{4}$$

ubi quantitas integra esse debet $\frac{B^2Fa^2}{4}$; nequit autem nisi $B = 2$, quod erat unum.

66. Demonstratum autem est esse

$$n = D + 1 = B^2F + 1; \text{ ergo } n = 4F + 1$$

Quod erat alterum.

67. Nunc substituendo 2 pro B, fiet

$$u = -A^2 \mp 2AC \mp \frac{AC}{2} - \frac{C^2}{4} - C^2F$$

& debent integræ esse $\frac{AC}{2}$ ac $\frac{C^2}{4}$; ergo

$C =$

$$C = 2G; \text{ erit } z = \frac{A \mp C}{2} = \frac{A}{2} \pm G$$

Quare

$$u + nz^2 = S^2 = u + (4E + 1)\left(\frac{A^2}{4} \pm AG + G^2\right)$$

&

$$4S^2 = 4u + (4E + 1)(A^2 \pm 4AF + F^2)$$

Igitur quando valor ipſius S inveſtigandus eſt per additionem præſcriptam N°. XI. pag. 153. hujus, atque ideo per numeros integros, additio imparium ipſius n multiplorum fieri debet non ad ultimum reducendæ terminum, ſed ad ipſius quadruplum; & quadrati ſic inventi radix erit 2S, ut monet noſter loco citato.

68. Hic, puto, locus eſt explicandi ratiocinium *Bernoullianum* N°. 12. pag. 169. hujus, quod mihi quidem obſcurius videtur. Ibi ponitur p, ſimbolis Auctoris, & a noſtris, numerus par; impar autem r vel t, & demonſtratum eſt eſſe k numerum integrum. Demonſtrandum eſt eſſe $2l$ expreſſionem fallacem, quæ mentitur numerum parem, cum revera ſit impar.

Nam, quia p eſt par $= 2A$; integer erit $\frac{pp}{4} = A^2$; quare $q - \frac{pp}{4} = q - A^2 = \alpha$, erit numerus integer; par vel impar nihil refert; ergo tum αp, tum pQ erunt pares. Sed r impar eſt, per hypotheſim; ergo $pQ - r$ eſt numerus impar.

Jam, aut $\frac{\alpha p}{2}$ eſt par, aut impar; ſi par, impar erit $r - \frac{\alpha p}{2} = \beta$. Sed n eſſe debet numerus integer, & diviſor ipſius β; ergo n impar eſt.

Si $\frac{\alpha p}{2}$ impar eſt, oportet ut impares ſint tum $\frac{p}{2}$ tum α; ergo $\frac{\alpha\alpha}{4}$ eſt quantitas fracta; quare $\zeta = s - \frac{\alpha\alpha}{4} = \frac{4s - \alpha\alpha}{4}$.

Par autem eſt $4s$ & $\alpha\alpha$ impar, at n ſumitur diviſor denominatoris, qui conſtituit valorem ipſius ζ vel 2ζ; ergo n impar eſt; ut & $k = \frac{\beta}{n}$. Quare etiam nk eſt impar. Sed

$$2nkl = pQ - r$$

eſt impar, quia $pQ - r$ impar eſt; impar eſt factor nk; igitur & $2l$ impar eſt, quamvis ſpeciem præbeat numeri paris. Sit ergo.

69. $2l = 2y \pm 1$; erit $l = \frac{2y \pm 1}{2}$, & $nl^2 = \frac{4ny^2 \pm 4ny + n}{4} = QQ - s$

&

& est s quantitas integra; quare Q est quantitas fracta denominatorem habens 2; atque hujus fractionis numerator est impar. Sit

$$70.\ Q = \frac{2x \pm 1}{2},\ \text{erit}\ QQ - s = \frac{4x^2 \pm 4x + 1 - s}{4} = n\left(\frac{4y^2 \pm 4y + 1}{4}\right)$$

Erit

$$n = \frac{1 \pm 4x + 4x^2 - 4s}{1 \pm 4y + 4y^2} = 1 + 4\left(\frac{4x + x^2 - s - y - y^2}{1 \pm 4y + 4y^2}\right)$$

Debet autem n esse numerus integer, quare ad integrum revocabitur fractio valoris præcedentis, & n æquabit quadrupli multiplum auctum unitate.

71. Hæc recte procedunt quando fractio

$$\frac{\pm x + x^2 - s - y - y^2}{1 \pm 4y + 4y^2}$$

(quæ præbere debet numerum integrum, & per 4 multiplicata unitati jungenda est ut inveniatur ipsius n valor) est positiva. Si vero ea esset negativa, tunc valor ipsius n esset negativus, & deberet n unitate minor esse quam aliquis multiplex quaternarii; atque æquatio reduceretur per radicem quadraticam imaginariam. Velut si, proponeretur æquatio

$$x^4 - 3x^3 + 44x^2 - 123x + 97 = 0.$$

Hic est

$$a = -3;\ \frac{a}{2} = -\frac{3}{2};\ \frac{a^2}{4} = +\frac{9}{4};\ b = +44;\ c = -123;\ d = +97$$

Ideo

$$b - \frac{aa}{4} = 44 - \frac{9}{4} = \frac{176 - 9}{4} = \frac{167}{4} = \alpha;\ \frac{a\alpha}{2} = -\frac{501}{8}$$

atque

$$c - \frac{a\alpha}{2} = -123 + \frac{501}{8} = -\frac{984 + 501}{8} = -\frac{483}{8} = \beta$$

Pariter

$$\frac{\alpha\alpha}{4} = +\frac{27889}{16};\ d - \frac{\alpha\alpha}{4} = +97 - \frac{27889}{4} = \frac{1552 - 27889}{16} = -\frac{26337}{16} = \zeta.$$

Divisores ipsius β sunt 3; 7; 23; & ipsius ζ sunt 3; & 8779; communis est.

eſt unus, 3; qui a quaternario deficit unitate; ergo æquatio propoſita per extractionem radicis realis reduci nequit. Sumo $n = -3$; & tento an $k = +\frac{7}{2}$, (quia nempe α eſt impar) rem conficere poſſit.

Eſt ergo

$$ak = -\frac{21}{4};\ \frac{\beta}{n} = -\frac{483}{8.-3} = +\frac{161}{8};\ \frac{\beta}{nk} = +\frac{161}{8.\frac{7}{2}} = +\frac{23}{4}$$

Quare

$$\frac{ak}{2} - \frac{\beta}{nz} = -\frac{21-23}{4} = -\frac{44}{4} = -11;\ \&\ l = -\frac{11}{2}.$$

Hinc facile invenitur

$$\frac{a+nk^2}{2} = \frac{147}{8} - \frac{3}{2}\cdot\frac{49}{4} = \frac{167-147}{8} = +\frac{5}{2} = A$$

&

$$AA = \frac{25}{4};\ AA-d = \frac{25}{4} - 97 = \frac{25-388}{4} = -\frac{363}{4}$$

Hic numerus diviſus per $n = -3$ dat $\frac{121}{4}$, cujus radix eſt $\pm\frac{11}{2} = l$. Quapropter æquatio propoſita reduci poteſt, & præbet

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{2} = (\frac{7}{2}x - \frac{11}{2})\sqrt{-3}.$$

72. Si quis vero ſumeret

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{2} = (\frac{7}{2}x - \frac{11}{2})\sqrt{-5}$$

vel per aliquem alium numerum imparem unitate ſuperantem numerum quaternarium, & utramque partem quadraret, nunquam conficeret æquationem a fractionibus liberam. Oriretur enim in exemplo noſtro

$$x^4 - 3x^3 + 68\frac{1}{2}x^2 - 200x + 157\frac{1}{2} = 0$$

quæ tamen reduci poteſt multiplicando per 2, & adhibendo primam e duabus

bus methodis, quas BERNOULLIUS tradidit N°. 18. pag. 172. hujus. Sic enim erit

$$2x^4 - 6x^3 + 137x^2 - 400x + 315 = 0$$

Nunc ponatur $2x = y$, atque ideo $m = 2$; $m^2 = 4$; $m^3 = 8$. Substituendo y pro x, ac multiplicando tertium propositæ coefficientem per 2, quartum per 4, & ultimum per 8, prodibit

$$y^4 - 6y^3 + 274y^2 - 1600y + 2520 = 0.$$

Erit igitur

$$a = -6;\ \frac{a}{2} = -3;\ \frac{a^2}{4} = +9;\ b - \frac{a^2}{4} = 274 - 9 = 265 = \alpha$$

Hinc

$$\frac{a\alpha}{2} = -3.265 = -795;\ \&\ \frac{\alpha\alpha}{4} = +\frac{70225}{4}.$$

Quare

$$c - \frac{a\alpha}{2} = -1600 + 795 = -805 = \beta,$$

&

$$d - \frac{\alpha\alpha}{4} = 2520 - \frac{70225}{4} = -\frac{60145}{4} = \zeta.$$

Divisores ipsius β sunt 5; 7; 23. Divisores ipsius ζ sunt 5; 23; 523. Quare aut $n = -5$, aut $n = -23$. Sumo $n = -5$. Erit $\frac{\beta}{n} = \frac{-805}{-5} = +161$ & $k = +7$; vel $k = +23$. Sit $k = 7$; erit $\frac{\beta}{nk} = 23$; & $\frac{ak}{2} = -3.7 = -21$. Quare $\frac{ak}{2} - \frac{\beta}{nk} = -21 - 23 = -44 = 2l$; & $l = -22$.

Jam

$$\frac{\alpha + nkk}{2} = \frac{265 - 5.49}{2} = 10 = A;\ \&\ AA = 100$$

ac

$$AA - d = 100 - 2520 = -2420;\ \&\ \frac{AA - d}{n} = \frac{-2420}{-5} = 484 = (-22)^2 = l^2$$

Eſt ergo æquatio reducta

$$y^2 - 3y + 10 = (7y - 21)\sqrt{-5}$$

& reſtituendo $4x^2$ pro y^2; ac $2x$ pro y, & terminos omnes dividendo per 4

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{2} = (\frac{7}{2}x - \frac{11}{2})\sqrt{-5}$$

Si vero poſuiſſem $n = +5$ reductio fieri non potuiſſet.

Quæ ſupra N^is^ 65. pag. 195. 196. & 66 pag. 197. hujus, demonſtrata ſunt, ſic in genere poſſunt oſtendi.

73. In polynomio ordinis r, quod quadrandum aſſumitur, eſt

a coefficiens termini, cujus exponens eſt $r - 1$
A coefficiens termini, cujus exponens eſt $r - 2$
B, coefficiens termini, cujus exponens eſt $r - 3$
&c.

Sed & aliud aſſumitur polynomium quadrandum ordinis $r - 1$, cujus ſinguli termini multiplicandi ſunt per n. In hoc eſt

k coefficiens primi termini, cujus exponens eſt $r - 1$
l coefficiens termini, cujus exponens eſt $r - 2$
m coefficiens termini, cujus exponens eſt $r - 3$
&c.

Quare ſibi reſpondent

a & k; A & l; B & m; C & o; D & p; E & q; &c.

74. Coefficientes completi, deſcripti N°. 44. pag. 186. hujus, ita ſunt comparati, ut ſimul adſint vel abſint quadrata litterarum reſpondentium. Ergo ſi qua littera major ſit quantitas fracta, etiam ei reſpondens minor, debet eſſe fracta, ita ut utraque habeat eundem denominatorem, (ut præcipit Auctor N° XI. pag. 153. hujus, de S & h; R & m; Q & l; p & k;) & ita quidem ut minoris quadratæ & ductæ in n pars vel deſtruat quadratum fractum majoris, vel cum eo conficiat quantitatem integram.

75. Sed prima determinandarum littera A, primum eſt in tertio ſui quadrati termino, cujus exponens eſt $2r - 2$; littera l ei reſpondens primum eſt in ſecundo ſui quadrati termino, cujus exponens eſt $2r - 3$ (N^is^ 61 & 62. pag. 194. hujus), & ſic de reliquis. Igitur ſemper primus termini illius coefficiens completus in quo eſt littera aliqua major M, caret littera minori, quæ ei reſpondet, & quæ indicabitur per t. Igitur ſi M ſit quantitas fracta, coefficiens ille manebit fractus, contra hypotheſim; nec fieri poterit integer quin tota æquatio multiplicetur per ejus denominatorem; atque ideo ejus primus terminus, quod rurſus eſt contra hypotheſim; nam ta-

tacite ponit NEWTONUS primum reducendæ terminum coefficientem habere unitatem, & integram esse æquationem reducendam.

76. Atqui littera illa, in primo termino in quo est, ducitur in 2; igitur ille terminus poterit esse integer si M sit quantitas fracta denominatorem habens binarium.

Si quis hoc ratiocinium exemplis illustratum cupiat, inspiciat coefficientes completos descriptos N°. 44. pag. 186. hujus; & videbit coefficientem tertii termini in quadrato esse

$$b + nk^2 = 2A + \frac{a^2}{4}$$

in quo primum est A, & in quo non est l, quæ ei respondet. Igitur, negligendo quadrata postea consideranda, si est A quantitas fracta, vel denominatorem habebit 2, vel aderit fractio in coefficiente, quod esse nequit, quia ponitur b coefficiens propositæ, quantitas integra, & est

$$b = 2A + \frac{a^2}{4} - nk^2$$

Pariter coefficiens quarti termini in quadrato, est

$$c + 2nkl = 2B + aA$$

in quo non est m, littera respondens ipsi B; unde & hic sponte redit ratiocinium præcedens, & sic de reliquis.

77. Si vero primus propositæ terminus alium haberet coefficientem, præter unitatem, proposita esset transformanda in aliam, cujus primus terminus coefficientem haberet unitatem, & transformata esset reducenda, atque in ea vim suam haberet ratiocinium præcedens.

Quare vere noster N°. XI. pag. 153. hujus, addit posse S & k; R & m; &c., esse fractos, *denominatorem habentes binarium.* Ponit enim altissimi termini coefficientem in reducenda esse unitatem, quod jam monuimus.

78. His positis, reliqua facile demonstrantur in genere.

Sint, ut supra N°. 74. pag. 202. hujus, quantitates fractæ & respondentes M & t. Quoniam utraque est fracta & denominatorem habet binarium, utraque est impar. Sit ergo

$$M = \frac{2N+1}{2} \;\&\; t = \frac{2y+1}{2}$$

Erat in eodem coefficiente

$$M^2 - nt^2 = \frac{4N^2 + 4N + 1 - 4ny^2 - 4ny - n}{4}$$

si n est numerus positivus. Tunc autem est

$$\frac{4N^2 + 4N - 4ny^2 - 4ny}{4} = N^2 + N - ny^2 - ny$$

quantitas integra; sed manet fracta

$$\frac{1 - n}{4}$$

quæ fractio deleri nequit nisi n constet ex unitate & ex quaternarii multiplo. Si vero ponatur

$$n = 4z + 1, \text{ tunc } \frac{1-n}{4} = \frac{1 - 4z - 1}{4} = -z$$

Tunc ergo debet n esse numerus impar, qui per quaternarium divisus relinquit unitatem, ut noster pluribus locis.

79. Sed si n est numerus negativus, fiet

$$M^2 - nt^2 = N^2 + N + ny^2 + ny + \frac{1+n}{4}$$

& delebitur fractio si n constet ex multiplo binarii unitate minuto. Nam si ponatur

$$n = 2z - 1, \text{ erit } \frac{1+n}{4} = \frac{1 + 2z - 1}{4} = \frac{2z}{4} = \frac{z}{2}$$

quæ erit quantitas integra si $z = 2x$; atque ideo

$$n = 4x - 1.$$

Hinc, si n est numerus negativus impar, unitate deficere debet a multiplo quaternarii, ut jam observavimus N°. 71. pag. 199. hujus.

80. Si quis in proposita & reducenda *coefficiens termini secundi, vel quarti, vel sexti, vel alicujus denominati a numero pari, sit impar, debet esse* n *numerus impar*.

Hæc regula generalis facile deducitur e N°. X. pag. 153. hujus, & e præcedentibus; ad eam in genere demonstrandam utiles erunt sequentes observationes.

81. Exponentes terminorum denominatorum a numero pari, sunt impares in quovis binomio evecto ad secundam potestatem. Quare horum terminorum coefficientes in utroque polynomio assumto & quadrato, consistunt ex binis rectangulis, sine ullo quadrato (N°. 36. pag. 180. hujus.). Ergo, si binomium assumtum constat e quantitatibus integris, hi coefficientes sunt pares.

Ex.

Ex. gr. aſſumatur quadrandum polynomium

$$x^r + ax^{r-1} + Ax^{r-2} + Bx^{r-3} + Cx^{r-4} + Dx^{r-5} + Ex^{r-6} + \&c,$$

hoc quadratum habebit

termini ſecundi	coefficientem .. $2a$
quarti	$2B + 2aA$
ſexti	$2D + 2aC + 2AB$
octavi	$2F + 2aE + 2AD + 2BC$;
&c.	&c.

Pariter aliud polynomium aſſumtum, quadrandum, & poſtea per n multiplicandum,

$$kx^{r-1} + lx^{r-2} + mx^{r-3} + ox^{r-4} + pz^{r-5} + qx^{r-6} + \&c.$$

habebit terminorum ſuorum, ſecundi, quarti, ſexti, octavi, &c; coefficientes per n multiplicatos, ordine

$2nkl$, $2nko + 2nlm$; $2nkq + 2nlp + 2nmo$; $2nks + 2nlr + 2nmq + 2nop$; &c.

82. Differentia duorum coefficientium, qui in utroque binomio pertinent ad eundem terminum, conficit coefficientem ejusdem termini in reducenda; & differentia duorum numerorum parium eſt numerus par. Nullus ergo coefficiens propoſitæ denominatus a numero pari poteſt eſſe impar, niſi oriatur a fracto reductæ coefficiente. Sed, in aliquo e coefficientibus, qui ſequuntur in quadrato, adeſt hujus coefficientis fracti quadratum quod etiam dividi debet per quaternarium. Totus coefficiens reducendus eſt ad eundem denominatorem, ergo omnes termini erunt pares præter quadratum illud, quod eſt impar. Orietur ergo numerator impar fractionis, cujus diviſor eſſe debet n atque ideo erit n numerus impar; &, ſi poſitivus eſt, per quaternarium diviſus relinquet unitatem.

Sit, ad majorem illuſtrationem, numerus impar

$$e = 2D + 2aC + 2AB - 2nko - 2nlm.$$

oportet ut aliqua littera, ex. gr. D, ſit numerus fractus. Ponatur $D = \frac{D}{2}$; eritque D numerus impar. Erit autem in coefficiente termini undecimi

$$k - 2I - 2aH - 2AG - 2BF - 2CE - \frac{DD}{4}$$

& multiplicando per 4, conficietur numerator impar

$$4k - 8I - 8aH - 8AG - 8BF - 8CE - DD$$

quem si dividere debet n, profecto erit impar; si hunc dividere non debet, exponetur hic numerus impar per aliquam litteram græcam, (vide Num 37. pag. 184. hujus) & hujus litteræ quadratum divisum per quaternarium erit in aliqua e sequentibus quantitatibus, quæ per n dividi debent, reductæ nempe ad eundem denominatorem. Unde redibit præcedens ratiocinium.

83. Si quis vero reductæ coefficiens sit numerus impar, impar esse poterit in reducenda proposita coefficiens termini in quo est quadratum numeri imparis.

Sic proposita

$$x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$$

cujus reducta est

$$x^3 - 2x^2 + 2x - 2 = (x^2 - x + 1)\sqrt{3}$$

pares sunt coefficientes terminorum secundi, quarti, & sexti, reliqui omnes impares, quia $n = 3$; & $m = 1$, est impar.

84. Cum autem sit ostensum aliquem reductæ terminum esse fractum, si quis coefficiens alicujus termini denominati a numero pari, sit impar (N°. 80. pag. 204. hujus & seq.): fractionis denominatorem esse binarium, si altissimus propositæ & reducendæ terminus coefficientem habeat unitatem, (N°. 75. pag. 202. hujus): tunc esse n numerum imparem, & eum unitate necessario superare aliquem quaternarii multiplicem, si est numerus positivus, (N°. 78. pag. 203. hujus): sed si est numerus negativus, esse debere unitate minorem quam aliquis quaternarii multiplex (N°. 79. pag. 204. hujus); in genere demonstratæ sunt præcipuæ NEWTONI regulæ.

85. Regulam, quam tradit Auctor N°. XV. & XVI. pag. 158... 160. hujus, dicunt *Regulam* CARDANI. Historiam vide in libro cui titulus, *Histoire des Mathematiques par* MONTUCLAS, Tom. I. Part. III. lib. IV. N°. V. Theorema ita dilucide exposuit noster, ut quid addere possim, non videam; præter formulæ generalis applicationem ad peculiares.

Theorematis investigationem tradiderunt COLSONUS (Vide *Additamentum* in fine hujus, pag. 19;) & EULERUS in *Commentariis Petropolitanis* Tom. VI. pag. 216. & seq.

86. Æquationes cubicæ secundo termino carentes omnino revocantur ad has quatuor formulas.

$$1^{\circ}.\ x^{3*} + qx + r = 0;\ 2^{\circ}.\ x^{3*} + qx - r = 0$$

&

$$3^{\circ}.\ x^{3*} - qx + r = 0;\ 4^{\circ}.\ x^{3*} - qx - r = 0.$$

87. Quoniam hæ formulæ carent secundo termino, vel una radix positiva æqualis est summæ duarum negativarum, vel una negativa æqualis summæ

summæ duarum positivarum. Semper est saltem una radix positiva.

88. Ponendo $x = a+b$, fit

$$x^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Est autem

$$3a^2b + 3ab^2 = 3ab(a+b) = 3abx$$

quapropter formulæ evadent

$$1°.\ a^3+b^3 \begin{matrix}+3abx\\+qx\end{matrix} +r = 0;\quad 2°.\ a^3+b^3 \begin{matrix}+3abx\\+qx\end{matrix} -r = 0$$

&

$$3°.\ a^3+b^3 \begin{matrix}+3abx\\-qx\end{matrix} +r = 0;\quad 4°.\ a^3+b^3 \begin{matrix}+3abx\\-qx\end{matrix} -r = 0$$

89. Ponamus in prima & secunda formula

$$3abx + qx = 0; \text{ unde } b = \frac{-q}{3a}; \ \& \ b^3 = \frac{-q^3}{27a^3}$$

& in tertia ac quarta

$$3abx - qx = 0; \text{ unde } b = \frac{q}{3a} \ \& \ b^3 = \frac{q^3}{27a^3}$$

90. Quorum valorum substitutione, formulæ, deletis $3abx..qx$ se destruentibus, manebunt

$$1°.\ a^3 - \frac{q^3}{27a^3} + r = 0;\quad 2°.\ a^3 - \frac{q^3}{27a^3} - r = 0$$

&

$$3°.\ a^3 + \frac{q^3}{27a^3} + r = 0;\quad 4°.\ a^3 + \frac{q^3}{27a^3} - r = 0$$

Prima dat

$$a^6 - \frac{q^3}{27} + a^3r = 0, \text{ vel } a^6 = -a^3r + \frac{q^3}{27}$$

atque ideo

$$a^3 = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}; \ \& \ a = \sqrt[3]{\left(-\frac{r}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}\right)}$$

Sed

Sed

$$b = \frac{-q}{3a} = \frac{-q}{3\sqrt[3]{(-\frac{r}{2} \pm \sqrt{(\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27})})}}.$$

Secunda dat

$$a^6 - \frac{q^3}{27} - a^3 r = 0, \text{ vel } a^6 = +a^3 r + \frac{q^3}{27};$$

id eſt

$$a^3 = +\frac{r}{2} \pm \sqrt{(\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27})}; \ \& \ a = \sqrt[3]{(+\frac{r}{2} \pm \sqrt{(\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27})})};$$

Sed

$$b = \frac{-q}{3a} = \frac{-q}{3\sqrt[3]{(\frac{r}{2} + \sqrt{(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27})})}}.$$

Tertia

$$a^6 + \frac{q^3}{27} + a^3 r = 0, \text{ vel } a^6 = -a^3 r - \frac{q^3}{27};$$

&

$$a^3 = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{(\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27})}; \ \& \ a = \sqrt[3]{(-\frac{r}{2} \pm \sqrt{(\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27})})};$$

Sed

$$b = \frac{q}{3a} = \frac{-q}{3\sqrt[3]{(-\frac{r}{2} \pm \sqrt{(\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27})})}}.$$

Quarta tandem

$$a^6 + \frac{q^3}{27} - a^3 r = 0, \text{ vel } a^6 = +a^3 r - \frac{q^3}{27};$$

&

$$a^3 = +\frac{r}{2} \pm \sqrt{(\frac{r^2}{2} - \frac{q^3}{27})}; \ \& \ a = \sqrt[3]{(+\frac{r}{4} \pm \sqrt{(\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27})})};$$

Sed

Sed

$$b = \frac{q}{3a} = \frac{q}{3\sqrt[3]{(+\frac{r}{2} \pm \sqrt{(\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27})})}.}$$

91. Unde erit in prima formula

$$x = a + b = \sqrt[3]{(-\frac{r}{2} + \sqrt{(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27})})} \frac{-q}{3\sqrt[3]{(-\frac{r}{2} + \sqrt{(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27})})}};$$

in ſecunda formula

$$x = a + b = \sqrt[3]{(+\frac{r}{2} + \sqrt{(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27})})} \frac{-q}{3\sqrt[3]{(+\frac{r}{2} + \sqrt{(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27})})}};$$

in tertia formula

$$x = a + b = \sqrt[3]{(-\frac{r}{2} + \sqrt{(\frac{rr}{4} - \frac{q^3}{27})})} + \frac{q}{3\sqrt[3]{(-\frac{r}{2} + \sqrt{(\frac{rr}{27} - \frac{q^3}{27})})}};$$

in quarta tandem

$$x = a + b = \sqrt[3]{(+\frac{r}{2} + \sqrt{(\frac{rr}{4} - \frac{q^3}{27})})} + \frac{q}{3\sqrt[3]{(+\frac{r}{2} + \sqrt{(\frac{rr}{4} - \frac{q^3}{27})})}}.$$

92. Sed æque dici poterat. Eſt in prima formula, ob ipſius b valorem negativum (N°. 89. pag. 207. hujus).

$$a^3 - b^3 + r = 0$$

Erat

$$a^3 = -\frac{r}{2} + \sqrt{(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27})}.$$

Ergo

$$-\frac{r}{2} + \sqrt{(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27})} - b^3 + r = 0 = +\frac{r}{2} + \sqrt{(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27})} - b^3$$

&

$$b = \sqrt[3]{}(+\frac{r}{2} + \sqrt{}(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27})).$$

Quapropter

$$x = a - b = \sqrt[3]{}(-\frac{r}{2} + \sqrt{}(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27})) - \sqrt[3]{}(+\frac{r}{2} + \sqrt{}(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27})).$$

Vel

$$x = a - b = -\sqrt[3]{}(+\frac{r}{2} - (\sqrt{}\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27})) - \sqrt{}(+\frac{r}{2} + \sqrt{}(\frac{rr}{4} + q^3)).$$

In prima expressione major quantitas $\sqrt[3]{}(\frac{r}{4} + \sqrt{}(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27}))$ est negativa, & negativus est valor ipsius x, quod etiam patet e secunda expressione.

93. Sed hic occupanda est difficultas, quæ fortasse nonnullos turbare posset. Cum enim sit

$$a^3 = -\frac{r}{2} + \sqrt{}(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27}), \text{ vel } = -\frac{r}{2} - \sqrt{}(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27})$$

prima hypothesis

$$a^3 = -\frac{r}{2} + \sqrt{}(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27})$$

dat

$$b^3 = r + a^3 = +\frac{r}{2} + \sqrt{}(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27}).$$

At altera hypothesis

$$a^3 = -\frac{r}{2} - \sqrt{}(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27})$$

dat

$$b^3 = r + a^3 = +\frac{r}{2} - \sqrt{}(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27}).$$

Duo valores ipsius a^3 quatuor modis jungi possunt per subductionem cum duobus valoribus ipsius b^3; conficientur ergo quatuor radices æquationis cubicæ, quæ tamen tres tantum habere potest. Erunt autem quatuor valores incognitæ x sic inventi

Pri-

Primus

$$x = a - b = \sqrt[3]{(-\frac{r}{2} + \sqrt{(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27})})} - \sqrt[3]{(+\frac{r}{2} + \sqrt{(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27})})}.$$

Secundus

$$x = a - b = \sqrt[3]{(-\frac{r}{2} + \sqrt{(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27})})} - \sqrt[3]{(+\frac{r}{2} - \sqrt{(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27})})}.$$

Tertius

$$x = a - b = \sqrt[3]{(-\frac{r}{2} - \sqrt{(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27})})} - \sqrt[3]{(+\frac{r}{2} + \sqrt{(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27})})}.$$

Quartus tandem

$$x = a - b = \sqrt[3]{(-\frac{r}{2} - \sqrt{(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27})})} - \sqrt[3]{(+\frac{r}{2} - \sqrt{(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27})})}.$$

Sed horum quatuor valorum primus & quartus coincidunt, &, cum ſpecie differant, reipſa iidem ſunt. Secundus & tertius pertinent ad aliam hypotheſim, noſtræ quidem affinem, attamen diverſam. Nam

Primus valor ipſius b^3, nempe

$$\frac{r}{2} + \sqrt{(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27})}$$

& poſterior valor ipſius a^3, id eſt

$$-\frac{r}{2} - \sqrt{(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27})}$$

ſunt reciproci, ſcilicet oppoſiti & æquales, cum ſit

$$-\frac{r}{2} - \sqrt{(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27})} = -1\,(+\frac{r}{2} + \sqrt{(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27})}).$$

Pariter poſterior ipſius b^3 valor

$$+\frac{r}{2} - \sqrt{(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27})}$$

& primus valor ipſius a^3

$$-\frac{r}{2} + \sqrt{(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27})} = -1\,(+\frac{r}{2} - \sqrt{(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27})})$$

 ſunt

funt reciproci. Quare

$$+\sqrt[3]{(-\frac{r}{2}+\sqrt{(\frac{rr}{4}+\frac{q^3}{27})})}-\sqrt[3]{(+\frac{r}{2}+\sqrt{(\frac{rr}{4}+\frac{q^3}{27})})} =$$

$$-\sqrt[3]{(+\frac{r}{2}-\sqrt{(\frac{rr}{4}+\frac{q^3}{27})})}+\sqrt[3]{(-\frac{r}{2}-\sqrt{(\frac{rr}{4}+\frac{q^3}{27})})}$$

id eft incognitæ x valor primus idem eft ac quartus. Item

$$-\sqrt[3]{(+\frac{r}{2}-\sqrt{(\frac{rr}{4}+\frac{q^3}{27})})} = +1\sqrt[3]{(-\frac{r}{2}+\sqrt{(\frac{rr}{4}+\frac{q^3}{27})})}.$$

Quare fecundus valor incognitæ x fit

$$+2\sqrt[3]{(-\frac{r}{2}+\sqrt{(\frac{rr}{4}+\frac{q^3}{27})})} = 2a$$

Tandem

$$\sqrt[3]{(-\frac{r}{2}-\sqrt{(\frac{rr}{4}+\frac{q^3}{27})})} = -\sqrt[3]{(+\frac{r}{2}+\sqrt{(\frac{rr}{4}+\frac{q^3}{27})})} = -2b.$$

Qui duo valores funt rejiciendi, primo quia eorum fumma $2a - 2b$ æqualis non eft tertio valori $a - b$, quod oportebat, quia æquatio refolvenda caret fecundo termino; fecundo quia alter ponit $x = 2a$; alter $x = -2b$, & noftra hypothefis ponit $x = a - b$.

Secunda formula, ob valorem ipfius b pariter negativum, mutata fuit in

$$a^3 - b^3 - r = 0 = +\frac{r}{2} \pm \sqrt{(\frac{rr}{4}+\frac{q^3}{27})} - r - b^3$$

atque ideo

$$b^3 = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{(\frac{rr}{4}+\frac{q^3}{27})},$$

ubi reciproci funt

$$a^3 = +\frac{r}{2}+\sqrt{(\frac{rr}{4}+\frac{q^3}{27})} \;\&\; b^3 = -\frac{r}{2}-\sqrt{(\frac{rr}{4}+\frac{q^3}{27})}$$

&

$$a^3 = +\frac{r}{2}-\sqrt{(\frac{rr}{4}+\frac{q^3}{27})} \text{ ac } b^3 = -\frac{r}{2}+\sqrt{(\frac{rr}{4}+\frac{q^3}{27})}.$$

Qua-

Quare unicus valor incognitæ x, recipiendus, erit

$$x = a - b = \sqrt[3]{(+\frac{r}{2} + \sqrt{(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27})})} - \sqrt[3]{(-\frac{r}{2} + \sqrt{(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27})})}$$

vel

$$x = a - b = \sqrt[3]{(+\frac{r}{2} + \sqrt{(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27})})} + \sqrt[3]{(+\frac{r}{2} - \sqrt{(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27})})}$$

ubi major quantitas $\sqrt[3]{(+\frac{r}{2} + \sqrt{(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27})})}$ est positiva, & positivus valor ipsius x.

Tertia formula facta erat, propter b positivum,

$$a^3 + b^3 + r = 0 = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{(\frac{rr}{4} - \frac{q^3}{27})} + b^3 + r$$

atque ideo

$$b^3 = -\frac{1}{2}r \mp \sqrt{(\frac{rr}{4} - \frac{q^3}{27})}$$

in qua iidem prorsus sunt

$$a^3 = -\frac{r}{2} + \sqrt{(\frac{rr}{4} - \frac{q^3}{27})} \ \& \ b^3 = -\frac{r}{2} + \sqrt{(\frac{rr}{4} - \frac{q^3}{27})}$$

item

$$a^3 = -\frac{r}{2} - \sqrt{(\frac{rr}{4} - \frac{q^3}{27})} \ \& \ b^3 = -\frac{r}{2} - \sqrt{(\frac{rr}{4} - \frac{q^3}{27})}$$

Ergo unicus incognitæ x valor est

$$x = a + b = \sqrt[3]{(-\frac{r}{2} + \sqrt{(\frac{rr}{4} - \frac{q^3}{27})})} + \sqrt[3]{(-\frac{r}{2} - \sqrt{(\frac{rr}{4} - \frac{q^3}{27})})}$$

$$= -\sqrt[3]{(+\frac{r}{2} - \sqrt{(\frac{rr}{4} - \frac{q^3}{27})})} - \sqrt[3]{(+\frac{r}{2} + \sqrt{(\frac{rr}{4} - \frac{q^3}{27})})}.$$

In prima expressione utraque quantitas $\sqrt[3]{(-\frac{r}{2} \pm \sqrt{(\frac{rr}{4} - \frac{q^3}{27})})}$ est negativa, & negativus est valor incognitæ x. In altera idem facile intelligitur.

Demum quarta formula facta erat

$$a^3 + b^3 - r = 0 = + \frac{r}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{rr}{4} - \frac{q^3}{27}\right)} + b^3 - r$$

Unde

$$b^3 = + \frac{r}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{rr}{4} - \frac{q^3}{27}\right)}$$

ubi iidem ſunt valores

$$a^3 = \frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} - \frac{q^3}{27}\right)} \ \& \ b^3 = \frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} - \frac{q^3}{27}\right)}$$

item

$$a^3 = \frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{rr}{4} - \frac{q^3}{27}\right)} \ \& \ b^3 = \frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{rr}{4} - \frac{q^3}{27}\right)}.$$

Quare unicus habentur valor ipſius x, nempe

$$x = a + b = \sqrt[3]{\left(+ \frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{rr}{4} - \frac{q^3}{27}\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(+ \frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{rr}{4} - \frac{q^3}{27}\right)}\right)}$$

in quo valore utraque quantitas $\sqrt[3]{\left(+\frac{r}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{rr}{4} - \frac{q^3}{27}\right)}\right)}$ eſt poſitiva, & poſitivus manet valor ipſius x.

94. Duæ priores formulæ ſemper ſunt poſſibiles, quia ſemper poſſibilis eſt $\sqrt{\left(\frac{rr}{4} + \frac{q^3}{27}\right)}$; & habent duas radices imaginarias, (N°. 72. pag. 25. hujus).

95. Duæ formulæ poſteriores tunc ſunt impoſſibiles, cum impoſſibilis eſt $\sqrt{\left(\frac{rr}{4} - \frac{q^3}{27}\right)}$; ideſt cum $\frac{q^3}{27}$ negativus eſt & major quam $\frac{rr}{4}$.

Hujusmodi ſunt formulæ tertia & quarta, quæ ſic exprimi ſimul poſſunt

$$x^3 * - qx \pm r = 0.$$

95. Interim tamen hujusmodi formula, quæ dicitur *irreductibilis*, confici poteſt ex radicibus realibus, & confici nequit ex radicibus imaginariis.

Quod confici poſſit ex radicibus realibus, conſtat ex N°. 71. pag. 25. hujus. Sed & ſic oſtendi poteſt. Sumantur æquationes ſimplices

$$x + a + b = 0$$
$$x + a - b = 0$$
$$x - 2a \quad = 0$$

Ex

Ex harum multiplicatione nascetur æquatio cubica

$$x^3 \begin{matrix} -3aa \\ -bb \end{matrix} x \begin{matrix} -2a^3 \\ +2abb \end{matrix} = 0$$

in qua est $-q = -3aa - bb$; & $r = -2a^3 + 2abb$. Sed $3aa + bb$ major est quam $3aa$; & $(3aa + bb)^3$ major quam $(3aa)^3 = 27a^6$; ergo $\frac{(3aa+bb)^3}{27} = \frac{q^3}{27}$ major quam a^6.

Iterum $2a^3$ major est quam $2a^3 - 2abb$; & $(2a^3)^2 = 4a^6$ major quam $(2a^3 - 2abb)^2 = r^2$; ergo a^6 major quam $\frac{rr}{4}$: erat $\frac{q^3}{27}$ major quam a^6, ergo fortius $\frac{q^3}{27}$ major quam $\frac{rr}{4}$; & æquatio constans ex meris rationalibus est irreductibilis.

Exemplo sit æquatio

$$x^3 - 79x - 210 = 0$$

in qua $q = 79$; $q^3 = 493039$; $\frac{r}{2} = 105$; $\frac{rr}{4} = 11025$; $\frac{rr}{4} \cdot 27 = 297675$, & minor quam q^3. Hujus autem radices sunt $x + 7 = 0$; $x + 3 = 0$; $x - 10 = 0$.

Si sumtæ fuissent æquationes simplices

$$x - a + b = 0$$
$$x - a - b = 0$$
$$x + 2a = 0$$

æquatio hinc oriunda, foret

$$x^3 \begin{matrix} -3aa \\ -bb \end{matrix} x \begin{matrix} +2a^3 \\ -2abb \end{matrix} = 0$$

in qua facile ostenditur, ut supra, $\frac{q^3}{27}$ major quam $\frac{rr}{4}$.

Hujusmodi est æquatio

$$x^3 - 37x + 84 = 0$$

cujus radices sunt $x + 7 = 0$; $x - 3 = 0$; $x - 4 = 0$, & in qua $q = 37$; $q^3 = 50653$; $r = 84$, $\frac{r}{2} = 42$; $\frac{rr}{4} = 1764$; $\frac{rr}{4} \cdot 27 = 47628$.

96. Esse potest b major quam a; tunc enim coefficiens tertii termini $-3aa-bb$, semper manet negativus. Ultimus quidem terminus signum mutat; quandoquidem si b major quam a, erit bb major quam aa, & $2abb$ major quam $2a^3$. Ideo in prima æquatione ultimus terminus $-2a^3+2abb$ fiet positivus; & in altera ultimus terminus $2a^3-2abb$ fiet negativus. Sed hæc signi mutatio nihil ad rem facit.

97. Potest esse b quantitas surda $=\sqrt{cd}$; nam tunc $+\sqrt{cd}$ in $-\sqrt{cd}$, dat $-cd$; & æquatio fiet

$$x^3 \begin{matrix}-3aa\\-cd\end{matrix}\, x \begin{matrix}-2a^3\\+2acd\end{matrix} = 0$$

aut

$$x^3 \begin{matrix}-3aa\\-cd\end{matrix}\, x \begin{matrix}+2a^3\\-2acd\end{matrix} = 0$$

Hujusmodi sunt æquationes

$$x^3-77x-230=0$$

cujus radices sunt $x+5-\sqrt{2}=0$; $x+5+\sqrt{2}=0$; $x-10=0$;

&

$$x^3-17x+4=0$$

cujus radices sunt $x+2-\sqrt{5}=0$; $x+2+\sqrt{5}=0$; $x-4=0$.

98. Sed si ponatur $b=\sqrt{-cd}$, quæ est quantitas imaginaria; tunc $+b$ in $-b$; idest $+\sqrt{-cd}$ in $-\sqrt{-cd}$, dat $+cd$; quapropter æquatio fiet, vel

$$x^3 \begin{matrix}-3aa\\+cd\end{matrix}\, x \begin{matrix}-2a^3\\-2acd\end{matrix} = 0$$

vel

$$x^3 \begin{matrix}-3aa\\+cd\end{matrix}\, x \begin{matrix}+2a^3\\+2acd\end{matrix} = 0$$

sumendo $x+a+\sqrt{-cd}=0$; $x+a-\sqrt{-cd}=0$; & $x-2a=0$; vel $x-a+\sqrt{-cd}=0$; $x-a-\sqrt{-cd}$; & $x+2a=0$.

Jam, si $-3aa+cd$ est quantitas positiva, statim æquatio non est irreductibilis. Si vero eadem quantitas negativa est, ejus opposita $3aa-cd$, est positiva. Sed $3aa-cd$ minor est quam $3aa$, & $(3aa-cd)^3=q^3$ minor quam $(3aa)^3=27a^6$, aut $\frac{q^3}{27}$ minor quam a^6; & a^6 minor quam

(a^3

$(a^3 + 2acd)^2$, id est quam $\frac{rr}{4}$. Igitur nullo pacto confici potest æquatio cubica irreductibilis ex duabus radicibus imaginariis & tertia commensurabili.

Sed nulla æquatio trium dimensionum confici potest ex tribus radicibus quadraticis (N°. 44. pag. 19, & N°. 47. pag. 21. hujus,) atque ideo neque ex tribus imaginariis (N°. 47. eadem pag. 21.) Superest igitur ut æquatio irreductibilis habeat tres radices reales; quod esse posse jam ostendimus.

99. Unde ergo radices impossibiles æquationis, quæ omnes radices reales habet? Rationem reddiderunt Viri duo Clarissimi; KOENIGIUS, mihi, dum viveret, amicissimus, in Commentariis Regiæ scientiarum & humaniorum litterarum Academiæ Berolinensis, pro anno 1749. pag. 180. & sequentibus; & ALEMBERTUS, quem nomen laudat, in Diction. Encyclop. littera C. verbo *Cas irreductible*.

Sic fere ratiocinatur Cl. KOENIGIUS. Quoniam hic deest secundus terminus, summa duarum radicum tertiæ æqualis est & opposita; aut ergo minima & media positivæ sunt, & maxima negativa; aut maxima & minima sunt positivæ, & media negativa; tunc r est quantitas positiva; aut minima & media negativæ sunt, & maxima positiva; aut maxima & minima negativæ sunt & media positiva; tunc r est quantitas negativa.

Æquatio limitum propositæ dat $x = \pm\sqrt{\frac{q}{3}}$. Si nunc ponatur $x = 0$, manebit $\pm r$. Si $x = \pm\sqrt{\frac{q}{3}}$, manebit in primo casu

$$\frac{-2q}{3}\sqrt{\frac{q}{3}} + r, \text{ \& in secundo } \frac{+2q}{3}\sqrt{\frac{q}{3}} - r.$$

Sed quia ponitur

$$\frac{r^2}{4} \text{ minor quam } \frac{q^3}{27}, \text{ est } \frac{r}{2} \text{ minor quam } \frac{q}{3}, \text{ \& } r \text{ minor quam } \frac{2q}{3}$$

Ergo semper valor mutatus est, quapropter est $\sqrt{\frac{q}{3}}$ major quam minima æquationis radix. (N°. 86. pag. 108. hujus).

Si ponatur $x = \pm\sqrt{q}$, manebit $\pm r$, & est $\pm\sqrt{q}$ major quam media æquationis radix.

Si ponatur $x = \pm 2\sqrt{\frac{q}{3}}$, manebit iterum

$\frac{-2q}{3}\sqrt{\frac{q}{3}} + r$ in primo casu, & $\frac{+2q}{3}\sqrt{\frac{q}{3}} - r$ in altero, & erit $\pm 2\sqrt{\frac{q}{3}}$ major quam maxima radix æquationis.

 Sed

Sed in hac hypothesi radix æquationis solvendæ, est

$$a+b = a+\frac{q}{3a} = y;$$

debet ergo y esse minor quam $2\sqrt{\frac{q}{3}}$, ac $\frac{y^2}{4}$ minor quam $\frac{q}{3}$. Sed, quia ponitur

$$a+\frac{q}{3a} = y, \text{ est } a^2+\frac{q}{3} = ay; \text{ \& } a = \frac{y}{2} \pm \sqrt{(\frac{y^2}{4}-\frac{q}{3})}.$$

Est ergo imaginarius valor ipsius a; & quidem quia posuimus $a+\frac{q}{3a}$ exponere propositæ radicem. Ergo hæc hypothesis falsa est; neque mirum si ex falsa hypothesi deducatur falsa conclusio, quod nempe radices imaginarias habeat proposita, quæ omnes habet reales.

Si vero proposita haberet duas radices æquales, ea fieret

$$x^3-3a^2x \pm 2a^3 = 0$$

& statim $q = 3a^2$, ac $a = \sqrt{\frac{q}{3}}$; & $a+b = a+\frac{q}{3a} = 2a$

quæ esset maxima radix; & hypothesis vera duceret ad veram conclusionem; tunc enim

$$\frac{r^2}{4} = a^6 = \frac{q^3}{27}$$

ac evanesceret quantitas imaginaria.

100. Ita difficultatem solvit vir acutissimus, ex eo quod ponat regula $a+\frac{q}{3a}$ indicare posse quancumque quantitatem, quod non semper potest. Celeberrimus ALEMBERTUS, loco citato, planiorem init viam, & observat fingi quidem posse

$x = a+b$; hinc vere $x^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; & $qx = qa+qb$;

atque ideo

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+qa+qb+r = 0 = a^3+b^3+3abx+qx+r.$$

Sed hinc nullo pacto confici posse quod

$$3abx+qx = 0.$$

Hanc

Hanc esse novam hypothesim ad arbitrium introductam; quæ quidem non pugnat cum natura ipsarum a & b; (nam hæ quantitates sunt indeterminatæ, & ita possunt assumi, ut earum factum æquet datam quantitatem;) sed quæ efficit ut illæ duæ quantitates sint, non reales, quales esse deberent, sed imaginariæ.

101. Culpant nonnulli hoc loco NEWTONUM, quasi malam hujus rei rationem reddiderit: ego vero puto eum defendi posse. Nam regula quæ necessario præbet aliquid diversum ab eo quod est, necessario ducit ad absurdum; quoniam ex rei natura est unum, & ex regula est aliud; vel aliquid simul est & non est id quod est. Sed tota CARDANI regula consistit in extractione radicis cubicæ; & omnis quantitas habet tres radices cubicas, unam realem duas imaginarias: æquatio autem solvenda tres habet radices reales: igitur habet tres reales per rei naturam, & simul unam realem, & duas imaginarias per regulam; id est simul est & non est æquatio habens tres radices reales. Ergo recte noster, pag. 159. hujus, *omnes tres lege præfata exprimere impossibile est.*

102. Idem eadem de caussa accidit in æquationibus biquadraticis, ubi hæ habent quatuor radices reales, & solvuntur via, quam describit noster N°. XVII. pag. 160..162. hujus. Tunc enim res recidit in extractionem quartæ radicis. Reponantur enim pro

$$e \text{ \& } f \text{ valores } \sqrt{y} \text{ \& } \frac{q+y-\frac{r}{\sqrt{y}}}{2} \text{ in } x = -\frac{e}{2} \pm \sqrt{(\frac{e}{4}-f)}$$

fiet

$$x = -\frac{1}{2}\sqrt{y} \pm \sqrt{(-\frac{y}{4}-\frac{q}{2}+\frac{r}{2\sqrt{y}})}$$

ubi quarta radix extrahenda est e termino $\frac{r}{2\sqrt{y}}$, cujus radix quadratica debet extrahi; quandoquidem est

$$\sqrt{\frac{r}{2\sqrt{y}}} = \sqrt{\frac{r}{\sqrt{4y}}} = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt[4]{4y}}$$

& omnis quarta potestas duas habet radices reales ac duas imaginarias.

103. Quod autem triplex inveniatur radix cubica, quadruplex biquadratica, &c., ostensum est de unitate sub N°. 86. pag. 81 hujus; atque ideo de omni quantitate, quæ semper multiplicatur per unitatem, & quantitatis radix per radicem unitatis. Ubi & hoc observandum, quod in genere est

$$x^{2n} - 1 = (x-1)(x^{2n-1} + x^{2n-2} + x^{2n-3} + \&c.)$$

$$= (x+1)(x^{2n-1} - x^{2n-2} + x^{2n-3} - x^{2n-4} + \&c.)$$

atque ideo semper potestas par unitatis habet duas radices reales $+1$ & -1. Reliquas omnes esse imaginarias facile patebit per regulam quæ extat in Additamento pag. 168 ad calcem hujus. Nam, per eam, numerici coefficientes binomii evecti ad potestatem $2n - 1$, unitate minuti, dividi debent singuli per eundem coefficientem, non unitate minutum, & duplicatum Hinc orientur fractiones propriæ, quæ singulæ supra medios æquationis terminos ponendæ sunt, & quadratum cujusque termini per suam fractionem est multiplicandum; deinde rectangula conficienda e terminis utrinque adjacentibus & hæc positiva & negativa sunt alterne sumenda.

Jam termini omnes æquationis denominati a numero pari, velut secundus, quartus, sextus, &c., habent hinc inde imparem terminorum numerum; omnia illa rectangula sunt æqualia, quia omnes æquationis termini coefficientem habent unitatem; manebit ergo unitas, qua minor est quævis fractio. Quare omnes termini denominati a numero pari, habebunt subscriptum signum —.

Sed omnes termini denominati a numero impari, velut tertius, quintus, septimus, &c; habent hinc inde parem terminorum numerum, qui bini dant parem rectangulorum numerum; hæc ergo se destruent, & manebit nihil, quo major est fractio quævis. Quare omnes termini denominati a numero impari subscriptum habebunt signum +.

Idem signum + ponendum est sub primo termino & sub ultimo: ultimus denominatur a numero pari, quoniam æquatio est ordinis imparis; igitur duo termini, ultimus & penultimus, habebunt duo signa similia; bini reliqui continui signa contraria, atque æquatio radices omnes impossibiles, præter unam.

104. Auctorem vero ea sensisse, quæ puto, & recte quidem cogitasse, sed non satis aperte sententiam dixisse, patebit consideranti N^um XVIII. pag. 162. hujus. Recte eum cogitasse dico, nempe si me mens non fallit, quod non videtur, cum superius ratiocinium (N°. 101 pag. 219. hujus,) ita breve sit & planum, ut non videam ubi latere possit error. Non in propositione, quæ certa est, & omnibus Logices ac Metaphysices principiis consentanea.

Non in assumtione, omnis radix cubica triplex est, quæ demonstrata est, & quam agnoscunt omnes Algebristæ. Videatur Additam. pag. 15. & 20. ad hujus libri calcem.

105. Quod autem addit vir acutissimus in fine pag. 21. Additam. ad hujus calcem, quod hæ tres radices debite *connexæ, & more vulgari in se invicem continuo ductæ, æquationem*

$$z^3 = 3qz + 2r$$

re-

restituunt, ex opinione dictum videtur, neque res verbis respondet. Sumantur enim binomia tria

$$z - 1 = 0;\ z + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3} = 0;\ z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3} = 0$$

Ex horum multiplicatione continua statim conficietur z^3; secundus terminus evanescet, quoniam summa radicum est nihilo aequalis. Sed & tertius terminus evanescet, quia pariter nihilo aequalis est summa factorum ex binis

$$-1(+\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}) - 1(+\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3})(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}) =$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{-3} - \frac{1}{4}\sqrt{-3} - \frac{1}{4}.-3 =$$

$$-1 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = -1 + 1.$$

Hinc ergo conficietur aequatio non affecta, & nunquam restituetur proposita, ne quidem si sumantur binomia quaevis; nam quantitas, ex. gr. $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$, quae sumitur, multiplicanda est per tres illas unitatis radices cubicas, ut conficiantur, ex hac regula, radices tres aequationis cubicae affectae.

106. Quapropter formula CARDANI non dat veras radices aequationis cubicae, eas nempe, quae inter se multiplicatae restituant aequationem propositam; ne quidem quando proposita habet unam radicem realem & duas imaginarias. Quid ergo? Viam aperit, satis quidem difficilem, ad excudendas veras radices. Nam si sit

$$\sqrt[3]{(r+\sqrt{(r^2-q^3)})} = m+\sqrt{n};\ \&\ \sqrt[3]{(r-\sqrt{(r^2-q^3)})} = m-\sqrt{r}$$

id est si radix cubica possit extrahi e quantitate, quam praebet haec formula, tunc habebuntur verae radices; nam binomia

$$z - 2m = 0;\ z + m - \sqrt{-3n} = 0;\ \&\ z + m + \sqrt{-3n} = 0$$

dabunt

$$z^3 + 3z(n - m^2) - 2m(3n + m^2) = 0$$

& binomia

$$z + 2m = 0;\ z - m - \sqrt{-3n} = 0;\ \text{ac}\ z - m + \sqrt{-3n} = 0$$

dabunt

$$z^3 + 3z(n - m^2) + 2m(3n + m^2) = 0$$

107. Sed hæ æquationes necessario habebunt unam radicem commensurabilem, consentientibus, ut videtur, COLSONO in additamento ad hujus calcem pag. 21., *Colin* MAC-LAURIN in Algebra sua anglice scripta, Parte II. Cap. 8. N°. 79; & Algebræ scriptoribus, quos viderim, omnibus.

108. Tunc autem radix commensurabilis invenitur per Newtoniam Divisorum methodum. Quod si hoc pacto nequeat inveniri radix commensurabilis, cum tamen constet in cubicis æquationibus saltem unam esse realem, fatendum puto *esse æquationes ita comparatas, ut habeant quidem radices reales; hæ geometrice possint determinari; sed nullo pacto exprimi algebraice vel numerice per datos æquationis coefficientes:* tunc radices esse quærendas per *approximationem*; id est investigandam esse æquationem quæ quam minime fieri potest a proposita differat, & cujus radices possint arithmetice vel algebraice exponi.

109. Ceterum Newtoniana divisores inveniendi methodus facile adhibetur in æquationibus cubicis, nam plerumque sufficit pro incognita substituere numeros 1; 0; — 1. Quin & non raro eæ resolvuntur tentando divisionem per incognitam & aliquem e divisoribus ultimi termini. Sæpe minimum ejusque potestates ponendo in æquatione proposita pro incognita ejusque potestatibus, æquationis terminos se comperi destruentes, atque ideo radicem æquationis extudi. Sed redeamus ad inventas radicis expressiones.

110. E duabus CARDANI formulis prima hoc habet commodi, quod secunda pars radicis invenitur dividendo q per primam radicis partem. Eadem secunda pars invenienda est per extractionem radicis cubicæ in secunda expressione. Est autem divisio facilior quam extractio radicis cubicæ.

Altera vero semper præfert $\sqrt{\left(\frac{rr}{4} \pm \frac{q^3}{27}\right)}$ diversis signis affectam. Quapropter si radices cubicæ constent ex rationali & ex irrationali parte, partes irrationales se mutuo destruent.

111. Utraque nullius est usus in problematis geometricis, quæ geometrice construuntur, ut infra docebit Auctor. In problematis mere algebraicis nulla est methodus inveniendæ radicis cubicæ pro binomio algebraico constante ex duabus partibus, altera rationali, altera irrationali, nisi ponatur aut resolutio æquationis cubicæ, quod esset quærere idem per idem, aut inventio divisoris unius dimensionis pro æquatione cubica, quod ego faciendum contendo.

Sit enim hujusmodi binomium $A \pm \sqrt{B}$, & sit A pars rationalis; $\sqrt{B}$ pars irrationalis. Ponatur hujus binomii radix cubica $m \pm \sqrt{n}$. Erit

$$(m \pm \sqrt{n})^3 = m^3 \pm 3m^2\sqrt{n} + 3mn \pm n\sqrt{n}$$

Quantitas irrationalis erit

$$\pm 3m^2\sqrt{n} \pm n\sqrt{n} = \sqrt{n}\,(\pm 3m^2 \pm n) = \sqrt{B}$$

mane-

manebit

$$m(m^2 + 3n^2) = A.$$

Hinc exterminari deberet alterutra incognitarum m; $\sqrt{n}$; quod fieri posset methodo tradita Tom. I. Cap. VII. pag. 106. Sed facilius sic.

Est ex hypothesi $A + \sqrt{B} = (m + \sqrt{n})^3$; & $A - \sqrt{B} = (m - \sqrt{n})^3$ quare $(A + \sqrt{B})(A - \sqrt{B}) = AA - B = (m + \sqrt{n})^3 (m - \sqrt{n})^3 = (mm - n)^3$. Ergo $\sqrt[3]{(AA - B)} = mm - n$, aut $n = mm - \sqrt[3]{(AA - B)}$. Ergo, substituendo, $m(m^2 + 3n) = 4m^3 - 3m\sqrt[3]{(AA - B)} = A$.

Aut igitur resolvenda est hæc æquatio cubica per regulas hic explicatas; aut per divisorum inventionem; qua quin utimur statim in æquatione proposita?

Diu postquam hæc scripseram, incidi in Algebram SAUNDERSONI, in cujus fine legitur epistola Celeberrimi MOIVRÆI, qui hoc idem observat, extractionem nempe radicis cubicæ ex binomio æque difficilem esse ac solutionem æquationis trium dimensionum; & pro imaginariis rem deducit ad anguli trisectionem; id est docet quomodo nota solutio unius æquationis cubicæ aptetur ad solutionem aliarum similium.

Postea in Transactionibus philosophicis Regiæ Societatis Londinensis, vol. 40. pro annis 1747; 1748. N°. 451. Artic. X. pag. 463. & sequentibus, ostendit quomodo quodvis binomium formæ $\sqrt[n]{(a + \sqrt{b})}$ fit per extractionem radicis ad simpliciores terminos reducendum, etiam quando $\sqrt{b}$ est imaginaria; atque hinc quomodo per multisectionem anguli solvi possint æquationes omnium generum, sed certæ formæ. Sic autem breviter ejus doctrina tradi potest, mutata demonstratione, ut adhiberi possint theoremata in hoc libro explicata.

112. Extrahenda sit radix n e binomio

$a + \sqrt{b}$. Fiat $(x + \sqrt{y})^n = a + \sqrt{b}$; eritque $x + \sqrt{y} = \sqrt[n]{(a + \sqrt{b})}$

determinandi sunt per a & b valores ipsarum x & y.

Jam, evehendo binomium $x + \sqrt{y}$ ad potestatem cujus exponens est n; termini primus, tertius, quintus, aliique denominati a numero impari, erunt rationales, (N°. 40. pag. 18. hujus;) nam in primo termino deest $\sqrt{y}$; in tertio, quinto, septimo &c; ea quantitas evecta est ad secundam, quartam, sextam, &c. potestatem.

Termini secundus, quartus, sextus, aliique denominati a numero pari, erunt irrationales (N°. 41. eadem pag. 18. hujus); continent enim ipsam $\sqrt{y}$; ejusque tertiam, quintam &c. potestatem.

113. Summa omnium terminorum, tum rationalium, tum irrationalium, æquat ipsum binomium $a + \sqrt{b}$. Quare summa terminorum rationalium æquat partem rationalem a, & summa terminorum irrationalium æquat partem irrationalem $\sqrt{b}$. (N°. 35. pag. 17. 18. hujus).

115.

114. Igitur si e summa terminorum rationalium quadrata, deducatur summa irrationalium, pariter quadrata, & e prioris valore aa valor posterioris b, fiet

$$(xx - y)^n = aa - b = (x + \sqrt{y})^n (x - \sqrt{y})^n$$

(N°. 226. pag. 88. primi tomi hujus.)

115. Sed ex ipsa summa rationalium terminorum subducendo ipsam summam terminorum irrationalium; & e prioris valore a subducendo $\sqrt{b}$, valorem posterioris, manet

$$(x - \sqrt{y})^n = a - \sqrt{b},$$

quod facile constat e formula binomiali. Dantur ergo

$$x + \sqrt{y} = \sqrt[n]{(a + \sqrt{b})};\ x - \sqrt{y} = \sqrt[n]{(a - \sqrt{b})};\ (x + \sqrt{y})(x - \sqrt{y}) = \sqrt[n]{(a^2 - b)};$$

& quærendus superest utriusque valor. Est

$$(x + \sqrt{y})^n = a + \sqrt{b};\ \&\ (x - \sqrt{y})^n = a - \sqrt{b}.\ \text{Ergo}$$

$$(x + \sqrt{y})^n + (x - \sqrt{y})^n = 2a = u + z$$

ponendo $u = (x + \sqrt{y})^n$, & $z = (x - \sqrt{y})^n$. Hinc

$$u = 2a - z;\ \text{ac}\ uz = (x + \sqrt{y})^n (x - \sqrt{y})^n = a^2 - b = 2az - zz$$

Quare

$$z^2 = 2az - a^2 + b;\ \&\ z = a \pm \sqrt{b};\ \text{ac}\ u = a \mp \sqrt{b}$$

Sed

$$u = (x + \sqrt{y})^n = a + \sqrt{b};\ \&\ z = (x - \sqrt{y})^n = a - \sqrt{b}$$

Igitur

$$x + \sqrt{y} = \sqrt[n]{(a + \sqrt{b})};\ x - \sqrt{y} = \sqrt[n]{(a - \sqrt{b})}\ \&\ 2x = \sqrt[n]{(a + \sqrt{b})} + \sqrt[n]{(a - \sqrt{b})}$$

116. Statim ergo, proposito binomio reducendo, pars rationalis dici debet a; irrationalis autem $\sqrt{b}$; tum quia

$$\sqrt[n]{(aa - b)} = (x + \sqrt{y})(x - \sqrt{y}) = xx - y$$

quæ

quæ quantitas est rationalis, videndum an ipsius $aa - b$ radix n possit extrahi. Si nequit, binomium reduci non potest. Si reperitur $\sqrt[n]{(aa - b)}$, ea dicatur $= m$; eritque

$$m = xx - y; \text{ ac } y = xx - m.$$

Superest igitur determinanda quantitas x, quod sic fiet.

117. Tentandum an summa binomiorum

$$\sqrt[n]{(a + \sqrt{b})} + \sqrt[n]{(a - \sqrt{b})}$$

conficiat numerum integrum quam proxime; sumendus numerus integer invento quam proximus, & hujus dimidiata pars ponenda pro x. Ex hujus quadrato subducendus numerus m jam inventus, & residuus ponendus pro y. Quo facto dispiciendum an binomium sic inventum per elevationem ad datam potestatem restituat propositum.

Ex. gr. reducendum proponatur binomium

$$\sqrt{(54 + \sqrt{980})}. \text{ Est } n = 2; \; a = 54; \; b = 980; \; \sqrt{(aa - b)} = \sqrt{(2916 - 980)} = \sqrt{1936} = 44 = m$$

Unde spes est binomium resolvi posse. Nunc

$$\sqrt{b} = \sqrt{980} = 31,3049, \text{ proxime}; \; a + \sqrt{b} = 81,3049; \; a - \sqrt{b} = 22,6951.$$

Et

$$\sqrt{(a + \sqrt{b})} = 9,236 \text{ fere}; \; \sqrt{(a - \sqrt{b})} = 4,763; \; \sqrt{(a + \sqrt{b})} + \sqrt{(a - \sqrt{b})} = 13,999 = 14$$

fere. Unde

$$x = 7; \; xx - m = 49 - 44 = 5 = y; \; \& \; \sqrt{(54 + \sqrt{980})} = 7 + \sqrt{5} = \sqrt{(49 + 14\sqrt{5} + 5)}$$

Pariter, reducendum sit binomium

$$\sqrt[3]{(15 + \sqrt{217})}. \text{ Est } n = 3; \; a = 15; \; b = 217; \; \sqrt[3]{(aa - b)} = \sqrt[3]{(225 - 217)} = \sqrt[3]{8}$$

$$= 2 = m; \; \sqrt{b} = 14,599 \text{ fere}; \; \sqrt[3]{(a + \sqrt{b})} = 3,1; \; \sqrt[3]{(a - \sqrt{b})} = 0,07;$$

summa $3,17$; vel 3; quare $x = \frac{3}{2}$; $x^2 - m = \frac{9}{4} - 2 = \frac{9-8}{4} = \frac{1}{4} = y$

& $x+\sqrt{y} = \frac{3+1}{2}$; non igitur reduci potest binomium propositum.

Tertio reducendum sit binomium

$$\sqrt[3]{(45+\sqrt{1682})};\ \text{est}\ n=3;\ a=45;\ b=1682;\ \sqrt[3]{(aa-b)}=\sqrt[3]{(2025-1682)} = \sqrt[3]{343} = 7 = m$$

Sed

$$\sqrt{b} = 41,01219\ \text{fere};\ \sqrt[3]{(a+\sqrt{b})} = \sqrt[3]{86,01219} = 4,4142;\ \sqrt[3]{(a-\sqrt{b})} = \sqrt[3]{3,89781} = 1,5857;\ \sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}+\sqrt[3]{(a-b)} = 5,9999 = 6\ \text{fere};\ x=3;\ xx-m = 9-7 = 2 = y$$

&

$$\sqrt[3]{(45+\sqrt{1682})} = 3+\sqrt{2} = \sqrt[3]{(27+3.9.\sqrt{2}+3.3.2+2\sqrt{2})}$$

Tandem reducendum sit binomium

$$\sqrt[5]{(41-29\sqrt{2})};\ \text{est}\ n=5;\ a=41;\ \sqrt{b} = 29\sqrt{2} = 41,01219$$

fere; hinc

$$a+\sqrt{b} = 82,01219;\ \&\ a-\sqrt{b} = -0,01219.$$

Est autem

$\sqrt[5]{82,01219}$ major quam 2, quia $2^5 = 32$; & minor quam 3, quia $3^5 = 243$. Sed $\sqrt[5]{-0,01219}$ est paulo major quam 0; 2. Ergo

$$\sqrt[5]{(a+\sqrt{b})}+\sqrt[5]{(a-\sqrt{b})} = 2\ \text{quam proxime},\ \&\ x = 1$$

Jam

$$\sqrt[5]{(aa-b)} = \sqrt[5]{(1681-1682)} = -1 = m;\ xx-m = 2 = y$$

Ergo

$$\sqrt[5]{(41-29\sqrt{2})} = 1-\sqrt{2} = \sqrt[5]{(1-5\sqrt{2}+10.2-10.2\sqrt{2}+5.4-4\sqrt{2})}.$$

118. Hæc regula facile transfertur ad imaginarias, ponendo;

aa

$aa + b$ pro $aa - b$, ob $(a + \sqrt{-b})(a - \sqrt{-b}) = aa + b$.

Sed quia quæri debet in numeris proximis

$$\sqrt[n]{(a + \sqrt{-b})} + \sqrt[n]{(a - \sqrt{-b})}$$

& radix imaginaria nequit haberi, confugiendum est ad tabulas sinuum & ad multisectionem angulorum; hoc pacto.

119. Sit $x = \sqrt[n]{(a + \sqrt{b})} + \sqrt[n]{(a + \sqrt{b})} = u + z$

ubi $\sqrt{b}$ repræsentare potest imaginariam, &

$$\sqrt[n]{(a + \sqrt{b})} = u;\ \sqrt[n]{(a - \sqrt{b})} = z;\ \sqrt[n]{(aa \pm b)} = uz = m$$

eritque

$$a^n = (u + z)^n$$

Ubi statim primus terminus erit

$$u^n = a + \sqrt{b};\ \text{\& ultimus } z^n = a - \sqrt{b};\ \text{ac } u^n + z^n = 2a.$$

120. Ceterorum omnium coefficientes complectentur n; & termini factum zu, ut constat e formula binomiali. Sic igitur exprimi poterunt

$$nzu(z^{n-2} + \frac{n-1}{2} z^{n-3} u + \frac{n-1 \cdot n-2}{2 \cdot 3} z^{n-4} u^2 + \frac{n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{2 \cdot 3 \cdot 4} z^{n-5} u^3 \ldots + u^{n-2})$$

ubi pro nzu poni potest nm.

121. In altero Factore

$$z^{n-2} + \frac{n-1}{2} z^{n-3} u + \frac{n-1 \cdot n-2}{2 \cdot 3} z^{n-4} u^2 + \frac{n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{2 \cdot 3 \cdot 4} z^{n-5} u^3 \ldots + \frac{n-1}{2} z u^{n-3} + u^{n-2}$$

si ponatur in genere $n - r$ exponens ipsius z; erit in genere ejusdem termini coefficiens

$$\frac{n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot n-4 \cdot n-5 \ldots n-(r-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots r-2 \cdot r-1}$$

 Sed

Sed coefficiens termini reſpondentis in $(z+u)^{n-2}$, eſt

$$\frac{n-2.n-3.n-4.n-5.n-6 \ldots n-(r-2).n-(r-1)}{1.2.3.4.5 \ldots r-3.r-2}$$

122. Dico nunc ſecundum coefficientem eſſe primo majorem numero

$$\frac{(n-2.n-3.n-4.n-5 \ldots n-r+2)(n-r)}{1.2.3.4 \ldots r-3.r-1}$$

in cujus denominatore ſemper deerit $r-2$ & in numeratore $n-r+1$. Nam utriusque denominator habet omnes Factores communes præter $r-1$, qui eſt in primi denominatore, & abeſt a ſecundo. Quare ſecundus numerator revocatus ad primi denominationem, fiet

$$(n-2.n-3.n-4.n-5.n-6 \ldots n-(r-2).n-(r-1))(r-1).$$

Jam numeratores in eo differunt quod primus habet Factorem $n-1$, quo caret ſecundus, qui viciſſim habet Factorem $(n-(r-1))(r-1)$ quo caret primus. Eſt

$$(n-(r-1))(r-1) = (n-r+1)(r-1) = nr-rr+2r-n-1$$

Quapropter exceſſus ſecundi ſupra primum erit

$$\frac{(n-2.n-3.n-4.n-5 \ldots n-(r-2))(nr-rr+2r-n-1-n+1)}{1.2.3.4 \ldots r-3.r-2.r-1}$$

Sed

$$\frac{nr-rr+2r-n-1-n+1}{r-2} = \frac{nr-2n-rr+2r}{r-2} = n-r.$$ Ergo &c.

123. In $z^{n-3}u$, ſecundo termino Factoris deſcripti N°. 121. hujus, $r=3$; ejus termini coefficiens $\frac{n-1}{2}$; & coefficiens ſecundi termini in $(z+u)^{n-2}$, eſt $n-2$; atque horum differentia eſt $\frac{n-3}{2}$.

In $z^{n-4}u^2$, tertio ejus termino, eſt $r=4$; ejus coefficiens $\frac{n-1.n-2}{2.3}$; coefficiens tertii termini in $(z+u)^{n-2}$ eſt $\frac{n-2.n-3}{3}$; horum differentia $\frac{n-2.n-4}{3}$.

In

In $z^{n-5}u^3$, quarto ejus termino, est $r = 5$ & coefficiens est $\frac{n-1.n-2.n-3}{2.3.4}$; coefficiens quarti termini in $(z+u)^{n-2}$ est $\frac{n-2.n-3.n-4}{3.4}$; differentia $\frac{n-2.n-3.n-5}{2.4}$.

In $z^{n-6}u^4$ est coefficiens $\frac{n-1.n-2.n-3.n-4}{2.3.4.5}$; coefficiens quinti termini in $(z+u)^{n-2}$, est $\frac{n-2.n-3.n-4.n-5}{2.3.4}$; differentia $\frac{n-2.n-3.n-4.n-6}{2.3.5}$. Et sic de reliquis.

124. Cum autem sit $(z+u)^{n-2} = x^{n-2}$; habebitur ex N^is 120. & sequentibus

$$x^n = 2a + nmx^{n-2} - nm(\frac{n-3}{2}z^{n-3}u + \frac{n-2.n-4}{3}z^{n-4}u^2 + \ldots \frac{n-3}{2}z^{n-3}u)$$

cujus pars negativa, dividendo Factorem compositum per zu, pro zu ponendo m, & m addendo Factori incomplexo, fiet

$$-nm^2(\frac{n-3}{2}z^{n-4} + \frac{n-2.n-4}{3}z^{n-5}u + \frac{n-2.n-3.n-5}{2.4}z^{n-6}u^2 + \ldots \frac{n-3}{2}u^{n-4})$$

vel

$$-\frac{n.n-3}{2}m^2(z^{n-4} + \frac{2.n-2.n-4}{3.n-3}z^{n-5}u + \frac{n-2.n-5}{4}z^{n-6}u^2 + \frac{n-2.n-4.n-6}{3.5}z^{n-7}u^3 + \ldots u^{n-4}).$$

Est autem

$$z^{n-4} + \frac{2.n-2.n-4}{3.n-3}z^{n-5}u + \frac{n-2.n-5}{4}z^{n-6}u^2 + \frac{n-2.n-4.n-6}{3.5}$$
$$z^{n-7}u^3 + \&c) = z^{n-4} + n-4\,z^{n-5}u + \frac{n-4.n-5}{2}z^{n-6}u^2 + \frac{n-4.n-5.n-6}{2.3}$$
$$z^{n-7}u^3 + \&c) - \frac{n-4.n-5}{3.n-3}z^{n-5}u - \frac{n-5.n-6}{4}z^{n-5}u^2 - \frac{n-4.n-6.n-7}{2.5}$$
$$z^{n-7}u^3 - \frac{n-4.n-5.n-7.n-8}{2.3.6}z^{n-8}u^4 - \&c.$$

Atque hujus pars positiva est $(z+u)^{n-4} = x^{n-4}$. Fit ergo

$$x^n = 2a + nmx^{n-2} - \frac{n.n-3}{2} m^2 x^{n-4} + \frac{n.n-3}{2} m^2 \Big(\frac{n-4.n-5}{3.n-3} z^{n-5}u + \frac{n-5.n-6}{4} z^{n-6}u^2 + \frac{n-4.n-6.n-7}{2.5} z^{n-7}u^3 + \frac{n-4.n-5.n-7.n-8}{2.3.5} z^{n-8}u^4 + \ldots \frac{n-5.n-6}{4} z^2 u^{n-6} + \frac{n-4.n-5}{3.n-3} zu^{n-7}\Big)$$

Factor compositus dividatur per $\frac{n-4.n-5}{3} zu$, & divisor hic addatur Factori simplici, scribendo m pro zu, habebitur

$$+ \frac{n.n-4.n-5}{2.3} m^3 \Big(z^{n-6} + \frac{3.n-3.n-6}{4.n-4} z^{n-7}u + \frac{3.n-3.n-6.n-7}{2.5.n-5} z^{n-8}u^2 + \frac{n-3.n-7.n-8}{4.6} z^{n-9}u^3 + \ldots \frac{3.n-3.n-6}{4\,n-4} zu^{n-7} + u^{n-6}\Big).$$

Atque hic Factor compositus discerpetur in

$$(z+u)^{n-6} - \Big(\frac{n-6.n-7}{4.n-4} z^{n-7}u + \frac{n-6.n-7.n-8}{5.n-5} z^{n-8}u^2 + \frac{n-7.n-8.n-9}{2\,6} z^{n-9}u^3 + \ldots \frac{n-6.n-7.n-8}{5.n-5} z^2u^{n-8} + \frac{n-6\,n-7}{4.n-4} zu^{n-7}\Big)$$

&, ponendo x^{n-6} pro $(z+u)^{n-6}$, fiet

$$x^n = 2a + nmx^{n-2} - \frac{n.n-3}{3} m^2 x^{n-4} + \frac{n\,n-4.n-5}{2.3} m^3 x^{n-6} - m^3 \Big(\frac{n.n-5.n-6.n-7}{2.3.4} z^{n-7}u + \frac{n.n-4\,n-6.n-7.n-8}{2.2.3.5} z^{n-8}u^2 + \frac{n\,n-4.n-5.n-7.n-8.n-9}{2.2.3.6} z^{n-9}u^3 + \ldots \frac{n.n-4\,n-6.n-7.n-8}{2.2.3.5} z^2u^{n-8} + \frac{n.n-5.n-6.n-7}{2.3.4.} zu^{n-7}\Big).$$

Atque

Atque hoc factum negativum dividendo per $\frac{n.\overline{n-5}.\overline{n-6}.\overline{n-7}}{2.3.4} uz$ (vel m), & per hunc multiplicando Factorem simplicem m^1; quotientem discerpendo in duas partes quarum una sit $(z+u)^{n-8} = x^8$, & altera excessus illius quotientis supra hunc potestatem, & sic pergendo, ac tandem transponendo, invenietur

$$x^n - nmx^{n-2} + \frac{n.\overline{n-3}}{2} m^2 x^{n-4} - \frac{n.\overline{n-4}.\overline{n-5}}{2.3} m^3 x^{n-6} +$$

$$\frac{n.\overline{n-5}.\overline{n-6}.\overline{n-7}}{2.3.4} m^4 x^{n-8} - \frac{n.\overline{n-6}.\overline{n-7}.\overline{n-8}}{2.3.4.5} m^5 x^{n-10} + \&c. = 2a$$

Hinc nullo negotio eruuntur æquationes peculiares

$$x^2 - 2mx = 2a, \text{ si } n = 2; \quad x^3 - 3mx = 2a, \text{ si } n = 3;$$

$$x^4 - 4mx^2 + 2m^2 = 2a, \text{ si } n = 4; \quad x^5 - 5mx^3 + 5m^2x = 2a, \text{ si } n = 5. \ \&c.$$

quæ sunt æquationes ipsæ, quas invenit NEWTONUS pro anguli multisectione, problemate geometricorum XXIX; pag. 236. Tomi primi.

125. Comparando nostras cum Newtonianis, inveniemus

$$m = rr; \ \sqrt{m} = r \ \& \ q = \frac{2a}{r^{n-1}}$$

ubi n indicat numerus partium, in quas dividendus est arcus, cujus complementum ad duos rectos subtensam habet $= q$; & diametrum $= 2r = 2\sqrt{m}$; ita ut $n - 1$ sit 1 pro bisectione, 2, pro trisectione &c.

126. Et hæc quidem pro diametro & subtensis; sed cum habeamus tabulas pro sinubus & cosinubus, non pro subtensis, æquationes ad anguli multisectionem ita mutandæ sunt, ut fiat q cosinus anguli dividendi; hoc facile fiet in iis ponendo radium pro diametro, id est r pro $2r$; & $\frac{r}{2}$ pro r. Quo facto, post ablatas fractiones habebitur

$$2xx - rr = qr; \ 4x^3 - 3r^2x = qr^2; \ 8x^4 - 8r^2x^2 + r^4 = qr^3$$

$$16x^5 - 20r^2x^3 + 5r^4x = qr^4 \ \&c.$$

127. Ut analoga fiat mutatio in æquatione generali ad binomii surdi potestates, pro x & ejus potestatibus, poni debent $2x$ atque hujus potestates. Æquatio hinc oriunda dividi poterit per 2, & fiet

$$2^{n-1}.x^n - 2^{n-3}.nm.x^{n-2} + 2^{n-5}.\frac{n.\overline{n-3}}{2} m^2.x^{n-4} - \&c. = a$$

128.

128. Jam est q cosinus anguli multipli; sit p ejusdem sinus; quicunque sit ille angulus, est

$$r = \sqrt{(qq+pp)} = (\sqrt{(q+p\sqrt{-1})}\ (\sqrt{(q-p\sqrt{-1})}) = \sqrt{m}$$

Quapropter in hac hypothesi, erit

$$m = (\sqrt[n]{(a+\sqrt{b})}\ (\sqrt{(a-\sqrt{b})} = (\sqrt[n]{(q+p\sqrt{-1})}\ (\sqrt[n]{(q-p\sqrt{-1})})$$

vel designabit factum e Factoribus imaginariis. Unde facile transferentur ad reductionem binomiorum imaginariorum regula tradita N°. 116. pag. 224. & seq. hujus. Nempe

129. Proposito binomio imaginario $\sqrt[n]{(a+\sqrt{-b})}$, quære $\sqrt[n]{(aa+b)}$; hanc dic m; substitue in æquatione ordinis n valorem ejusque potestates pro m ejusque potestatibus. Hinc invenies æquationem determinatam, quam comparando cum respondente æquatione ad n. sectionem anguli, determinabis hujus cosinum q. Cosinus ex tabulis dabit arcum, cujus facile sumes n.. mam partem, atque hujus cosinus erit valor ipsius x.

Erat autem, in hypothesi binomii imaginarii, $y = m - xx$. Hinc invenies partem imaginariam.

Ex. gr. Extrahenda sit radix cubica e binomio

$81 + \sqrt{-2700}$. Est $a = 81$; $a^2 = 6561$; $b = 2700$; $aa+b = 9261 = 21^3$.

Ergo

$$m = 21;\ 4x^3 - 3mx = a = 4x^3 - 63x = 81 = 4x^3 - 3r^2x = qr^2$$

Igitur

$$r^2 = 21;\ r = \sqrt{21};\ qr^2 = q.21 = 81;\ \&\ q = \frac{81}{21} = \frac{27}{7}$$

Fac

$$21.\ \text{ad}\ \frac{27.27}{7.7}\ \text{sic}\ (100000)^2\ \text{ad}\ \frac{(100000)^2.27.27}{7.7.21} = \frac{(100000)^2.9.27}{7^3}$$

habebis quadratum cosinus tabularis, qui ideo erit

$$\frac{100000.9.\sqrt{3}}{7\sqrt{7}} = \frac{900000.17320}{7.26457.} = 84120$$

qui numerus fere est cosinus tabularis pro arcu $32°.45'$; hujus tertia pars est

est $10°.53'$, & hujus cosinus 98201, revocandus ad radium $\sqrt{21} = 4,5825$, fere. Sume 5; habebis

$$\frac{5 \cdot 98201}{100000} = 4,91005 = \frac{9}{2} \text{ proxime } = x; \text{ hinc } m = 21 - \frac{81}{4} =$$

$$\frac{84 - 81}{4} = \frac{3}{4} = y; \text{ ac } \sqrt{-y} = \frac{1}{2}\sqrt{-3};$$

& radix quaesita

$$\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}, \text{ una}; \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)\left(\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right), \text{altera};$$

$$\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)\left(\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right), \text{tertia}.$$

Extrahenda sit radix quarta e binomio

$$-7 + \sqrt{-576}; \text{ est } a = -7; a^2 = +49; b = 576; aa + b = 625 = 5^4.$$

Ergo

$$m = 5; 8x^4 - 8mx^2 + m^2 = a = 8x^4 - 40x^2 + 25 = -7 = 8x^4 - 8r^2x^2 + r^4 = r^3q.$$

Igitur

$r^2 = 5; r = \sqrt{5}; qr^3 = -7; q = -\frac{7}{5\sqrt{5}}$; atque est 5 ad $(100000)^2$ ut $\frac{49}{125}$ ad quadratum cosinus tabularis; qui cosinus erit $\frac{700000}{25} = 28000$. Hic autem numerus est cosinus pertinens ad arcum $73°.44'$. Hujus quarta pars est arcus $18°.26'$, cujus cosinus 94869. Jam $(100000)^2$ ad $(94869)^2$ ut 5 ad 4,5000635805 cujus radix quadrata est 2,1213 circiter; est ergo

$$x = 2; y = xx - m = 4 - 5 = -1; \text{ \& radix } 2 + \sqrt{-1}.$$

Ceterum, notum est cosinum negativum indicare arcum quadrante majorem; & contra.

130. Observavit NEWTONUS N°. II. pag. 2. hujus, candem aequationem, quae determinat quintam partem dati arcus, determinare etiam quintam partem quinque arcuum a dato diversorum; & a multis ostensum est, quod si arcus A sit in n partes dividendus, & sit C tota circumferentia, quaestionem solvent cosinus arcuum

$$\frac{A}{n}; \frac{C-A}{n}; \frac{C+A}{n}; \frac{2C-A}{n}; \frac{2C+A}{n}; \frac{3C-A}{n}; \frac{3C+A}{n}; \text{ \&c.}$$

 do-

donec eorum numerus ſit n. Si hi coſinus ſinguli ponantur pro x, habebuntur omnes radices binomii propoſiti. Sic in primo exemplo, præter coſinum arcus 10°. 53'; etiam coſinus arcuum

$$109°.5' = \frac{360° - 32°.45'}{3} \ \& \ 130°.53' = \frac{360° + 32°.45'}{3}$$

revocati ad radium $\sqrt{21}$, quæſtionem ſolvent; eruntque hi coſinus

$$-\frac{3}{2} = x; \ \& -3 = x; \text{ unde } y = 21 - \frac{9}{4} = \frac{75}{4}; \ \& \ y = 21 - 9 = 12$$

quare tres radices binomii propoſiti erunt

$$\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}; \ -\frac{3}{2} - \frac{5}{2}\sqrt{-3}; \ -3 + 2\sqrt{-3})$$

quarum ſecunda eſt $(\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3})\ (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3})$

Tertia autem eſt $(\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3})\ (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3})$.

At in ultimo exemplo, præter coſinum arcus 18°. 26', ſolvunt quæſtionem coſinus arcuum

$$71°.34' = \frac{360° - 73°.44'}{4}; \ 108°.26' = \frac{360° + 73°.44'}{4};$$

$$\& \ 161°.34' = \frac{720° - 73°.44'}{4}$$

Horum primus revocatus ad radium $\sqrt{5}$, eſt 0,71126, cui proximus eſt numerus $+1 = x$; ergo $y = xx - m = 1 - 5 = -4$; & radix $+1 + 2\sqrt{-1}$, cujus quarta poteſtas reſtituit binomium propoſitum. Hujus primi arcus complementum ad duos rectos eſt ſecundus, quare x ſumi debet negative, & radix tertia erit $-1 + 2\sqrt{-1}$. Tertius autem eſt complementum illius qui primo inventus fuerat nempe 18°. 26'; ac quarta radix erit $-2 - \sqrt{-1}$.

Quod etiam optime congruit cum iis, quæ inveneramus N°. 87. pag. 82. hujus; quod quarta poteſtas unitatis radices habeat

$$+1; \ -1; \ +\sqrt{-1}; \ -\sqrt{-1}.$$

Nam prima radix polynomii propoſiti eſt

$1(2+\sqrt{-1})$; secunda $(2+\sqrt{-1})(-\sqrt{-1})$; tertia $(2+\sqrt{-1})(+\sqrt{-1})$, quarta $(2+\sqrt{-1})(-1.)$

131. Tandem ope hujus theorematis solvuntur æquationes omnes quæ formam habent descriptam N°. 127. pag. 231. hujus. Æquatio generalis ejus numeri habet coefficientem secundi termini, si considerentur termini qui adsunt, vel tertii, si ratio habeatur evanescentis

$2^{n-3}.nm$, & si radices sunt reales, est $m = \sqrt[n]{(aa-b)}$ (N°. 114. pag. 221. hujus) tunc ergo m^n est minor quam aa. Sed quando radices sunt imaginariæ, est $m = \sqrt[n]{(aa+b)}$ (N°. 118. pag. 227. hujus); & m^n major quam aa.

Sed data æquatione datur coefficiens secundi termini existentis; datur etiam exponens altissimi termini, vel n; atque ideo $2^{n-3}.n$; per hunc numerum dividatur coefficiens termini secundi, quotiens erit m; hic quotiens evehatur ad potestatem n; si est m^n minor quam quadratum ultimi termini omnino cogniti, æquatio solvetur per methodum traditam N°. 117. pag. 225. hujus, si modo solvi potest, & describetur ejus radix per

$$x = \frac{1}{2}\sqrt[n]{(a+\sqrt{b})} + \frac{1}{2}\sqrt[n]{(a-\sqrt{b})}.$$

Sed hæc radix per se & directe non solvit æquationem propositam; nam eam non restituit, nisi pro $\sqrt[n]{(a+\sqrt{b})} + \sqrt[n]{(a-\sqrt{b})}$ & ejus potestatibus subinde restituantur x & ejus potestates. Constat e superioribus.

Si vero sit m^n major quam quadratum ultimi termini, confugiendum ad anguli multisectionem, & solvetur æquatio methodo exposita N°. 129. pag. 231. hujus.

132. Quomodocunque reperiatur valor incognitæ in æquationibus cubicis, nempe

$$\sqrt[3]{(a+\sqrt{-b})} = \alpha+\sqrt{-\beta}; \quad \& \quad \sqrt[3]{(a-\sqrt{-b})} = \alpha-\sqrt{-\beta};$$

realis erit harum summa, & $x = 2\alpha$.

Aliæ duæ radices erunt

$$(\alpha+\sqrt{-\beta})\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)+(\alpha-\sqrt{-\beta})\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-\beta}\right) = -\alpha+\sqrt{3\beta}$$

&

$$(\alpha+\sqrt{-\beta})\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)+(\alpha-\sqrt{-\beta})\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right) = -\alpha-\sqrt{3\beta}$$

 Et

donec eorum numerus fit n. Si hi cofinus finguli ponantur pro x, habebuntur omnes radices binomii propofiti. Sic in primo exemplo, præter cofinum arcus $10^\circ.53'$; etiam cofinus arcuum

$$109^\circ.5' = \frac{360^\circ - 32^\circ.45'}{3} \;\&\; 130^\circ.53' = \frac{360^\circ + 32^\circ.45'}{3}$$

revocati ad radium $\sqrt{21}$, quæftionem folvent; eruntque hi cofinus

$$-\frac{3}{2} = x; \;\& -3 = x; \text{ unde } y = 21 - \frac{9}{4} = \frac{75}{4}; \;\& y = 21 - 9 = 12$$

quare tres radices binomii propofiti erunt

$$\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}; \; -\frac{3}{2} - \frac{5}{2}\sqrt{-3}; \; -3 + 2\sqrt{-3})$$

quarum fecunda eft $(\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3})\;(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3})$

Tertia autem eft $(\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3})\;(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3})$.

At in ultimo exemplo, præter cofinum arcus $18^\circ.26'$, folvunt quæftionem cofinus arcuum

$$71^\circ.34' = \frac{360^\circ - 73^\circ.44'}{4}; \; 108^\circ.26' = \frac{360^\circ + 73^\circ.44'}{4};$$

$$\& \; 161^\circ.34' = \frac{720^\circ - 73^\circ.44'}{4}$$

Horum primus revocatus ad radium $\sqrt{5}$, eft 0,71126, cui proximus eft numerus $+1 = x$; ergo $y = xx - m = 1 - 5 = -4$; & radix $+1 + 2\sqrt{-1}$, cujus quarta poteftas reftituit binomium propofitum. Hujus primi arcus complementum ad duos rectos eft fecundus, quare x fumi debet negative, & radix tertia erit $-1 + 2\sqrt{-1}$. Tertius autem eft complementum illius qui primo inventus fuerat nempe $18^\circ.26'$; ac quarta radix erit $-2 - \sqrt{-1}$.

Quod etiam optime congruit cum iis, quæ inveneramus N°. 87. pag. 82. hujus; quod quarta poteftas unitatis radices habeat

$$+1; \; -1; \; +\sqrt{-1}; \; -\sqrt{-1}.$$

Nam prima radix polynomii propofiti eft

r(2

$1(2+\sqrt{-1})$; secunda $(2+\sqrt{-1})(-\sqrt{-1})$; tertia $(2+\sqrt{-1})(+\sqrt{-1})$; quarta $(2+\sqrt{-1})(-1.)$

131. Tandem ope hujus theorematis solvuntur æquationes omnes quæ formam habent descriptam N°. 127. pag. 231. hujus. Æquatio generalis ejus numeri habet coefficientem secundi termini, si considerentur termini qui adsunt, vel tertii, si ratio habeatur evanescentis

$2^{n-3}.nm$, & si radices sunt reales, est $m = \sqrt[n]{(aa-b)}$ (N°. 114. pag. 221. hujus) tunc ergo m^n est minor quam aa. Sed quando radices sunt imaginariæ, est $m = \sqrt[n]{(aa+b)}$ (N°. 118. pag. 227. hujus); & m^n major quam aa.

Sed data æquatione datur coefficiens secundi termini existentis; datur etiam exponens altissimi termini, vel n; atque ideo $2^{n-3}.n$; per hunc numerum dividatur coefficiens termini secundi, quotiens erit m; hic quotiens evehatur ad potestatem n; si est m^n minor quam quadratum ultimi termini omnino cogniti, æquatio solvetur per methodum traditam N°. 117. pag. 225. hujus, si modo solvi potest, & describetur ejus radix per

$$x = \frac{1}{2}\sqrt[n]{(a+\sqrt{b})} + \frac{1}{2}\sqrt[n]{(a-\sqrt{b})}.$$

Sed hæc radix per se & directe non solvit æquationem propositam; nam eam non restituit, nisi pro $\sqrt[n]{(a+\sqrt{b})} + \sqrt[n]{(a-\sqrt{b})}$ & ejus potestatibus subinde restituantur x & ejus potestates. Constat e superioribus.

Si vero sit m^n major quam quadratum ultimi termini, confugiendum ad anguli multisectionem, & solvetur æquatio methodo exposita N°. 129. pag. 231. hujus.

132. Quomodocunque reperiatur valor incognitæ in æquationibus cubicis, nempe

$$\sqrt[3]{(a+\sqrt{-b})} = \alpha+\sqrt{-\beta}; \ \& \ \sqrt[3]{(a-\sqrt{-b})} = \alpha-\sqrt{-\beta};$$

realis erit harum summa, & $x = 2\alpha$.

Aliæ duæ radices erunt

$$(\alpha+\sqrt{-\beta})\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)+(\alpha-\sqrt{-\beta})\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-\beta}\right) = -\alpha+\sqrt{3\beta}$$

&

$$(\alpha+\sqrt{-\beta})\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)+(\alpha-\sqrt{-\beta})\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right) = -\alpha-\sqrt{3\beta}$$

 Et

Et tres radices reales erunt, rem ostendente KÆSTNERO in peculiari dissertatione quam ideo conscripsit. Si nempe binomii imaginarii radix cubica possit inveniri sine solutione æquationis cubicæ. Hinc autem orictur æquatio ejus formæ, quæ dicitur irreductibilis, nempe,

$$x^3 - 3(\alpha\alpha + \beta)\, x - 2\, (\alpha^3 - 3\alpha\beta) = 0$$

quæ tantum differt ab æquatione Ni. 106. pag. 221. hujus, duobus illis, quæ hanc reddunt irreductibilem.

133. Hæc aperte quidem ostendunt quomodo radix æquationis irreductibilis sub forma imaginaria complecti possit tres radices reales, si modo binomii imaginarii tertia radix extrahi possit; sed non ostendunt cur per CARDANI regulam radix habeatur sub forma imaginaria; ideo non destruunt difficultatem, de qua (Nis 99. 107. pag. 217 ... 222. hujus).

134. Monstratum jam fuit Nis 95..97. pag. 214..216. hujus, æquationem irreductibilem oriri posse e tribus radicibus realibus, quarum una saltem, est commensurabilis. Nunc dico in ipsa æquatione inventa N°. 132. hujus, esse α quantitatem commensurabilem aut rationalem, si ipsa æquatio est rationalis; etiamsi forte minus necessarium sit id ostendere post ea quæ jam observavimus.

Sit enim, si fieri potest, $\alpha = \sqrt[n]{\gamma^r}$; erit $\alpha^2 = \sqrt[n]{\gamma^{2r}}$, quæ quantitas debet esse rationalis, ut æquatio rationalis exsurgat. Ergo $\frac{2r}{n}$ est numerus integer; & aut

$$n = 2;\ \&\ \sqrt[n]{\gamma^r} = \sqrt{\gamma^r};\ \text{aut}\ r = ns;\ \&\ \sqrt[n]{\gamma^r} = \sqrt[n]{\gamma^{ns}} = \gamma^s.$$

In ultima hypothesi statim $\sqrt[n]{\gamma^r}$, atque ideo α, est rationalis. In altera, erit

$$\sqrt[n]{\gamma^r} = \sqrt{\gamma^r};\ \text{hinc}\ \alpha^3 = \gamma^r \sqrt{\gamma^r}$$

quæ quantitas pariter debet esse rationalis, ne irrationalem habeat ultimi termini partem æquatio proposita. Igitur $\frac{r}{2}$ est numerus integer & $\sqrt{\gamma^r}$, vel α, est iterum quantitas rationalis.

AP-

APPENDIX
ÆQUATIONUM
Constructio linearis.

I. Hactenus æquationum proprietates, transmutationes, limites, & omnis generis reductiones, docui. Demonstrationes non semper adjunxi quoniam satis faciles mihi visæ sunt, & nonnunquam absque nimiis ambagibus tradi non possent. Restat jam tantum ut æquationum, postquam ad formam commodissimam reductæ sunt, radices in numeris extrahere doceam. Et hic præcipua difficultas est in figuris duabus vel tribus prioribus obtinendis. Id quod commodissime per æquationis constructionem aliquam seu geometricam sive mechanicam conficitur. Qua de causa non pigebit hujusmodi constructiones aliquas subjungere.

II. Veteres, ut ex PAPPO discimus, trisectionem anguli, & inventionem duarum mediæ proportionalium, sub initio per rectam lineam & circulum, frustra aggressi sunt. Postea considerare cœperunt alias permultas lineas, ut conchoidem, cissoidem, & conicas sectiones, & per harum aliquas solverunt problemata. Tandem re penitius examinata, & conicis sectionibus in Geometriam receptis, problemata distinxerunt in tria genera: *Plana* quæ per lineas, a plano originem derivantes, rectam nempe & circulum solvi possint; *Solida* quæ per lineas ortum a solidi, id est coni, consideratione derivantes solvebantur; & *Linearia* ad quorum solutionem requirebantur lineæ magis compositæ. Et juxta hanc distinctionem, problemata solida per alias lineas quam conicas sectiones solvere a Geometria alienum est; præsertim si nullæ aliæ lineæ præter rectam, circulum, & conicas sectiones in Geometriam recipiantur. At recentiores longius progressi receperunt lineas omnes in Geometriam quæ per æquationes exprimi possunt, & pro dimensionibus æquationum distinxerunt lineas illas in genera, legemque tulerunt non licere problema per lineam superioris generis construere quod construi potest per lineam inferioris.

III. In lineis contemplandis, & eruendis earum proprietatibus, distinctionem earum in genera juxta dimensiones æquationum per quas definiuntur, laudo. At æquatio non est, sed descriptio quæ curvam geometricam efficit. Circulus linea geometrica est, non quod per æquationem exprimi potest; sed quod descriptio ejus postulatur. Æquationis simplicitas non est, sed descriptionis facilitas, quæ lineam ad constructiones problematum prius admittendam esse indicat. Nam æquatio ad parabolam simplicior est quam æquatio ad circulum; & tamen circulus ob simpliciorem descriptionem prius admittitur. Circulus & coni sectiones, si æquationum dimen-

ſiones ſpectentur, ejuſdem ſunt ordinis; & tamen circulus in conſtructione problematum non connumeratur cum his, ſed ob ſimplicem deſcriptionem deprimitur ad ordinem inferiorem lineæ rectæ; ita ut per circulum conſtruere quod per rectas conſtrui poteſt, non ſit illicitum; per conicas vero ſectiones conſtruere quod per circulum conſtrui poteſt vitio vertatur. Aut igitur legem a dimenſionibus æquationum in circulo obſervandam eſſe ſtatue, & ſic diſtinctionem inter problemata plana & ſolida, ut vitioſam, tolle; aut concede legem illam in lineis ſuperiorum generum non ita obſervandam eſſe, quin aliquæ ob ſimpliciorem deſcriptionem præferantur aliis ejuſdem ordinis, & in conſtructione problematum cum lineis inferiorum ordinum connumerentur. In conſtructionibus quæ ſunt æque geometricæ, præferendæ ſemper ſunt ſimpliciores. Hæc lex omni exceptione major eſt. Ad ſimplicitatem vero conſtructionis expreſſiones algebraicæ nil conferunt. Solæ deſcriptiones linearum hic in cenſum veniunt. Has ſolas conſiderabant Geometræ qui circulum conjungebant cum recta. Prout hæ ſunt faciles vel difficiles, conſtructio facilis vel difficilis redditur. Adeoque a rei natura alienum eſt leges conſtructionibus aliunde præſcribere. Aut igitur lineas omnes præter rectam & circulum, & forte conicas ſectiones, e Geometria cum veteribus excludamus, aut admittamus omnes ſecundum deſcriptionis ſimplicitatem. Si trochoides in Geometriam reciperetur, liceret ejus beneficio angulum in data ratione ſecare. Numquid ergo reprehenderes ſiquis hac linea ad dividendum angulum in ratione numeri ad numerum uteretur, & contenderes hanc lineam per æquationem non definiri, lineas vero quæ per æquationes definiuntur, adhibendas eſſe? Igitur ſi angulus *e. g.* in 10001 partes dividendus eſſet, teneremur curvam lineam æquatione pluſquam centum dimenſionum definitam in medium afferre, quam tamen nemo mortalium deſcribere, nedum intelligere, valeret; & hanc anteponere trochoidi quæ linea notiſſima eſt, & per motum rotæ vel circuli facillime deſcribitur. Quod quam abſurdum ſit quis non videt? Aut igitur trochoides in Geometriam non eſt admittenda, aut in conſtructione problematum curvis omnibus difficilioris deſcriptionis anteferenda. Et eadem eſt ratio de reliquis curvis. Quo nomine triſectiones anguli per conchoidem quas *Archimedes* in Lemmatis & *Pappus* in collectionibus poſuere, præ aliorum hac de re inventis omnibus, laudamus; ſiquidem lineas præter rectam & circulum e Geometria excludere debeamus, aut ſecundum deſcriptionis ſimplicitatem admittere, & conchoides ſimplicitate deſcriptionis nulli curvæ præter circulum cedit. Æquationes ſunt expreſſiones computi arithmetici, & in Geometria locum proprie non habent, niſi quatenus quantitates vere geometricæ (id eſt lineæ, ſuperficies, ſolida, & proportiones) aliquæ aliis æquales enunciantur. Multiplicationes, Diviſiones, & ejuſmodi computa in Geometriam recens introducta ſunt; idque inconſulto, & contra primum inſtitutum ſcientiæ hujus. Nam qui conſtructiones problematum per rectam & circulum a primis Geometris adinventas conſiderabit, facile ſentiet Geometriam excogitatam eſſe ut expedito linearum ductu effugeremus computandi tædium. Proinde hæ duæ ſcientiæ confundi non debent. Veteres tam ſedulo diſtinguebant eas ab invicem, ut in Geometriam termi-

minos aritmeticos nunquam introduxerint. Et recentes utramque confundendo amiserunt simplicitatem in qua Geometriæ elegantia omnis consistit.

IV. Est itaque *arithmetice* quidem simplicius quod per simpliciores æquationes determinatur: at *geometrice* simplicius est quod per simpliciorem ductum linearum colligitur; & in Geometria prius & præstantius esse debet quod est ratione geometrica simplicius. Mihi igitur vitio vertendum non erit si cum Mathematicorum Principe, *Archimede*, aliisque veteribus, conchoidem ad solidorum problematum constructionem adhibeam. Attamen siquis aliter senserit, sciat me hic de constructione non geometrica sed qualicunque, sollicitum esse, qua radices æquationum in numeris proxime assequar. Cujus rei gratia præmitto hoc problema lemmaticum.

Inter datas duas lineas AB, AC rectam datæ longitudinis BC ponere quæ producta transeat per datum punctum P.

V. Si circa polum P gyret linea BC, simul terminus ejus C incedat super recta AC, ejus alter terminus B describet conchoidem veterum. Secet hæc lineam AB in puncto B. Junge PB, & ejus pars BC erit recta quam ducere oportuit. Et eadem lege linea BC duci potest ubi vice rectæ AC linea aliqua curva adhibetur. Tab. IX. Fig. 1.

VI. Sicui constructio hæcce per conchoidem minus placeat, potest alia per conicam sectionem ejus vice substitui.

A puncto P ad rectas AD; AE; age PD; PE; constituentes parallelogrammum EADP, & a punctis C ac D ad rectam AB demitte perpendicula CF; DG; ut & a puncto E ad rectam AC versus A productam perpendiculum EH, & dictis

$$AD = a;\ PD = b;\ BC = c;\ AG = d;\ AB = x;\ \&\ AC = y.$$

Erit AD ad AG ut AC ad AF, adeoque $AF = \frac{dy}{a}$.

Erit & AB ad AC ut PD ad CD, seu x ad y ut b ad $a-y$. Ergo $by = ax - yx$,

quæ æquatio est ad hyperbolam. Rursus per 13. II. *Elem.* erit

$$BCq = ACq + ABq - 2FAB, \text{ id est } cc = yy + xx - \frac{2dxy}{a}.$$

Prioris æquationis partes ductas in $\frac{2d}{a}$ aufer de partibus hujus, & restabit

$$cc - \frac{2bdy}{a} = yy + xx - 2dx,$$

æquatio ad circulum, ubi x & y ad rectos sunt angulos. Quare si hasce duas li-

lineas, hyperbolam & circulum, ope harum æquationum componas, earum intersectione habebis x & y, seu AB & AC, quæ positionem rectæ BC determinant. Componentur autem lineæ illæ ad hunc modum.

Tab. IX. Fig 2. VII. Duc rectas duas quasvis KL æqualem AD, & KM æqualem PD, continentes angulum rectum MKL. Comple parallelogrammum KLNM, & asymptotis LN, MN per punctum K describe hyperbolam IKX.

VIII. In KM versus K producta, cape KP æqualem AG; & KQ æqualem BC. Et in in KL producta versus K, cape KR æqualem AH; & RS æqualem RQ. Comple parallelogrammum PKRT, & centro T, intervallo TS, describe circulum. Secet hic hyperbolam in puncto X. Ad KP demitte perpendiculum XY, & erit XY æqualis AC & KY æqualis AB. Quæ duæ lineæ, AC & AB, vel una earum, cum puncto P determinant positionem quæsitam rectæ BC Cui constructioni demonstrandæ, & ejus casibus secundum casus problematis determinandis non immoror.

IX. Hac, inquam, constructione solvi potest problema, sicui ita visum sit. Sed hæc solutio magis composita est quam ut usibus ullis inservire possit. Nuda speculatio est, & speculationes geometricæ tantum habent elegantiæ quantum simplicitatis, tantumque laudis merentur quantum utilitatis secum afferunt. Ea de causa constructionem per conchoidem præfero ut multo simpliciorem, & non minus geometricam, & quæ resolutioni æquationum a nobis propositæ optime conducit. Præmisso igitur præcedente Lemmate, construimus geometrice problemata cubica, & quadratoquadratica (*ut pote quæ ad cubica reduci possunt*) ut sequitur.

X. *Proponatur æquatio cubica*

$$x^3 * + qx + r = 0,$$

cujus terminus secundus deest, tertius vero sub signo suo designatur per $+q$ *& quartus per* $+r$.

Tab. IX. Fig. 3.4.5. Duc quamlibet KA, quam dic n. In KA utrinque producta, cape KB $= \frac{q}{n}$ ad easdem partes cum KA si habeatur $+q$, aliter ad contrarias. Biseca BA in C, & centro K, radio KC, fac circulum CX, cui inscribe rectam CX æqualem $\frac{r}{nn}$, & produc eam utrinque. Dein junge AX, & produc eam utrinque. Denique inter has lineas CX & AX inscribe EY ejusdem longitudinis cum CA, quæque producta transeat per punctum K, & XY erit erit radix æquationis. Et ex his radicibus affirmativæ erunt quæ cadunt ad partes X versus C, & negativæ quæ cadunt ad partes contrarias, si habeatur $+r$, & contra si habeatur $-r$.

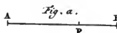
Demonstratio.

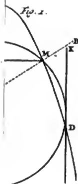
Ad demonstrationem præmittimus Lemmata sequentia.

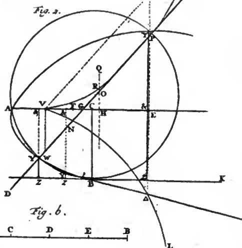
LEM-

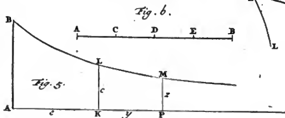
Fig. 2.

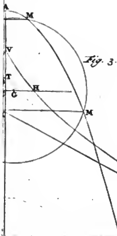
Fig. 4.

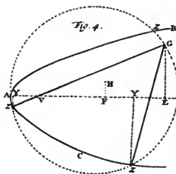

Fig. a.
A
B
P

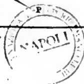

Fig. 1.
B
M
K
D


Fig. 2.
I
X
D
Q
R
O
A
V
G
C
H
E
N
Y
W
Z
B
K
L
D


Fig. b.
A
C
D
E
B
L
M
Fig. 5.
c
z
K
y
P


A
M
V
Fig. 3.
T
H
G
M
X


Fig. 4.
Z
B
G
H
A
V
F
Y
E
C
Z



TAB. Z.

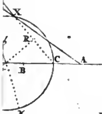


Fig. 1.
X
R
C
A
B
x

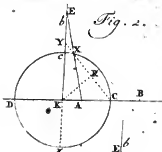


Fig. 2.
E
b
Y
X
c
R
D
K
A
C
B
x

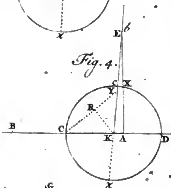


Fig. 4.
E
b
c
X
Y
R
B
C
K
A
D
x

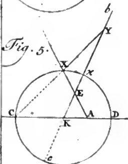


Fig. 5.
b
Y
X
x
E
C
A
D
K
c

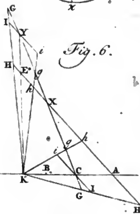


Fig. 6.
G
I
Y
i
H
E
g
h
X
h
g
i
B
C
A
K
I
G
H

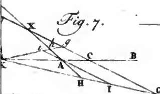


Fig. 7.
X
i
h
g
C
B
K
A
H
I
G



TAB. *a*.

Fig. 2.

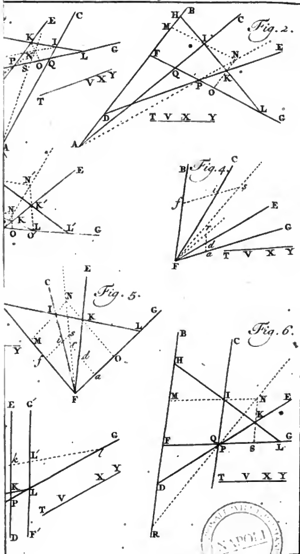
Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 6.

Fig. pag. 119 *Addit.*

Ad P. Bosch. observ. pag. 126. &c. Addit.



ERRATA TOMI II.	CORRIGE
Pag. 22. lin. 2. inter, & A	inter 1, & A
pag. 29. lin. 3. Factoribus rationalibus	Factoribus irrationalibus
pag. 82. lin. 16. $x^5-x^4+x^2-x^2+1$	$x^5-x^4+x^3-x^2+x-1$
pag. 104. lin. 5. a fine $x^4-26x^3+151x^2-246x+80=0$	$x^4-26x^3+231x^2-806x+880=0$
Ibidem lin. 3. a fine $4x^3-78x^2+302x-246$	$4x^3-78x^2+462x-806$
Ibidem lin. ultima $2x^3-39x^2+151x-123$	$2x^3-39x^2-231x-403$

LEMMA I.

XI. *Est YX ad AK ut CX ad KE.* Etenim age KF parallelam CX, & ob similia triangula ACX; AKF, & EYX; EKF, erit AC ad AK ut CX ad KF, & YX ad YE (seu AC) ut KF ad KE; adeoque *ex æquo perturbate*, YX ad AK ut CX ad KE. Q. E. D.

LEMMA II.

XII. *Est YX ad AK ut CY ad AK + KE.* Nam componendo est YX ad AK ut YX + CX, id est CY ad AK + KE. Q. E. D.

LEMMA III.

XIII. *Est KE — BK ad YX ut YX ad AK.*
Nam per 13. II. *Elem.* est

$$YKq - CKq = CYq - CY \cdot CX = CY \cdot YX,$$

hoc est, si theorema resolvatur in proportionem,

CY ad YK — CK ut YK + CK ad YX.

Sed est

$$YK - CK = YK - YE + CA - CK = KE - BK.$$

Et

$$YK + CK = YK - YE + CA + CK = KE + AK.$$

Adeoque est

CY ad KE — BK ut KE + AK ad YX.

Sed per *Lemma secundum* erat

CY ad KE + AK ut YX ad AK.

Ergo ex æquo est YX ad KE — BK ut AK ad YX. Seu KE — BK ad YX ut YX ad AK. Q. E. D.

XIV. His præmissis demonstrabitur theorema ut sequitur.
In *primo Lemmate* erat YX ad AK ut CX ad KE, seu KE . YX = AK . CX.
In *tertio* erat KE — BK ad YX ut YX ad AK.

Unde si prioris rationis termini ducantur in YX fiet

KE . YX — BK . YX ad YXq ut YX ad AK,

id est

$$AK.CX - BK.YX \text{ ad } YXq \text{ ut } YX \text{ ad } AK,$$

& ductis extremis & mediis in se

$$AKq.CX - AK.BK.YX = YX\,cub.$$

Denique pro YX; AK; BK; & CX; restitutis x; n; $\frac{q}{n}$; & $\frac{r}{nn}$ orietur $r - qx = x^3$. Q. E. D.

XV. Quod vero ad ad signorum variationes attinet, istis secundum casus problematum determinandis non immoror.

XVI. *Proponatur jam æquatio cujus tertius terminus deest*

$$x^3 + pxx + r = 0.$$

Et ad ejus constructiones assumpto quolibet n, cape in recta aliqua longitudines duas KA $= \frac{r}{nn}$; & KB $= p$, idque ad easdem partes si r & p habeant eadem signa, aliter ad contrarias. Biseca BA in C, & centro K, radio KC, describe circulum cui inscribe CX æqualem n, & produc eam utrinque. Item junge AX, & produc eam utrinque. Denique inter has lineas CX & AX inscribe EY ejusdem longitudinis cum CA, ita ut ea, si producatur, transeat per K, & KE erit radix æquationis. Radices autem affirmativæ sunt ubi punctum Y cadit a parte puncti X versus C, & negativæ ubi punctum Y cadit ad alteras partes puncti X si modo habeatur $+r$, & contra si habeatur $-r$.

Ad hujus Propositionis demonstrationem schemata & lemmata de priori propositione mutuo sumantur, & *demonstratio* crit ut sequitur.

XVII. Per *Lemma* 1, erat

$$YX \text{ ad } AK \text{ ut } CX \text{ ad } KE, \text{ seu } YX.KE = AK.CX,$$

& per *Lemma* 3, KE $-$ KB ad YX ut YX ad AK,

aut (sumpto KB ad contrarias partes)

$$KE + KB \text{ ad } YX \text{ ut } YX \text{ ad } AK,$$

adeoque

(KE + KB) in KE ad YX . KE, seu AK . CX ut YX ad AK, seu CX ad KE.

Quare ductis extremis & mediis in se, est

$$KE\,cub. + KB.KEq = AK.CXq,$$

& ipsarum KE; KB; AK; & CX, restitutis valoribus supra assignatis, $x^3 + pxx = r$.

XVIII.

XVIII. *Proponimus jam æquationem trium dimensionum*

$$x^3 + pxx + qx + r = 0,$$

nullo termino carentem, & cujus tres radices non sunt omnes affirmativæ neque omnes negativæ.

Et primo si terminus q *negativus* est, in recta aliqua KB capiantur longitudines duæ KA $= \frac{r}{q}$; & KB $= p$, idque ad easdem partes puncti K si p; & $\frac{r}{q}$ habent signa diversa; aliter ad contrarias. Biseca AB in C, & ad punctum illud C erige perpendiculum CX æquale radici quadraticæ termini q. Et inter lineas rectas AX & CX, utrinque productas in infinitum inscribatur recta EY, quæ æqualis sit rectæ AC, & producta transeat per punctum K, atque KE erit radix æquationis, quæ quidem affirmativa erit si punctum X cadat inter puncta A & E, negativa vero si punctum E cadat ad partes puncti X versus A. Tab. IX. Fig. 6.

XIX. Quod si terminus q *affirmativus* est, in recta KB capiantur longitudines illæ duæ KA $= \sqrt{\frac{-r}{p}}$, & KB $= \frac{q}{KA}$, idque ad easdem partes puncti K, si $\sqrt{\frac{-r}{p}}$ & $\frac{q}{KA}$ habent signa diversa; aliter ad contrarias. Biseca AB in C, & ad punctum illud C erige perpendiculum CX æquale termino p: & inter lineas rectas AX & CX, utrinque productas in infinitum inscribatur recta EY, quæ æqualis sit rectæ AC, & producta transeat per punctum K, atque XY erit radix æquationis; quæ quidem negativa erit si punctum X cadat inter puncta A & E, affirmativa vero si punctum Y cadat ad partes puncti X versus punctum C.

Demonstratio casus prioris.

XX. Per *Lemma primum* erat

KE ad CX ut AK ad YX,

& ita (componendo) est

KE + AK, id est KY + KC, ad CX + YX, id est, CY. Sed in triangulo rectangulo KCY est YCq æquale YKq — KCq, id æquale (KY + KC) (KY — KC), & resolvendo terminos æquales in proportionales, KY + KC ad CY ut CY ad KY — KC, seu KE + AK ad CY ut CY ad EK — KB. Quare cum in hac proportione fuerit KE ad CX, duplicetur proportio, & erit KEq ad CXq ut KE + AK ad KE — KB; & ductis extremis & mediis in se KE *cub.* — KB . KEq = CXq . KE + CXq . AK. Et restitutis valoribus supra assignatis $x^3 - pxx = qx + r$.

Demonstratio casus secundi.

XXI. Per *Lemma primum* est KE ad CX ut AK ad YX, ductisque extremis & mediis in se, fit KE . YX = CX . AK. Scribe ergo in superioribus KE . YX pro CX . AK, & fiet KE *cub.* — KB . KE*q* = CX*q*. KE + CX . KE . YX. Et applicatis omnibus ad KE, erit, KE*q* — KB . KE = CX*q* + CX . YX: ductisque omnibus in AK habebitur AK . KE*q* — AK . KB . KE = AK . CX*q* + AK . CX . YX. Ac rursus scripto KE . YX pro CX . AK, fiet AK . KE*q* — AK . KB . KE = KE . YX . CX + KE . YX*q*: & applicatis omnibus ad KE, orietur AK . KE — AK . KB = YX . CX . CX + YX*q*: ductisque omnibus in YX, emerget AK . KE . YX — AK . KB . YX = YX*q* . CX + YX *cub.* & pro KE . YX scriptis in primo termino CX . AK, fiet CX . AK*q* — AK . KB.YX = CX . YX*q* + YX *cub.*; seu, quod perinde est, YX *cub.* + CX . YX*q* + AK . KB . YX — CX . AK*q* = o. Atque pro YX; CX; AK; & KB; substitutis valoribus supra assignatis x; p; $\sqrt{\frac{-r}{p}}$; $q\sqrt{\frac{p}{-r}}$; emerget tandem $x^3 + pxx + qx + r = 0$, æquatio construenda.

XXII. *Solvuntur etiam hæ æquationes ducendo rectam lineam datæ longitudinis inter circulum & aliam rectam positione datos, ea lege ut recta illa ducta convergat ad punctum datum.*

Proponatur enim æquatio cubica $x^3 * + qx + r = 0$, *cujus terminus secundus deest.*

Tab. IX. Fig 7. Duc rectam KA ad arbitrium. Eam dic n. In KA utrinque producta cape KB = $\frac{q}{n}$, idque ad easdem partes puncti K cum linea KA si modo habeatur $-q$, aliter ad diversas. Biseca BA in C, & centro A, intervallo AC, describe circulum CX. Ad hunc apta lineam rectam CX = $\frac{r}{nn}$, & per puncta K, C, & X describe circulum KCXG. Junge AX, & junctam produc donec ea iterum secet circulum ultimo descriptum KCXG, in puncto G. Denique inter hunc ultimo descriptum circulum & rectam KC utrinque productam inscribe rectam EY ejusdem longitudinis cum recta AC, ita ut ea convergat ad punctum G. Et acta recta EC erit una ex radicibus æquationis. Radices autem affirmativæ sunt quæ cadunt in majori circuli segmento KGC, & negativæ quæ in minori KEC si habeatur $-r$; & contra si habeatur $+r$, affirmativæ in minori segmento KFC, negativæ in majori KGC reperientur.

Ad hujus vero constructionis demonstrationem præmittimus lemmata sequentia.

LEMMA I.

XXIII. *Positis quæ in constructione superiore, est CE ad KA ut CE + CX ad AY, & CX ad KY.*

Nam.

Nam, recta KG ducta, est AC ad AK ut CX ad KG, idque ob similia triangula ACX, AKG. Sunt etiam triangula YEC, YKG similia: quippe quæ communem habent angulum ad Y, & angulum ad G & C in eodem circuli KCG segmento EGCK, atque adeo æquales. Inde fit CE ad EY ut KG ad KY, id est CE ad AC ut KG ad KY eo quod EY & AC, juxta hypothesin, æquantur. Collata autem hacce cum superiore proportionalitate colligitur *ex æquo perturbate* quod fit CE ad KA ut CX ad KY, & vicissim CE ad CX ut KA ad KY. Unde componendo fit CE + CX ad CX ut KA + KY ad KY, id est ut AY ad KY, & vicissim CE + CX ad AY ut CX ad KY hoc est ut CE ad KA. Q. E. D.

LEMMA II.

XXIV. *Demisso ad lineam GY perpendiculo CH, fiet rectangulum 2HEY æquale rectangulo CE . CX.*

Nam, demisso etiam ad lineam AY perpendiculo GL, triangula KGL; ECH rectos habentia angulos ad L & H, & angulos ad K & E in eodem circuli CGK segmento CKEG, adeoque æquales, æquiangula sunt & proinde similia. Est ergo KG ad KL, ut EC ad EH. Porro, a puncto A ad lineam KG demisso perpendiculo AM, ob æquales AK, AG bisecabitur KG in M, & triangula KAM, KGL ob angulum ad K communem, & angulos ad M & L rectos, fient similia & inde est AK ad KM ut KG ad KL. Sed ut est AK ad KM ita est 2AK ad 2KM, seu KG, & ita (ob similia triangula AKG, ACX) est 2AC ad CX; & (ob æquales AC & EY) ita est 2EY ad CX. Ergo est 2EY ad CX ut KG ad KL. Sed erat KG ad KL ut EC ad EH, ergo est 2EY ad CX ut EC ad EH, ergo est 2EY ad CX ut EC ad EH, atque adeo rectangulum 2HEY (ductis nimirum extremis & mediis in se) æquale est rectangulo EC . CX. Q. E. D.

XXV. Assumpsimus hic lineas AK; AG æquales esse. Nimirum rectangula CAK, XAG (per *Corol. Prop. Prop. 36. lib.* III. *Elem.*) æqualia sunt, atque adeo ut CA est ad XA ita AG est ad AK. Sed CA, XA æquales sunt per hypothesin; ergo & AG; AK.

LEMMA III.

XXVI. *Constructis omnibus ut supra, tres lineæ BY; CE; KA; sunt continue proportionales.*

Nam, (per *Prop.* 12. *lib.* II. *Elem.*), est $CYq = EYq + CEq + 2EX . EH$. Et ablato utrinque EYq fit $CYq - EYq = CEq + 2EY . EH$. Sed 2EY . EH (per *Lem.* 2.) æquale est rectangulo CE . CX, & addito utrinque CEq fit $CEq + 2EY . EH = CEq + CE . CX$. Ergo $CYq - EYq$ æquale est $CEq + CE . CX$, id est $(CY + EY) . (CY - EY)$ æquale est $CEq + CE . CX$. Et resolutis æqualibus rectangulis in latera proportionalia fit CE + CX ad CY + EY ut CY — EY ad CE. Sunt autem tres lineæ EY; CA; CB: æquales & inde $CY + EY = CY + CA = AY$, & $CY - EY = CY - CB = BY$. Scribantur itaque AY pro CY + EY, & BY pro CY — EY, & fiet CE + CX ad AY ut BY ad CE. Sed

(*per Lem.* 1.) est CE ad KA ut CE + CX ad AY, ergo est CE ad KA ut BY ad CE, hoc est lineæ tres BY, CE, KA, sunt continue proportionales. Q. E. D.

Tandem ope horum Lemmatum constructio superioris problematis sic *demonstratur*.

XXVII. *Per Lemma* 1. est CE ad KA ut CX ad KY, adeoque KA.CX = KY.CE, & applicatis his æqualibus extremorum & mediorum rectangulis ad CE fit $\frac{KA.CX}{CE} = KY$. His lateribus æqualibus adde BK & æqualia erunt $BK + \frac{KA.CX}{CE}$ & BY. Unde per *Lemma tertium* est $BK + \frac{KA.CX}{CE}$ ad CE ut CE ad KA, & inde, ductis extremis & mediis in, se provenit CE*q* æquale $BK.KA + \frac{KAq.CX}{CE}$, & omnibus præterea ductis in CE fit, CE *cub.* æquale BK.KA.CE + KA*q*.CX.

CE erat radix æquationis dicta x; KA erat n; KB $\frac{q}{n}$; & CX $\frac{r}{nn}$. His pro CE; KA; KB; & CX substitutis oritur $x^3 = qx + r$, seu $x^3 - qx - r = 0$, æquatio construenda; ubi q & r negativa prodeunt sumptis KA & KB ad easdem partes puncti K, & radice affirmativa in majori segmento CGK existente. Hic *unus casus* est constructionis demonstrandæ.

Ducatur KB ad partes contrarias, id est, mutetur signum ejus, seu signum ipsius $\frac{q}{n}$, vel quod perinde est, signum termini q, & habebitur constructio æquationis $x^3 + qx - r = 0$: *qui casus est alter.*

In his casibus CX, & radix affirmativa CE cadunt ad easdem partes lineæ AK.

XXIX. Cadant CX & radix negativa ad easdem mutato signo ipsius CX, seu $\frac{r}{nn}$ vel (quod perinde est) signo ipsius r, & habebitur *casus tertius* $x^3 + qx + r = 0$, ubi radices omnes sunt negativæ.

XXX Et mutato rursus signo ipsius KB, seu $\frac{q}{n}$, vel solius q, incidetur in *casum quartum* $x^3 - qx + r = 0$. Quorum omnium casuum constructiones percurrere licebit, & sigillatim demonstrare ad modum casus primi. Nos uno casu demonstrato ceteros leviter attingere satis esse putavimus. Hi verbis iisdem mutato solum linearum situ demonstrantur.

XXXI. *Construenda jam sit æquatio cubica* $x^3 + pxx^* + r = 0$, *cujus tertius terminus deest.*

In figura superiore assumpta longitudine quavis n, capias in recta quavis infinita AY; KA; & KB; quarum KA valeat $\frac{r}{n}$; & KB valeat p. Has cape ad easdem partes puncti K, si modo signa terminorum p & r sint eadem, secus ad contrarias. Biseca BA in C, & centro A, intervallo AC, de-

describe circulum CX. In eo aptes rectam CX, æqualem longitudini assumptæ n. Junge AX, & produc junctam ad G, ita ut fiat AG æqualis AK, & per puncta K; C; X; G; describe circulum. Denique inter hunc circulum & rectam KC utrinque productam, inscribe rectam EY ejusdem longitudinis cum recta AC, ea lege, ut hæc inscripta transeat per punctum G, si modo ipsa producatur: & acta recta KY erit una ex radicibus æquationis. Sunt autem radices affirmativæ quæ cadunt ad partes puncti K versus punctum A si modo habeatur $+r$; sin habeatur $-r$, affirmativæ sunt quæ cadunt ad partes contrarias. Et si affirmativæ radices jacent ex una parte puncti A, negativæ sunt quæ jacent ex altera.

Demonstratur autem hæc constructio ope lemmatum trium novissimorum in hunc modum.

XXXII. Per *Lemma tertium* BY; CE; KA; continue proportionales; & per *Lemma primum* ut est CE ad KA ita est CX ad KY. Ergo BY est ad CE ut CX ad KY. Sed BY idem est quod KY—KB. Ergo KY—KB est ad CE ut CX ad KY. Sed ut est KY—KB ad CE ita est KY—KB in KY ad CE in KY, idque per *Prop.* 1. *lib.* VI. *Elem.* & ob proportionales CE ad KA ut CX ad KY est CE in KY æquale KA in CX. Ergo (KY—KB) KY est ad KA in CX (ut KY—KB ad CE, hoc est) ut CX ad KY. Et ductis extremis & mediis in se invicem, fit (KY—KB) KYq æquale KA in CXq: id est KY *cub.*—KB . KY *quad.* æquale KA . CX *quad.* Erat autem in constructione, KY radix æquationis dicta x; KB æqualis p; KA æqualis $\frac{r}{nn}$; & CX æqualis n. Scribantur igitur x; p; $\frac{r}{nn}$; & n; pro KY; KB; KA; & CX; respective, & fiet $x^3 - pxx = r$, seu $x^3 - pxx - r = 0$.

XXXIII Resolvi potest constructio demonstranda in hasce quatuor æquationum casus,

$$x^3 - pxx - r = 0,\quad x^3 - pxx + r = 0,$$

$$x^3 + pxx - r = 0,\ \&\ x^3 + pxx + r = 0.$$

Casum primum jam demonstratum dedi, ceteri tres iisdem verbis, mutato tantum linearum situ, demonstrantur. Nimirum, uti sumendo KA & KB ad easdem partes puncti K, & radicem affirmativam KY ad contrarias partes, jam prodiit KY *cub.*—KB . KYq = KA . CXq, & inde $x^3 - pxx - r = 0$: sic sumendo KB ad contrarias partes puncti K, prodibit simili argumentationis progressu, KY *cub.*+KB . KYq = KA . CXq, & inde

$$x^3 + pxx - r = 0.$$

Et in hisce duobus casibus si mutetur situs radicis affirmativæ KY sumendo eam ad alteram partem puncti K, per similem argumentationis seriem devenietur ad alteros duos casus KY *cub.*+KB . KYq = —KA . CXq, seu

x^3

$x^3 + pxx + r = 0$, & KY *cub.* — KB . KYq = — KA . CXq, seu $x^3 - pxx + r = 0$. Qui omnes casus erant demonstrandi.

XXXIV. *Pronatur jam æquatio cubica*

$$x^3 + pxx + qx + r = 0,$$

nullo (nisi forte tertio) termino carens. Ea construetur ad hunc modum.

Tab. IX. Fig. 8. Cape ad arbitrium longitudinem n. Ejus dimidio æqualem duc rectam quamvis GC, & ad punctum G erige perpendiculum GD æquale $\sqrt{\frac{r}{p}}$. Deinde si termini p & r habent contraria signa, centro C, intervallo CD,

Tab. X. Fig. 1. describe circulum PBE. Sin eadem sunt eorum signa, centro D, intervallo GC, describe circulum occultum secantem rectam GA in H; dein centro C, intervallo GH, describe circulum PBE. Tum fac GA $= -\frac{q}{n} - \frac{r}{np}$, eamque duc in linea GC ad partes puncti G versus C si modo quantitas $-\frac{q}{n} - \frac{r}{np}$ (signis terminorum p; q; r; in æquatione construenda probe observatis) affirmativa obvenerit: secus age GA ad alteras partes puncti G, & ad punctum A erecto perpendiculo AY, inter hoc & circulum PBE superius descriptum inscribe lineam EY æqualem termino p, ea lege ut hæc inscripta convergat ad punctum G. Quo facto & producta illa EY ad G, erit linea EG una ex radicibus æquationis construendæ. Quæ quidem radices affirmativæ sunt ubi punctum E cadit inter puncta G & Y, & negativæ ubi E cadit extra, si modo habeatur $+p$; & contra si $-p$.

Demonstrationi hujus constructionis præmittimus *lemmata* sequentia.

LEMMA I.

XXXV. *Demisso ad AG perpendiculo EF, & acta recta EC, est EGq + GCq = ECq + 2CGF.*

Nam, per *Prop.* 12. *lib.* II. *Elem.*, est EGq = ECq + GCq + 2GCF. Addatur utrinque GCq & fiet EGq + GCq = ECq + 2GCq + 2GCF. Sed 2GCq + 2GCF est 2GC in GC + CF id est 2CGF. Ergo EGq + GCq = ECq + 2CGF. Q. E. D.

LEMMA II.

Tab. IX. Fig. 8. XXXVI. *In constructionis casu primo, ubi circulus PBE transit per punctum D, est EGq — GDq = 2CGF.*

Nam per *Lemma primum*, est EGq + GCq — ECq + 2CGF, & ablato utrinque GCq, fit EGq = ECq — GCq + 2CGF. Sed ECq — GCq idem est quod CDq — GCq, hoc est idem quod GDq. Ergo EGq = GDq + 2CGF, & subducto utrobique GDq, fit EGq — GDq = 2CGF. Q. E. D.

LEM-

LEMMA III.

XXXVII. *In constructionis casu secundo, ubi circulus PBE non transit per punctum D, est* $EGq + GDq = 2CGF$. Tab. X. Fig. 1.

Namque in *Lemmate primo* erat $EGq + GCq = ECq + 2CGF$. Aufer utrinque ECq & fiet $EGq + GCq - ECq = 2CGF$. Sed $GC = DH$ & $EC = CP = GH$: ergo $GCq - ECq = DHq - GHq = GDq$, atque adeo $EGq + GDq = 2CGF$. Q. E. D.

LEMMA IV.

XXXVIII. *Est* $2CGF$ *in* $GY = 2CG$ *in* AGE.

Namque, ob similia triangula GEF, GYA, est GF ad GE ut AG ad GY; hoc est (per *Prop.* I. *lib.* VI. *Elem.*) ut $2CG.AG$ ad $2CG.GY$. Ducantur extrema & media in se, & fiet $2CG.GY.GF = 2CG.AG.GE$. Q. E. D.

XXXIX. *Tandem ope horum Lemmatum constructio Problematis sic demonstratur.*

In casu *primo* est (per *Lem.* 2.) $EGq - GDq = 2CGF$, & ductis omnibus in GY fit $EGq.GY - GDq.GY = 2CGF.GY$ (hoc est per *Lem.* 4.) $= 2CG.AGE$. Pro GY scribe $EG + EY$, & fiet Tab. IX. Fig. 8.

$$EG\,cub. + EY.EGq - GDq.EG - GDq.EY = 2CGA.EG, \text{ seu}$$

$$EG\,cub. + EY.EGq \begin{matrix} -GDq \\ -2CGA \end{matrix}.EG - GDq.EY = 0.$$

XL. In casu *secundo* est (per *Lem.* 3.) $EGq + GDq = 2CGF$, & ductis omnibus in GY fit $EGq.GY + GDq.GY = 2CGF.GY$ (hoc est per *Lem* 4.) $= 2CG.AGE$. Pro GY scribe $EG + EY$, & fiet Tab. X. Fig. 1.

$$EG\,cub. + EY.EGq + GDq.EG + GDq.EY = 2CGA.EG, \text{ seu}$$

$$EG\,cub. + EY.EGq \begin{matrix} +GDq \\ -2CGA \end{matrix}.EG + GDq.EY = 0.$$

Jam vero erat EG radix æquationis constructæ dicta x; item $GD = \sqrt{\frac{r}{p}}$; $EY = p$; $2CG = n$; & $GA = -\frac{q}{n} - \frac{r}{np}$; id est in casu primo ubi terminorum p & r diversa sunt signa: at in casu secundo ubi alterutrius p vel r mutatur signum fiet, $-\frac{q}{n} + \frac{r}{np} = GA$. Scribantur igitur pro EG; GD; EY; 2CG; & GA; quantitates x; $\sqrt{\frac{r}{p}}$; p; n; & $-\frac{q}{n} \mp \frac{r}{np}$; & casu *primo* fiet

$$x^3 + px^2 \begin{matrix} -\frac{r}{p} \\ +q+\frac{r}{p} \end{matrix} x - r = 0, \text{ id est, } x^3 + pxx + qx - r = 0;$$

casu autem *secundo*

$$x^3 + px^2 \begin{array}{l} + \frac{r}{p} \\ + q - \frac{r}{p} \end{array} x + r = 0 \text{, id est, } x^3 + pxx + qx + r = 0.$$

Est igitur in utroque casu EG vera longitudo radicis x. Q. E. D.

XLI. Subdistinguitur autem casus uterque in casus plures particulares: Nimirum prior in hosce

$$x^3 + px^2 + qx - r = 0,\ x^3 + pxx - qx - r = 0,$$
$$x^3 - pxx + qx + r = 0,$$
$$x^3 - pxx - qx + r = 0,$$
$$x^3 + px^2 - r = 0, \ \& \ x^3 - pxx + r = 0;$$

posterior in hosce

$$x^3 + pxx + qx + r = 0,\ x^3 + pxx - qx + r = 0;$$
$$x^3 - pxx + qx - r = 0,\ x^3 - pxx - qx - r = 0;$$
$$x^3 + pxx + r = 0, \ \& \ x^3 - pxx - r = 0.$$

Quorum omnium demonstrationes verbis iisdem ac duorum jam demonstratorum, mutato tantum linearum situ, compinguntur.

Hæ sunt problematum constructiones præcipuæ per inscriptionem rectæ longitudine datæ inter circulum & rectam lineam positione datam, ea lege ut inscripta ad datum punctum convergat. Inscribitur autem talis recta ducendo *concboidem* veterum, cujus polus sit punctum illud ad quod recta inscribenda debet convergere, regula seu asymptotos recta altera positione data, & intervallum longitudo rectæ inscribendæ. Secabit enim hæc conchoides circulum præfatum in puncto E, per quod recta inscribenda duci debet. Suffecerit vero in rebus practicis rectam illam inter circulum & alteram positione datam rectam ratione quacunque mechanica interponere.

XLII. In hisce autem constructionibus notandum est quod quantitas n, ubique indeterminata & ad arbitrium assumenda relinquitur, id adeo ut singulis problematis constructiones commodius aptentur. Hujus rei exempla in inventione duarum medie proportionalium, & anguli trisectione dabimus.

XLIII. *Inveniendæ sint inter a & b duæ mediæ proportionales x* & *y*. Quoniam sunt $a . x . y . b$ continue proportionales, erit aa ad xx ut x ad b, adeoque $x^3 = aab$, seu $x^3 - aab = 0$. Hic desunt æquationis termini p & q, & loco termini r habetur $- aab$. Igitur in constructionum formula prima, ubi recta EY ad datum punctum K convergens inseritur inter alias duas positione datas rectas EX & YC, & recta CX ponitur æqualis $\frac{r}{nn}$,

Tab. X. Fig. 2.

id

id est, æqualis $\frac{-aab}{nn}$, assumo n æqualem a, & sic fit CX æqualis $-b$. Unde talis emergit constructio.

Duco quamvis KA æqualem a, eamque biseco in C, centroque K, intervallo KC, describo circulum CX, ad quem apto rectam CX æqualem b, & inter rectas AX, CX infinite productas pono EY æqualem CA, & convergentem ad punctum K. Sic erunt KA, XY, KE, CX, continue proportionales, id est XY & KE duæ medie proportionales inter a & b. Constructio nota est.

In altera autem constructionum formula ubi recta EY ad datum punctum G convergens ponitur inter circulum GECX & rectam AK, estque Tab. IX. Fig. 7. $CX = \frac{r}{nn}$ id est (in hoc problemate) $= \frac{-aab}{nn}$, pono ut prius $n = a$, & sic fit $CX = b$, ceteraque peraguntur ut sequitur.

Duco rectam quamvis KA æqualem a, eamque biseco in C; & centro A, intervallo AK, descrido circulum KG ad quem apto rectam KG æqualem $2b$, constituendo triangulum æquicrurum AKG. Deinde per puncta C; K; G; circulum describo & inter hujus perimetrum & rectam productam AK inscribo rectam EY æqualem KC, & convergentem ad punctum G. Quo facto continue proportionales erunt AK; EC; KY; $\frac{1}{2}$KG; id est EC & KY duæ medie proportionales erunt inter datas a & b. Tab. X. Fig. 3.

XLIV. *Secandus jam sit angulus in partes tres æquales. Sitque angulus secandus ACB, partes ejus inveniendæ ACD; DCE; ECB.* Tab. X. Fig. 4.

Centro C, intervallo CA, describatur circulus ADEB secans rectas CA; CD; CE; CB; in A; D; E; B. Jungantur AD; DE; EB; ut & AB secans rectas CD; CE; in F; & H; & ipsi CE parallela agatur DG occurrens AB in G. Ob similia triangula CAD; ADF; DFG; continue proportionales sunt CA; AD; DF; FG. Ergo si dicatur $AC = a$; & $AD = x$; fiet $DF = \frac{xx}{a}$; & $FG = \frac{x^3}{aa}$. Est autem $AB = BH + HG + FA - GF = 3AD - GF = 3x - \frac{x^3}{aa}$. Dic $AB = b$; & fiet

$$b = 3x - \frac{x^3}{aa}, \text{ seu, } x^3 - 3aax + aab = 0.$$

Hic deest æquationis terminus secundus p, & loco q & r habentur $-3aa$ & aab. Ergo in constructionum formula prima ubi erat $p = 0$; $KA = n$; $KB = \frac{q}{n}$; & $CX = \frac{r}{nn}$; id est in problemate jam construendo, $KB = -\frac{3aa}{n}$; & $CX = \frac{aab}{nn}$; ut hæ quantitates evadant quam simplicissimæ, pono $n = a$, & sic fit $KB = -3a$; & $CX = b$. Unde talis emergit problematis *constructio.*

Tab. X. Fig. 5. Ago quamvis KA $= a$, & ad contrarias partes KB $= 3a$. Bisseco BA in C, centroque K, intervallo KC, describo circulum, cui inscribo rectam CX $= b$. Et acta recta AX, inter ipsam infinite productam & rectam CX, pono rectam EY æqualem AC, & convergentem ad punctum K. Sic fit XY $= x$. Quinetiam ob æquales circulos ADEB; CXA; & æquales subtensas AB; CX; nec non æquales subtensarum partes BH; XY; æquales erunt anguli ACB; CKX; ut & anguli BCH; XKY, atque adeo anguli CKX tertia pars erit angulus XKY. Dati igitur cujusvis anguli CKX pars tertia XKY invenietur, ponendo inter chordas CX; AX infinite productas rectam EY æqualem diametro AC; & convergentem ad circuli centrum K.

Fig. 4. & 5.

Hinc si a circuli centro K ad subtensam CX demittas perpendiculum KH, erit angulus HKY tertia pars anguli HKX, adeo ut si detur quilibet angulus HKX, inveniri possit ejus pars tertia HKY, demittendo a quolibet lateris utriusvis KX puncto X ad latus alterum KH perpendiculum XH, & lateri KH ducendo parallelam XE, dein rectam YE duplam ipsius KX, & convergentem ad punctum K ponendo inter rectas XH & XE.

Tab. X. Fig. 6. *Vel sic.* Detur angulus quilibet AXK. Ad latus alterutrum AX erigatur perpendiculum XH, & a lateris alterius XK puncto quovis K agatur recta KE cujus pars YE interjacens lateri AX producto, & ejus perpendiculo XH, sit dupla lateris XK, & erit angulus KEA tertia pars anguli dati AXK. Tum rursus erecto perpendiculo EZ, & acta KF cujus pars ZF inter EF & EZ sit dupla ipsius KE, fiet angulus KFA tertia pars anguli KEA, & sic pergitur per continuam anguli trisectionem in infinitum. Exstat autem hæc trisectio apud *Pappum*, *lib.* 4. *Prop* 32.

Tab. IX. Fig. 7. XLV. *Quod si angulum per alteram constructionum formulam, ubi recta inter aliam rectam & circulum ponenda est, trifariam dividere malueris:* Hic etiam erunt KB $= \frac{q}{n}$, & CX $= \frac{r}{nn}$, id est, in problemate de quo nunc agimus, KB $= \frac{-3aa}{n}$; & CX $= \frac{aab}{nn}$; adeoque ponendo $n = a$; fiet KB $= -3a$, & CX $= b$. Et inde talis emerget *constructio*.

Tab. X. Fig. 7. A puncto quovis K ducantur ad easdem partes rectæ duæ KA $= a$; & KB $= 3a$. Bisseca AB in C, centroque A, intervallo AC, describe circulum. In eo pone rectam CX $= b$. Junge AX, & junctam produc, donec ea iterum secet circulum jam descriptum in G. Tum inter hunc circulum & rectam KC infinite productam, pone rectam EY æqualem rectæ AC, & convergentem ad punctum G, & acta recta EC erit longitudo quæsita x, qua tertia pars anguli dati subtenditur.

Fig. 4. & 7. Talis constructio consequitur formulam superius allatam, quæ tamen sic evadet concinnior. Ob æquales circulos ADEB; & KXG, & æquales subtensas CX & AB, æquales sunt anguli CAX, sive KAG; & ACB, adeoque CE subtensa est tertiæ partis anguli KAG. Quare dato quovis angulo KAG, ut ejus inveniatur pars tertia CAE, pone inter circulum KGC, & anguli latus KA infinite productum rectam EY æqualem circuli semidiametro AG, & convergentem ad punctum G. Sic docuit *Archimedes* angulum

Lemma Archim. 8.

tri-

trifariam secare. Eædem constructiones facilius explicari possent quam hic factum est; sed in his volui ostendere quomodo ex generalibus problematum constructionibus superius expositis, constructiones simplicissimas particularium problematum derivare liceat.

XLVI. Præter constructiones hic expositas adjungere liceret quampluri- Tab. X. mas. *Ut si inter a & b inveniendæ essent duæ medie proportionales.* Age quam- Fig. 8. vis AK $= b$; & huic perpendicularem AB $= a$. Biseca AK in I, & in eadem AK, subtensæ BI æqualem pone AH; ut & in linea AB producta subtensæ BH æqualem AC. Tum in linea AK ad alteras partes puncti A cape AD cujusvis longitudinis, & huic æqualem DE, centrisque D & E, intervallis DB; EC; describe circulos duos BF, CG, & inter eos pone rectam FG æqualem rectæ AI, & convergentem ad punctum A, & erit AF prima duarum medie proportionalium quas invenire oportuit.

Docuerunt Veteres inventionem duarum medie proportionalium per *cissoidem*; sed lineæ hujus descriptionem commodam manualem nemo, quod scio, apposuit. Sit AG diameter & F centrum circuli ad quem *cissois* per- Tab. X. tinet. Ad punctum F erigatur normalis FD, eaque producatur in infini- Fig. 9. tum. Et producatur F G ad P, ut FP æqualis sit circuli diametro. Moveatur norma rectangula PED ea lege ut crus ejus EP perpetuo transeat per punctum P, & crus alterum ED circuli diametro AG seu FP æquale, termino suo D tangat semper lineam FD, & cruris hujus medium punctum C describet *cissoidem* desideratam GCK ut supra exposui. Quare si pag. 246. Tom. I. inter duas quasvis a & b inveniendæ sint duæ mediæ proportionales, cape AM $= a$, erige perpendiculum MN $= b$. Junge AN; & lege præfata moveatur norma PED, usque dum punctum ejus C incidat in rectam AN. Tum demisso ad AP perpendiculo CB, cape t ad BH, & v ad BG, ut est MN ad BC, & ob continue proportionales AB, BH, BG, BC erunt etiam continue proportionales a, t, v, b.

XLVII. *Simili normæ applicatione construi possunt etiam alia problemata solida. Verbi gratia* proponatur æquatio cubica

$$x^3 \pm pxx + qx - r = 0:$$

ubi q semper affirmativum sit, r negativum, & p signi utriusvis. Fac AG $= \frac{r}{q}$, eamque biseca in F, & cape FR & GL $= \frac{1}{2}p$, idque versus A si habeatur $+p$, aliter versus P. Erige insuper normalem FD, inque ea cape FQ $= \sqrt{q}$, huic etiam erige normalem QC. In normæ autem crure ED, cape ED & EC ipsis AG & AR æquales respective, & applicetur deinceps norma ad schema, sic ut punctum ejus D tangat rectam FD, & punctum C rectam QC, tum si compleatur parallelogrammum BQ; erit LB æquationis radix quæsita x.

XLVIII. Hactenus constructionem solidorum problematum per operationes, quarum praxis manualis maxime simplex est & expedita, exponere visum fuit. Sic Veteres postquam confectionem horum problematum per compositionem locorum solidorum assecuti fuerant, sentientes ejusmodi constru-

ctiones ob difficilem conicarum sectionum descriptionem inutiles esse, quærebant constructiones faciliores per conchoidem, cissoidem, extensionem filorum & figurarum adaptiones quascunque mechanicas: prælata mechanica utilitate inutili speculationi geometricæ, ut ex *Pappo* discimus, Sic magnus ille *Archimedes* trisectionem anguli per coni sectiones a superioribus geometris expositam neglexit, & in Lemmatis suis angulum modo a nobis superius exposito trifariam secare docuit. Si Veteres problemata per figuras ea tempestate in Geometriam non receptas construere maluerint, quanto magis præferendæ nunc sunt illæ figuræ, in Geometriam æque ac ipsæ coni sectiones a plerisque receptæ.

XLIX. Verum tamen novo huic Geometrarum generi haud assentior, qui figuras hasce omnes in Geometriam recipiunt. Eorum regula admittendi lineas omnes ad constructionem problematum eo ordine, quo æquationes, quibus lineæ illæ definiuntur, numero dimensionum ascendunt, arbitraria est, & in Geometria fundamentum non habet. Imo falsa est, propterea quod circulus hac lege eum coni sectionibus conjungendus esset, quem tamen Geometræ omnes cum linea recta conjungunt. Vacillante autem hac regula tollitur fundamentum admittendi certo ordine lineas omnes analyticas in Geometriam. In Geometriam planam, meo quidem judicio, lineæ nullæ, præter rectam & circulum, admitti debent; nisi forte linearum distinctio aliqua prius excogitetur, qua linea circularis conjungatur cum recta, & a reliquis omnibus segregetur. Quinimo ne tum quidem augenda est Geometria plana numero linearum. Nam, figuræ omnes sunt planæ quæ admittuntur in Geometriam planam, id est quas Geometræ postulent in plano describere. Et problema omne planum est, quod per figuras planas construi potest. Sic igitur admissis in Geometriam planam conicis sectionibus, aliisque magis compositis figuris, problemata omnia solida & plus quam solida, quæ per has figuras construi possunt, evadent plana. Sunt autem problemata omnia plana ejusdem ordinis. Linea recta analytice simplicior est quam circulus; hoc non obstante, problemata ejusdem sunt ordinis quæ per rectas solas, & quæ per circulos construuntur. Solis postulatis reducitur circulus ad eundem ordinem cum recta. Et multo magis ellipsis, quæ minus differt a circulo quam circulus a recta, postulando consimiliter descriptionem ejus in plano, reduceretur ad eundem ordinem cum circulo. Siquis speculando ellipsin, incideret in problema aliquod solidum, & ipsum beneficio ejusdem ellipseos & circuli construeret; hoc problema jam pro plano habendum esset, eo quod ellipsis jam ante in plano descripta haberi supponitur, & constructio omnis, quæ superest, absolvitur per circuli solius descriptionem. Eadem de causa problemata quævis plana per datam ellipsin construere licitum est. Verbi gratia si datæ ellipseos ADFG requireretur centrum O, ducerem parallelas duas AB; CD ellipsi occurrentes in A; B; C; D; aliasque duas EF; GH ellipsi occurrentes in E; F; G; H. Has bisecarem in I; K; L; M; & junctas IK; LM; producerem usque ad concursum suum in O. Legitima est hæc constructio plani problematis per ellipsin. Nil refert quod ellipsis analytice definiatur per æquationem duarum dimensionum. Nil quod ellipsis geometrice ge-

Tab. XI. Fig. 1.

generetur ſectione figuræ ſolidæ. Hypotheſis ſola, quod ellipſis jam deſcripta habetur in plano, problemata omnia ſolida per ipſam conſtructa reducit ad ordinem planorum, efficitque ut plana omnia per ipſam legitime conſtruantur. Et eadem eſt ratio poſtulati. Quod vi poſtulatorum fieri poteſt, ut jam factum & datum aſſumere conceſſum eſt. Poſtuletur igitur ellipſin in plano deſcribere, & ad ordinem planorum problematum reducentur ea omnia quæ per ellipſin conſtrui poſſunt, planaque omnia per ellipſin licebit conſtruere.

L. Neceſſe eſt igitur aut problemata plana & ſolida inter ſe confundi, aut lineas omnes rejici e Geometria plana, præter rectam & circulum, & ſiqua forſan alia detur aliquando in ſtatu conſtruendi alicujus problematis. Verum genera problematum confundi nemo certe permiſerit. Rejiciantur igitur e Geometria plana ſectiones conicæ, aliæque figuræ omnes, præter rectam & circulum, & quas contigerit in ſtatu problematum dari. Alienæ ſunt igitur a Geometria deſcriptiones illæ omnes conicarum ſectionum in plano, quibus hodierni Geometræ tantopere indulgent. Nec tamen ideo coni ſectiones e Geometria rejiciendæ erunt. Hæ in plano non deſcribuntur geometrice, generantur vero in ſolidi geometrici ſuperficie plana. Conus conſtituitur geometrice, & plano geometrico ſecatur. Tale coni ſegmentum figura geometrica eſt, eundemque habet locum in Geometria ſolida, ac ſegmentum circuli in plana; & hac ratione baſis ejus, quam coni ſectionem vocant, figura geometrica eſt. Locum igitur habet coni ſectio in Geometria, quatenus ea ſuperficies eſt ſolidi geometrici. Alia autem nulla ratione geometrice, quam ſolidi ſectione generatur, & ideo non niſi in Geometriam ſolidam antiquitus admiſſa fuit. Talis autem conicarum ſectionum generatio difficilis eſt, & in rebus practicis, quibus Geometria potiſſimum inſervire debet, prorſus inutilis. Ideo Veteres ſe ad varias figurarum in plano deſcriptiones mechanicas receperunt, & nos ad eorum exemplar conſtructiones præcedentes concinnavimus. Sunto conſtructiones illæ mechanicæ: ſic & conſtructiones per coni ſectiones in plano (ut jam moris eſt) deſcriptas mechanicæ ſunt. Sunto conſtructiones per datas coni ſectiones geometricæ: ſic & conſtructiones per alias quaſcunque figuras datas geometricæ ſunt, & ejuſdem ordinis cum conſtructionibus planorum problematum. Nulla ratione præferendæ ſunt in Geometria ſectiones conicæ figuris aliis, niſi quatenus illæ a ſectione coni, praxi ad ſolutionem problematum prorſus inutili, derivantur. Verum tamen ne conſtructiones per conicas ſectiones omnino prætercam, viſum fuit aliqua de his ſubjungere, in quibus etiam praxi manuali non incommode conſulatur.

LI. Conicarum ſectionum ſimpliciſſima eſt ellipſis. Hæc notior eſt, & circulo magis affinis, & praxi manuali facilius deſcribitur in plano. Parabolam præferunt plerique ob ſimplicitatem æquationis per quam ea exprimitur. Verum hac ratione parabola ipſo etiam circulo præferenda eſſet, contra quam fit. Falſa eſt igitur argumentatio a ſimplicitate æquationum. Æquationum ſpeculationi nimium indulgent hodierni Geometræ. Harum ſimplicitas eſt conſiderationis analyticæ. Nos in compoſitione verſamur, & compoſitioni leges dandæ non ſunt ex analyſi. Manuducit analyſis ad com-

po-

positionem: sed compositio non prius vere conficitur quam liberatur ab omni analysi. Insit compositioni vel minimum analyseos, & compositionem veram nondum assecutus es. Compositio in se perfecta est & a mixtura speculationum analyticarum abhorret. Pendet figurarum simplicitas a simplicitate geneseos & idearum, & æquatio non est sed descriptio (sive geometrica sive mechanica) qua figura generatur & redditur conceptu facilis. Ellipsi igitur primum locum tribuentes, docebimus jam quomodo æquationes per ipsam construere licet.

LII. *Proponatur æquatio quævis cubica*

$$x^3 = pxx + qx + r,$$

ubi p; q; & r datas terminorum æquationis coefficientes cum signis suis $+$ & $-$ *significant, & alteruter terminorum p & q, vel etiam uterque deesse potest.* Sic enim æquationum omnium cubicarum constructiones una illa operatione quæ sequitur, exhibebimus.

Tab. XI. Fig. 2. A puncto B in recta quavis data cape duas quascunque rectas BC, BE ad easdem partes; ut & inter ipsas mediam proportionalem BD. Et BC dicta n, cape etiam in eadem recta BA $= \frac{q}{n}$, idque versus punctum C si habeatur $-q$, aliter ad partes contrarias. Ad punctum A erige perpendiculum AI, inque eo cape AF æqualem p, FG æqualem AF; FI æqualem $\frac{r}{nn}$; & FH in ratione ad FI ut est BC ad BE. FH vero & FI capiendæ sunt ad partes puncti F versus G si termini p & r habent eadem signa, aliter ad partes versus A. Compleantur parallelogramma IACK & HAEL, centroque K, & intervallo KG describatur circulus. Tum in linea HL capiatur ad utramvis partem puncti H longitudo HR, quæ sit ad HL ut BD ad BE. Agatur GR secans EL in S, & moveatur linea GRS puncto ejus R super linea HL, & puncto S super linea EL incedente, donec tertium ejus punctum G describendo ellipsin, occurrat circulo, quemadmodum videre est in positione $\gamma\varrho\varsigma$. Nam dimidium perpendiculi γX ab occursus illius puncto γ in rectam AE demissi erit radix æquationis. Potest autem regulæ GRS vel $\gamma\varrho\varsigma$ terminus G vel γ, circulo in tot punctis occurrere quot sunt possibiles radices. Et e radicibus hæ sunt affirmativæ quæ cadunt ad eas partes rectæ AE ad quas recta FI ducitur a puncto F, & illæ negativæ quæ cadunt ad contrarias partes lineæ AE, si modo habeatur $+r$: & contra si habeatur $-r$.

Demonstratur autem hæc constructio subsidio *Lemmatum* sequentium.

LEMMA I.

LIII. *Positis quæ in superiore constructione, est* $2CAX - AXq = \gamma Xq - 2AI.\gamma X + 2AG.FI.$

Namque ex natura circuli est $K\gamma q - CXq$, æquale quadrato ex $\gamma X - AI$. Sed est $K\gamma q$ æquale $GIq + ACq$, & CXq æquale quadrato ex $AX - AC$, hoc

hoc est æquale $AXq - 2CAX + ACq$, atque adeo horum differentia $GIq + 2CAX - AXq$, æquatur quadrato ex $\gamma X - AI$, id est ipsi $\gamma Xq - 2AI \cdot \gamma X + AIq$. Auferatur utrinque GIq, & manebunt æqualia $2CAX - AXq$, & $\gamma Xq - 2AI \cdot \gamma X + AIq - GIq$. Verum AIq (per *Prop.* 4. *lib.* II. *Elem.*) æquale est $AGq + 2AGI + GIq$, atque adeo $AIq - GIq$ æquale est $AGq + 2AGI$, hoc est æquale $2AG$ in $\frac{1}{2} AG + GI$, seu æquale $2AG \cdot FI$, & proinde $2CAX - AXq$, æquale est $\gamma Xq - 2AI \cdot \gamma X + 2AG \cdot FI$. Q. E. D.

LEMMA II.

LIV. *Positis quæ in superiore constructione, est* $2EAX - AXq$ *æquale* $\frac{FI}{FH}$ $X\gamma q - \frac{2FI}{FH} AH \cdot X\gamma + 2AG \cdot FI$.

Notum est enim quod punctum γ motu regulæ $\gamma\varrho\varsigma$ superius assignato describit ellipsin, cujus centrum est L, & axes duo cum rectis LE & LH coincidunt, quorum qui in LE æquatur $2\gamma\varrho$ sive 2GR, & alter in LH æquatur $2\gamma\sigma$ sive 2GS. Et horum ratio ad invicem ea est quæ lineæ HR ad lineam HL, sive lineæ BD ad lineam BE. Unde latus transversum est ad latus rectum principale ut BE ad BC, sive ut FI ad FH. Quare cum γT ordinatim applicetur ad HL, erit ex natura ellipseos $GSq - LTq$ æquale $\frac{FI}{FH} T\gamma q$. Est autem LT æquale $AE - AX$, & $T\gamma$ æquale $X\gamma - AH$. Scribantur horum quadrata pro LTq & $T\gamma q$, & fiet $GSq - AEq + 2EAX - AXq = \frac{FI}{FH}$ in $X\gamma q - 2AH \cdot X\gamma + AHq$. Est autem $GSq - AEq$ æquale quadrato ex $GH + LS$, propterea quod GS hypotenusa est trianguli rectanguli cujus latera sunt ipsis AE & GH + LS æqualia. Est & (ob similia triangula RGH, RSL) LS ad GH ut LR ad HR, & componendo GH + LS ad GH ut HL ad HR, & duplicando rationes, quadratum ex GH + LS, est ad GHq ut HLq ad HRq, hoc est (per constructionem) ut BEq ad BDq, id est ut BE ad BC, seu FI ad FH, adeoque quadratum ex GH + LS æquale est $\frac{FI}{FH} GHq$. Est itaque $GSq - AEq$ æquale $\frac{FI}{FH} GHq$, atque adeo $\frac{FI}{FH} GHq + 2EAX - AXq = \frac{FI}{FH}$ in $X\gamma q - 2AH \cdot X\gamma + AHq$. Auferatur utrinque $\frac{FI}{FH} GHq$, & restabit $2EAX - AXq = \frac{FI}{FH}$ in $X\gamma q - 2AH \cdot X\gamma + AHq - GHq$. Est autem $AH = AG + GH$, adeoque $AHq = AGq + 2AGH + GHq$ & subducto utrinque GHq, restat $AHq - GHq = AGq + 2AGH$, hoc est

est $= 2AG$ in $\frac{1}{2}AG + GH$, seu $= 2AG . FH$, atque adeo est $2EAX - AXq = \frac{FI}{FH}$ in $X\gamma q - 2AH . X\gamma + 2AG . FH$, id est, $= \frac{FI}{FH} X\gamma q - \frac{2FI}{FH} AH . X\gamma + 2AG . FI$. Q. E. D.

LEMMA III.

LV. *Iisdem positis est AX ad $X\gamma - AG$ ut $X\gamma$ ad $2BC$.*

Nam si de æqualibus in *Lemmate secundo* subducantur æqualia in *Lemmate primo*, restabunt æqualia $2CE . AX$ & $\frac{HI}{FH} X\gamma q - \frac{2FI}{FH} AH . X\gamma + 2AI . X\gamma$. Ducatur pars utraque in FH, & fiet $2FH . CE . AX$ æquale $HI . X\gamma q - 2FI . AH . X\gamma + 2AI . FH . X\gamma$. Est autem $AI = AH + HI$, adeoque $2FI . AH - 2FH . AI = 2FI . AH - 2FHA - 2FHI$. Sed $2FI . AH - 2FHA = 2AHI$; & $2AHI - 2FHI = 2HI . AF$. Ergo $2FI . AH - 2FH . AI = 2HI . AF$, adeoque $2FH . CE . AX = HI . X\gamma q - 2HI . AF . X\gamma$. Et inde HI ad FH ut $2CE . AX$ ad $X\gamma q - 2AF . X\gamma$. Sed, per constructionem, HI est ad FH ut CE ad BC, atque adeo ut $2CE . AX$ ad $2BC . AX$; & proinde $2BC . AX$ & $X\gamma q - 2AF . X\gamma$ (per *Prop. 9. lib. V. Elem.*) erunt æqualia. Æqualium vero rectangulorum proportionalia sunt latera, AX ad $X\gamma - 2AF$, id est ad $X\gamma - AG$ ut $X\gamma$ ad 2BC. Q. E. D.

LEMMA IV.

LVI. *Iisdem positis, est $2FI$ ad $AX - 2AB$ ut $X\gamma$ ad $2BC$.*

Nam de æqualibus in *Lemmate tertio*, nimirum $2BC . AX = X\gamma q - 2AF . X\gamma$, subducantur æqualia in *Lemmate primo*, & restabunt æqualia $-2AB . AX + AXq = 2FI . X\gamma - 2AG . FI$, hoc est AX in $AX - 2AB = 2FI$ in $X\gamma - AG$. Æqualium vero rectangulorum proportionalia sunt latera, 2FI ad $AX - 2AB$ ut AX ad $X\gamma - AG$, hoc est (per *Lemma tertium*) ut $X\gamma$ ad 2BC. Q. E. D.

LVII. *Præstratis his Lemmatibus, constructio problematis sic tandem demonstratur.*

Per *Lemma quartum* est $X\gamma$ ad 2BC ut 2FI ad $AX - 2AB$, hoc est (per *Prop. 1. lib. VI. Elem.*) ut $2BC . 2FI$ ad $2BC (AX - 2AB)$, seu ad $2BC . AX - 2BC . 2AB$. Sed per *Lemma tertium* est AX ad $X\gamma - 2AF$ ut $X\gamma$ ad 2BC, seu $2BC . AX = X\gamma q - 2AF . X\gamma$, adeoque $X\gamma$ est ad 2BC ut $2BC . 2FI$ ad $X\gamma q - 2AF . X\gamma - 2BC . 2AB$. Et, ductis extremis & mediis in se, fit $X\gamma$ *cub.* $- 2AF . X\gamma q - 4BC . AB . X\gamma = 8BCq . FI$. Addantur utrinque $2AF . X\gamma q + 4BC . AB . X\gamma$, & fiet $X\gamma$ *cub.* $= 2AF . X\gamma q + 4BC . AB . X\gamma + 8BCq . FI$. Erat autem in constructione de-

demonstranda, $\frac{1}{2}X\gamma$ radix æquationis dicta x; nec non $AF = p$; $BC = n$; $AB = \frac{q}{n}$; & $FI = \frac{r}{nn}$; adeoque $BC.AB = q$. Et $BCq.FI = r$. Quibus substitutis fiet $x^3 = px^2 + qx + r$. Q. E. D.

COROLLARIUM.

LVIII. Hinc si AF & AB ponantur nulla, per *Lemma* tertium & quartum, fiet 2FI ad AX ut AX ad $X\gamma$ & $X\gamma$ ad 2BC. Unde constat inventio duarum mediè proportionalium inter datas quaslibet FI & BC.

SCHOLIUM.

LIX. Hactenus æquationis cubicæ constructionem per ellipsin solummodo exposui: sed regula sua natura generalior est, sese ad omnes coni sectiones indifferentèr extendens. Nam si loco ellipseos velis hyperbolam adhiberi, cape lineas BC, BE ad contrarias partes puncti B, dein puncta A; F; G; I; H; K; L; & R; determinentur ut ante, excepto tantum quod FH debet sumi ad partes ipsius F contra I, & quod HR non in linea HL, sed in linea AI ad utramque partem puncti H capi debet, & vice rectæ GRS duæ aliæ rectæ a puncto L ad puncta duo R; & R hinc inde duci pro asymptotis hyperbolæ. Cum istis itaque asymtotis LR; LR describe hyperbolam per punctum G, ut & circulum centro K, intervallo KG; & dimidia perpendiculorum ab eorum intersectionibus ad rectam AE demissorum erunt radices æquationis propositæ. Quæ omnia, signis + & — probe mutatis, demonstrantur ut prius.

LX. Quod si parabolam velis adhiberi, abibit punctum E in infinitum, atque adeo nullibi capiendum erit, & punctum H cum puncto F coincidet; eritque parabola circa axem HL cum latere recto principali BC per puncta G & A describenda, sito vertice ad partes puncti F ad quas punctum B situm est respectu puncti C.

LXI. Si sunt constructiones per parabolam, si simplicitatem analyticam spectes, simplicissimæ omnium, eæ per hyperbolam proximum locum obtinent, & ultimum locum tenent quæ per ellipsin absolvuntur. Quod si praxeos manualis in describendis figuris spectetur simplicitas, mutandus est ordo.

LXII. In hisce autem constructionibus observandum venit quod proportione lateris recti principalis ad latus transversum determinatur species ellipseos & hyperbolæ, & proportio illa eadem est quæ linearum BC & BE, atque atque adeo assumi potest. Parabolæ vero species est unica, quam artifex ponendo BE infinite longam assequitur. Sic igitur penes artificem est æquationem quamcunque cubicam per conicam sectionem imperatæ speciei construere. A figuris autem specie datis ad figuras magnitudine datas devenietur augendo vel diminuendo in ratione data lineas omnes quibus figuræ specie dabantur, atque ita æquationes omnes cubicas per datam

tam quamvis conicam sectionem construere licebit. Id quod sic plenius explico.

LXIII. *Proponatur æquationem quamcunque cubicam*

$$x^3 = pxx.\ qx.\ r,$$

ope datæ cujuscunque sectionis conicæ construere.

Tab. XI. Fig. 3. 4. A puncto quovis B in recta quavis infinita BCE, cape duas quascunque longitudines BC; BE ad easdem partes si data coni sectio sit ellipsis, ad contrarias si ea sit hyperbola. Sit autem BC ad BE ut datæ sectionis latus rectum principale ad latus transversum, & BC nominata n. Cape BA $= \frac{q}{n}$, idque versus C si habeatur $-q$, aliter ad partes contrarias. Ad punctum A erige perpendiculum AI, inque eo cape AF æqualem p, & FG æqualem AF; item FI æqualem $\frac{r}{nn}$. Capiatur vero FI versus G si termini p & r habent eadem signa, aliter versus A. Dein fac ut sit FH ad FI ut BC ad BE, & hanc FH cape a puncto F versus I si sectio sit ellipsis, aut ad partes contrarias si ea sit hyperbola. Porro compleantur parallelogramma IACK & HAEL, & hæ omnes jam descriptæ lineæ transferantur ad datam sectionem conicam, aut quod perinde est, his superponatur curva, ita ut axis ejus, sive transversa diameter principalis, conveniat cum recta LH & centrum cum puncto L. His ita constitutis agatur recta KL, ut & recta GL secans conicam sectionem in g. In LK cape Lk quæ sit ad LK ut Lg ad LG, centroque k & intervallo kg describe circulum. A punctis ubi hic secuerit curvam impositam demitte perpendicula ad lineam LH, cujusmodi sit γT. Denique versus γ, cape TY quæ sit ad Tγ ut LG ad Lg, & hæc TY producta secet rectam AB in X, eritque recta $\frac{1}{2}$XY una ex radicibus æquationis. Sunt autem radices affirmativæ quæ jacent ad partes rectæ AB ad quas recta FI jacet a puncto F, & negativæ quæ jacent ad contrarias partes si modo habeatur $+r$, & contra si $-r$ obvenerit.

LXIV. Hoc modo construuntur æquationes cubicæ per ellipses & hyperbolas datas. Quod si detur parabola, capienda est BC æqualis lateri recto ipsius. Dein punctis A, F, G, I & K inventis ut ante, centro K intervallo KG describendus est circulus, & parabola ita applicanda ad schema jam descriptum (aut schema ad parabolam) ut ipsa transeat per puncta A & G, & axis ejus ipsi AC parallelus per punctum F, cadente vertice ad partes puncti illius F ad quas punctum B cadit a puncto C. His ita constitutis, si perpendicula ab ejus occursibus cum circulo demittantur ad lineam BC, eorum dimidia erunt radices æquationis construendæ.

LXV. Et notes quod ubi secundus æquationis terminus deest, & latus rectum parabolæ ponitur numerus binarius, hæc constructio evadet eadem cum illa quam Cartesius attulit in Geometria sua, præterquam quod lineamenta hic sunt illorum duplicia.

Hæc

Hæc eſt conſtructionum regula generalis. Verum ubi problemata particularia proponuntur, conſulendum eſt conſtructionum formulis ſimpliciſſimis. Libera enim manet quantitas n, cujus aſſumptione cônſtructio plerumque ſimplicior reddi poteſt. Ejus rei exemplum unum ſubjungo.

LXVI Detur ellipſis, & inter datas lineas a & b inveniendæ ſint duæ mediæ proportionales. Sit earum prima x, & $a. x. \frac{xx}{a}. b$ erunt continue proportionales, adeoque $ab = \frac{x^3}{a}$, ſeu $x^3 = aab$ æquatio eſt quam conſtruere oportet. Hic deſunt termini p, & q, & terminus r eſt aab, adeoque BA & AF nullæ ſunt, & FI eſt $\frac{aab}{nn}$. Ut terminus noviſſimus evadat ſimplicior aſſumatur $n = a$, & fiet FI $= b$. Deinde conſtructio ita ſe habebit.

A puncto quovis A in recta quavis infinita AE cape AC $= a$, & ad eaſdem partes puncti A cape AC ad AE ut eſt ellipſeos latus rectum principale ad latus tranſverſum. Tum in perpendiculo AI cape AI $= b$, & AH ad AI ut eſt AC ad AE. Compleantur parallelogramma IACK, HAEL. Jungantur LA, LK. Huic ſchemati imponatur ellipſis data. Secet ea rectam AE in puncto g. Fiat Lk ad LK ut Lg ad LA. Centro k intervallo kg deſcribatur circulus ſecans ellipſin in γ. Ad AE demittatur perpendiculum γX ſecans HL in T, & producatur id ad Y ut ſit TY ad Tγ ſicut LA ad Lg. Sic fiet $\frac{1}{2}$XY prima duarum mediæ proportionalium x. Q.E.I. Tab. XL. Fig. 5.

COMMENTARIUS

AD

AUCTORIS APPENDICEM

De æquationum constructione lineari.

1. Problema, quod per æquationem solvitur, est aut *geometricum*, aut *arithmeticum*; id est vel quæritur quomodo determinari debeat situs puncti; positio & magnitudo rectæ, &c., problema solventis; vel quæritur numerus qui problemati respondeat. (Vide N.os 16..19. pag. 154. Tomi I.).

Ad arithmeticam pertinent problem. I. pag. 155. II. pag. 156. XI. pag. 171. Tomi I. Reliqua per se *geometrica* sunt; sed fieri possunt *arithmetica*, si *data* fuerint per numeros determinata.

Sed exemplum luculentum desumemus ab anguli trisectione. Æquationem pro hoc problemate jam invenit noster, ut monuimus, probl. geom. XXIX. pag. 236. Tomi I. & alio pacto reperit N°. XLIV. hujus Appendicis pag. 251. nempe, dicto radio $= a$; subtensa arcus trisecandi $= b$; & quæsita subsensa tertiæ partis $= x$,

$$x^3 - 3aax + aab = 0$$

Hoc problema geometricum est, si detur circulus & arcus geometrice; arithmeticum si per numeros detur radius circuli & subtensa arcus trisecandi, atque horum ratio; quod, ex. gr., sit $b = \frac{2a}{3}$; unde pro a poni possit unitas, & æquatio fieret

$$x^3 - 3x + \frac{2}{3} = 0.$$

2. Problemata revocari possunt ad arithmeticam quando datorum ratio numerica aut data est aut potest inveniri.

3. Sed problemata geometrica complectuntur ea, quæ ad arithmeticam revocari possunt, & ea quæ non possunt, sive quia datorum ratio numerica non est, quando nempe ea sunt incommensurabilia, ut si in exemplo, esset

$b =$

$b = a\sqrt{3}$, vel ratio cognosci nequit, ut si esset subtensa arcus trisecandi tertia proportionalis post peripheriam & diametrum, sive quia ratio cognosci quidem potest, tamen nota non est.

4. Problemata geometrica necessario constructionem flagitant, ut dici possint soluta.

5. Problemata arithmetica aut habent æquationem cujus radices accurate determinari possunt, aut secus. Ad primum genus pertinent omnes æquationes, quarum radices sunt commensurabiles, & quæ determinari possunt vel per radicis extractionem, vel per inventionem Divisorum, vel per quamlibet aliam methodum. Ad secundum pertinent non tantum æquationes, quarum radices inveniri nequeunt, sed etiam illæ, quarum radices sunt incommensurabiles. Quænam enim est utilitas quantitatum surdarum in scientiis practicis? Quærit, ex. gr. s'Gravesande (Phys. Elem. math. lib. I. Cap. XXI. Scholio III. pag. 142. Tom. I. Edit. 1742.) minimam actionem totalem in mechanicis, & venit ad æquationem

$$xx + \frac{bx - b}{2} = 0,$$

in ea sit $b = 6$: erit

$$xx = -3x + 3;\ x = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{21}.$$

Profecto nihil adhuc scimus, quia nota non est $\sqrt{21}$.

6. Tunc oportet ut æquatio solvatur per *approximationem*, id est, ut valor quantitatis quæsitæ vero proximus ita determinetur, ut error negligi possit. *Hic præcipua difficultas est in figuris duabus vel tribus prioribus obtinendis*, ut monet noster N°. I. pag. 237. hujus; id est in valore investigando, non quidem satis accurato, sed qui facile corrigi possit & aptus reddi ad usum. Hujusmodi est 4 in $\sqrt{21}$, qui facile corrigitur per arithmeticam decimalem, addendo nempe aliquot 0, numero pari, ipsi 21, & extrahendo radicem satis accuratam pro re nata.

7. Sed sæpe sæpius res est magis ardua. Tunc primæ figuræ determinantur, vel per conjecturam, ut HALLEJUS Addit. pag. 9. in exemplo, primum valorem quæsitæ z ponit 10, quartam radicem ultimi termini 10000; vel per *limites*; vel alio quovis pacto; sed aut primæ figuræ nimis absunt a vero, nec sine multis laboribus & ambagibus corrigi possunt; aut non sine multis laboribus & ambagibus primæ figuræ satis vero proximæ deteguntur. Vitantur hæc incommoda *per constructionem aliquam*, *seu geometricam*, *seu mechanicam* (N°. I. pag. 237. hujus), quæ determinatas præbet rectas radicibus æquationis solvendæ respondentes; hæ aptantur scalæ geometricæ, id est rectæ divisæ in magnum partium perexiguarum numerum; ita radicum valor numericus vero proximus facile extunditur.

8. Facile, inquam, nempe considerando constructionem ut jam peractam; atque

atque ideo a difficultatum censu excludendo ipsam difficultatem constructionis. Sed & hæc est consideranda, quando non sufficit figuram habere pro descripta, quin figura est actu describenda. Dum enim ea describitur, insumitur tempus & opera, quæ frustra perduntur quando idem vel breviore tempore vel opera minore poterat obtineri, & præterea, quod pejus est, augentur errores, quos nunquam manus & oculus vitare omnino possunt, saltem ob instrumentorum vitia. Ideo totum constructionum negotium videtur in duos casus distribuendum: aut enim quæritur demonstratio theorematis, & lineæ ducendæ sunt quæ demonstrationem suppeditent, id est instituenda est *præparatio* ad demonstrationem, ut loqui solent; aut quæritur solutio problematis, nempe regula qua propositum sive *geometrice* perficiatur, sive quæsitum *arithmetice* determinetur, id est proprie *constructio* est peragenda.

9. Quod pertinet ad demonstrationem *propositionis*, recte Veteres voluerunt ut ne adhiberentur problemata nondum soluta. Ideo EUCLIDES statim ponit tria problemata, quibus opus habet ad præparationem demonstrationis propos. 5. lib. 1., quam male nonnulli recentiores demonstrant bisecando angulum quem duo latera æqualia constituunt; nondum enim tiro scit angulum bisecare: ideo etiam per tota elementa prudentissimus auctor theorematis ea miscet problemata, quibus usurus est. Sed quia præparatio non est necessario peragenda, quin potius sufficit si peracta concipiatur, dum ipsa demonstratio est intelligenda, & tota mente comprehendenda, ea videtur eligenda præparatio, quæ faciliorem suppeditat demonstrationem; ita ut non eo melior existimanda videatur præparatio, quo simplicior & facilior est, sed quo brevior est & facilior demonstratio, cui locum dat; quia nempe in theoremate præcipuum locum occupat demonstratio, præparatio autem accessoria est, & demonstrationi inserviens.

Fortasse sufficeret, si geometra figurarum naturam & proprietates considerans, ea enumeraret, quæ possunt effici, & eadem conciperet, vel facta poneret in præparatione; velut rectæ, & circuli naturam expendens EUCLIDES pronunciat, vel petit rectam per duo puncta duci, & ad arbitrium semper produci posse; ac circulum describi quovis centro & intervallo. Ubi est observandum, contra falsam sententiam nonnullorum recentiorum, quin & veterum, docente PROCLO lib. 3. in primum Eucl. Elem lib. ad probl. 2., postulatum hoc necessario requirere ut centrum sit ipsum alterum dati intervalli extremum. Sed ad rem. Eodem pacto in *Datorum* libro considerans EUCLIDES nonnulla dari & determinari ab eo, qui problema proponit, quæ *data per conventionem* dici possunt; hinc nonnulla necessario data esse & determinata, quia nempe cum datis *per conventionem* necessariam habent relationem, & quæ data *per consequens* appellari possunt, quænam ea essent demonstravit in *Datorum* libro, non tamen in illo libro ostendit quomodo revera & actu determinari possent, quod effecisse videtur in deperdito *Porismatum* libro. Ad hunc restituendum non pauca colligere cœperam, sed cum audivissem virum doctissimum *Robertum* SIMSONUM rem perfecisse, & sua scripta reliquisse, ab incepto destiti, sperans & rogans ut tanti viri cogitationes in publicam lucem emittantur. Si igitur, sine erro-

erroris timore, enumerarentur quæ fieri possunt, ea liceret in *præparatione* tanquam facta considerare, & tunc bona esset demonstratio prop. 5. lib. 1. Eucl.; quam afferunt recentiores per suppositam anguli bisectionem, quod pertinet ad angulos intra triangulum; non quod ad angulos extra triangulum, quorum tamen æqualitate eget casus unus prop. 7. lib. 1.

10. Contra in problematis, præcipuus locus est *constructionis*; constructio quæritur, & actu est peragenda; accedit demonstratio quæ eo tendit ut ostendat regulam esse certam; ideo ea præferenda est constructio quæ simplicior est & facilior, non quæ faciliorem demonstrationem suppeditat.

11. Quænam vero est constructio simplicior & facilior? Hic considerandum puto *primo* linearum describendarum naturam, *secundo* numerum. Linea, quæ facilius actu describitur, præferenda est illi, quæ difficilius describitur; est enim *descriptionis facilitas, quæ lineam ad constructiones problematum prius admittendam esse indicat*, ut optime noster N°. III. pag. 237. hujus. Facilitate descriptionis eminent linea *recta* & *circulus*; ideo has jure præferunt Geometræ, & *geometrica* dumtaxat appellant problemata quæ rectis & circulis construuntur. Sunt quidem qui ajunt lineam rectam geometrice non describi, sed mechanice descriptam esse in *regula*, secundum quam ducitur; eodem pacto describi posse lineam quamvis, si nempe ligneus asserculus aut lamina e metallo in lineæ describendæ figuram circumcidatur. Sed primo, eadem regula, quantumvis brevi, linea recta duci potest quamtumvis longa; eodem typo non quanta libet curva describi potest. Secundo facile fabri lineam rectam describunt dum regulas conficiunt; difficile reliquas curvas. Siquis vero eas satis accurate descriptas habeat, uti potest ad primas figuras arithmeticas extundendas.

13. Post lineam rectam & circulum facillime describi potest *conchois*, de qua satis, nisi fallor, pag. 250. 251. Tom. I. ad prob. XXXIV. geometricorum, quod recte observat Auctor N°. III. pag. 238. hujus. Reliquæ curvæ, ipsæ quoque sectiones conicæ, difficile describi possunt, desunt enim instrumenta satis accurata, & siquis eas per plura puncta delineare velit, expertus discet rem esse operosam, arduam, & multis erroribus obnoxiam.

14. Quidquid sit, NEWTONUS videtur inter lineas, quæ non difficile describuntur, annumerare *Trochoidem* vel *Cycloidem* (N°. III. pag. 238. hujus), cujus descriptio & proprietates habentur pluribus in locis, sed præsertim apud HUGENIUM de *horologio oscillatorio*, qui mira elegantia hoc argumentum pertractavit. Sed an hæc linea per motum continuum, circuli nempe rotatione, facile & accurate describi possit, dubito. Saltem s'GRAVESANDIUS monet magis commodum esse per puncta ipsam delineare (Phys. Elem. mathem. lib. I. Cap. XX. Schol. 2. pag. 122. Edit. 1742.); quæ tamen descriptio & operosa est & multis erroribus obnoxia. Quomodo vero per eam datus arcus circuli in datam rationem secetur, facile patet ex hujus curvæ natura, neque hic locus est explicandi.

Locus PAPPI, de quo noster initio N^i. II. pag. 237. hujus, est Collect. mathem. lib. 3. post theor. 4. prop. 4; & lib. 4. post. Probl. 7. prop. 30. In eodem libro 4. post propos. 22. tradit PAPPUS ortum *conchoidis*, & propos. 23.

23. quomodo inter crura dati anguli ponatur recta magnitudine data, quæ producta transeat per datum punctum, quod est ipsum NEWTONI problema sub N°. V. pag. 239. hujus. Ibi docet COMMANDINUS eadem fusius pertractasse EUTOCIUM in commentariis in secundum librum ARCHIMEDIS de sphæra & cylindro.

15. Post linearum naturam numerus considerandus est; & quo hic minor est, eo melior est constructio, tum quia minori labore & breviore tempore perficitur, tum præsertim quia minuitur numerus errorum, quos nemo in manuali descriptione vitari potest.

His præmissis, docet Newtonus, quomodo æquationes trium dimensionum construantur per conchoidem, deinde per sectiones conicas.

16. Recentiores, fortasse Veteres sequuti, qui, ut infra docet NEWTONUS ipse, problemata solida per sectiones conicas prius solvere conabantur, deinde, sentientes ejusmodi constructiones ob difficilem conicarum sectionum descriptionem inutiles esse, quærebant constructiones faciliores; hos inquam secuti recentiores multa de problematibus solidis per sectiones conicas componendis tradiderunt. Nos autem lectorem ad eximias COLSONI (Addit. pag. 15.. 30.) & HALLEII (Addit. pag. 35..42.) differtationes huic libro subditas delegamus. Nonnulla tamen, quæ sese sponte obviam dabunt, adnotare non pigebit. Contra noster primum indicat solutionem faciliorem, deinde per sectiones conicas, incipiens a Lemmate, quod explicat per conchoidem N°. V. pag. 239. & per sectiones conicas N°. VI. pag. eadem hujus.

Statim patet Æquationem ad hyperbolam N°. VI. pag. 239. hujus, $by = ax - xy$, non sufficere ad problema solvendum; non enim omnes problematis leges involvit, & ea de re est indeterminata, cum natura problematis determinatam flagitet: igitur alia quærenda est.

Neque alia $cc = yy + xx - \frac{2dxy}{a}$ sola problema solvit, quia quantitatem b, problemati necessariam non complectitur, & hinc fit ut indeterminata sit.

Siquis cuperet æquationem determinatam, eruere deberet ex superiori æquatione valorem alterutrius x vel y, & in posteriore pro indeterminata illa substituere; qui, tamen labor evitari potest, si animadvertas, quod ex superiori æquatione, sunt quæsitæ x & y in certa hyperbola, ex posteriore autem in certa ellipsi, quæ duæ curvæ easdem habent coordinatas; sed hæ duæ æquationes jungendæ sunt ut problema solvatur, debent igitur x & y esse in punctis illis quæ simul sunt ad utramque curvam, id est in earum intersectionibus.

Assumpsimus locum æquationis postremæ esse ad ellipsim, quod facile patet extracta æquationis radice, ut supra docuimus & sæpe fecimus.

Hinc sequitur quod.

17. In problematibus determinatis necesse non est ad æquationem determinatam devenire, sed sufficit habere duas æquationes locales, quæ constructæ dent, locorum intersectionibus, radices quæsitas. Cavendum tunc est, ne sic incidamus in compositionem intricatiorem, quam quæ ex æquatione de-

determinata prodiisset. Ex. gr., si in aliquo problemate solvendo deventum esset ad has duas æquationes locales

$$y = \frac{cd - cx}{b};\ \&\ \frac{bbyy}{ff} = aa + xx,$$

illæ ostenderent construendas esse rectam pro prima, & hyperbolam pro secunda; attamen substituto valore y, æquatio fit

$$xx - \frac{2ccdx + ccdd - aaff}{cc - ff} = 0,$$

æquatio plana.

18. Æquatio quævis determinata resolvi potest in duas æquationes locales; siquidem, ut vidimus, ex duabus æquationibus localibus componi potest. Id quomodo fiat, infra videbimus. Quod autem pertinet ad eas, quas præ manibus habemus.

Quia circulus ellipsi simplicior est, ideo NEWTONUS optime ex datarum æquationum combinatione ellipsim in circulum mutavit.

19. Hic locus est animadvertendi quod duæ locales æquationes additione & subductione, ut res fert, ita jungi possunt, ut curva specie data obtineatur. En methodum.

Duc alteram ex datis æquationibus in assumptam fractionem $\frac{m}{n}$; aut aliam commodiorem pro re nata; adde duas has æquationes; & hinc, secundum data, erue valorem ipsius $\frac{m}{n}$.

Ex. gr., ducatur in $\frac{2m}{n}$ æquatio prior N^{i}. VI. pag. 239. hujus, id est

$$by = ax - xy;\ \text{fiet}\ \frac{2bmy}{n} = \frac{2amx - 2mxy}{n}$$

hanc adde posteriori ejusdem N^{i}., nempe

$$cc = yy + xx - \frac{2dxy}{a}$$

& invenies

$$cc + \frac{2bmy}{n} = yy + xx + \frac{2amx - 2mxy}{n} - \frac{2dxy}{a}$$

id est

 xx

$$xx = \frac{2dxy}{a} + \frac{2mxy}{n} - \frac{2amx}{n} - yy + \frac{2bmy}{n} + cc$$

aut

$$x = \frac{dy}{a} + \frac{my}{n} - \frac{am}{n} \pm \sqrt{(yy\,(\frac{d}{a} + \frac{m}{n})^2 - y^2 + \frac{2my}{n}(b - d - \frac{am}{n}) + cc + \frac{a^2m^2}{n^2})}$$

Esse debeat hæc æquatio ad parabolam; igitur omnes termini, in quibus est yy, debent evanescere (N°. 106. pag. 219. 220. Tomi I.) quare

$$(\frac{d}{a} + \frac{m}{n})^2 - 1 = 0;\ \&\ \frac{d}{a} + \frac{m}{n} = 1;\ \text{aut}\ \frac{m}{n} = \frac{a-d}{a};$$

& fiet æquatio

$$x = y - a + d \pm \sqrt{(ay\,(\frac{a-d}{a})\,(b-a) + cc + (a-d)^2)}.$$

Ad hoc exemplum determinari potest æquatio, ut sit ad ellipsim, vel ad hyperbolam, ponendo $\frac{d}{a} + \frac{m}{n}$ unitate minorem vel majorem: sed, cum in hac hypothesi maneat indeterminata quantitas $\frac{d}{a} + \frac{m}{n}$, ea determinanda est aliunde, puta, per datam rationem diametrorum.

Si vero æquatio debeat esse ad circulum; tunc

$$(\frac{d}{a} + \frac{m}{n})^2 - 1 = 1;\ \&\ \frac{d}{a} + \frac{m}{n} = 0;\ \text{ac}\ \frac{m}{n} = -\frac{d}{a}$$

id est æquatio prima multiplicari debet per $\frac{d}{a}$, & e posteriore subduci, quod fecit Auctor in fine N^i. VI. pag. 239. hujus.

Tab. IX. Fig. 1. 20 Pro constructione, noluit acutissimus Auctor quæsitam determinare in ipsa figura, quia angulus BAC ab indeterminatis factus necessario rectus non est; unde intricatior oriretur constructio, & circulus in ellipsim circa æquales diametros degeneraret. Suam vero compositionem NEWTONUS videtur invenisse methodis a nobis supra relatis. Nam extendente se y ex K in L, & x ex K in P, æquatio ad hyperbolam $by + xy = ax$, suppeditat per divisionem $y = a - \frac{ab}{x+b}$. Sume igitur KL æqualem AD $= a$; &, si ponas $y - a = u$; erit $u = -\frac{x+b}{x-b}$ & incipiet ab L; tendent autem

tem $-u$ ab L in R. Posterior hæc æquatio dat $ux+ub = -ab$, vel $ux = -ub-ab$, aut $x = -b-\frac{ab}{u}$; quapropter cape negativam KM parem (Fig. 1.) PD aut AE $= b$; & si $x+b = z$, erit $uz = -ab$; z autem se ipsæ extendunt ex M in P; ideo comple rectangulum KLNM, erunt LN, NM asymptoti, inter quas describenda est hyperbola, quæ quidem clauderetur angulo illo, qui ad verticem est ipsi LNM si uz esset quantitas positiva, quia vero negativa est, accipi debet ejus opposita, ut optime NEWTONUS (N°. VII. pag. 240. hujus.)

Pro circulo autem, æquatio inventa sic disposita

$$xx = 2dx+cc-yy-\frac{2dby}{a}$$

præbet

$$x = d \pm \sqrt{(dd+cc-yy-\frac{2dby}{a})}.$$

Ideo (Fig. 2.) cape KP æqualem AG $= d$ (Fig. 1.). Age (Fig. 2.) PT ipsi RS parallelam, & diameter erit in PT indefinite producta, centrum vero erit T. Nunc pone

$$x-d = u; \text{ erit } u = \sqrt{(dd+cc-yy-\frac{2dby}{a})},$$

ipsa ordinata, quæ in nihilum evanescit, quando circuli diameter a circulo secatur; jam

$$\sqrt{(dd+cc-yy-\frac{2bdy}{a})} = 0.$$

dat

$$yy = -\frac{2bdy}{a}+dd+cc, \ \& \ y = -\frac{bd}{a} \pm \sqrt{(\frac{ddbb}{aa}+dd+cc)}.$$

Est autem (in fig. 1.) DA (a). AG (d) :: EA ($=$ PD $= b$). AH $= \frac{db}{a}$. Cape igitur negativam KR æqualem AH, & comple rectangulum: denique ex KP abscinde KQ parem BC $= c$; & erit

$$RQ = RS = \sqrt{(\frac{ddbb}{aa}+cc)}, \text{ ac } TS = \sqrt{(\frac{ddbb}{aa}+cc+dd)}, \text{ radius.}$$

Demonstratio & determinatio casuum diversorum adeo facilis est iis, qui superiora bene perspecta jam habent, ut omittendas censeam.

Verba, quæ in fine N^i. IX. Italicis litteris scripta sunt, an Auctoris sint; an ab aliquo addita, non liquet Quomodo vero æquationes biquadraticas ad cubicas revocentur per CARTESII methodum tradidit noster N°. XVII. pag. 160. 161. hujus.

Quia mihi videor nonnullorum Lemmatum faciliorem demonstrationem invenisse, ea omnia repetam, simul & explicato, ac, ubi res tulerit, nova demonstratione firmabo.

LEMMA I. N°. XI. pag. 241. hujus.

21. *Posita præcedente constructione, proportionales sunt rectæ YX; AX; CX; KE.*

Nam similia sunt triangula ACX; AKF, unde

CA ad AK ut CX ad KF.

Præterea, in Fig. 3. 4., similia sunt triangula EXY; EKF; quapropter

XY ad YE ut FK ad KE.

Sed in Fig. 5., similia *primo* sunt triangula YX_1E; $_1EKF$; quare

X_1Y ad $_1Y_1E$ ut FK ad K_1E.

Secundo, similia sunt triangula $_2YX_2E$; FK_2E; ideo

X_2Y ad $_2Y_2E$ ut FK ad K_2E.

Tertio, similia sunt triangula $_3YX_3E$; FR_3E; quare

X_3Y ad $_3Y_3E$ ut FK ad K_3E.

Atqui æquales factæ sunt CA; YE; $_1Y_1E$; $_2Y_2E$; $_3Y_3E$. Ergo *ex æquo perturbate* &c.

LEMMA II. N°. XII. pag. 241. hujus.

22. *Iisdem positis, proportionales sunt ipsis YX; AR.* in Fig. 3. & 4); *YC & summa ipsarum AK; KE; &* in Fig. 5.); *$_3YC$ & summa AK; K_3E; atque C_1Y & excessus AK supra K_1E; & tandem C_2Y & excessus ipsius K_2E supra AK.*

Patet resumendo proportiones *Lemmatis* I., & addendo antecedentem antecedenti, ac consequentem consequenti, vel ex antecedente demendo antecedentem & ex consequente consequentem, ut in hujus enunciatione.

LEMMA III. N°. XIII. pag .241. hujus.

23. *Iisdem positis, erit YX* (in Fig. 3. & 4.) *media proportionalis inter excessum ipsius EK supra KB, & RA;* ac (in Fig. 5.) *X_1Y media proportionalis inter*

inter excessum ipsius BK supra K1E, & AK; & X2Y media proportionalis inter excessum ipsius BK supra K2E, & AK; tandem X3Y media proportionalis inter summam ipsarum BK, K3E & AK.

Perfice circulum CXcDx occurrentem rectæ YK (productæ quatenus Tab. Z. opus est,) in c & x, ac rectæ AK, (pariter productæ) in C & D. Angulus DCX est in majore segmento DxCX; ergo acutus est (Eucl. prop. 31. lib. 3) Quare, ducta ex centro K in YC perpendiculari KR, erit quadratum YK minus quam quadrata ex CK & CY, rectangulo bis contento sub YC; CR (Eucl. prop. 13. lib. 2.), vel rectangulo semel contento sub YC; CX (Eucl. prop. 3. lib. 3. & prop. 1. lib. 2.). Idem eadem de caussa verum est (*in Auct. Fig. 5.*) *K2YC; & K3YC.* Fig. 1. 2. 3. 4.

Sed (*in Auct. Fig. 5.*) angulus 1YCK obtusus est; ideo quadratum 1YK majus est quam quadrata KC & C1Y rectangulo semel contento sub 1YC; CX (Eucl. prop. 12. lib. 2; & prop. 3. lib. 3. ac 1. lib. 2.)

Quin, descripto toto circulo, statim patet esse rectangulum xYc excessum quadrati YK supra cK, vel CK quadratum; (Eucl. prop. 6. lib. 2.) rectangulum vero CYX excessum quadrati XC supra rectangulum YCX (Eucl. prop. 2. lib. 2.); id est, acta per centrum K in CY perpendiculari KR) supra duplum rectangulum YCR. Tab. Z. Fig. 1. & 2.

At (*in Fig. 3.*), in qua recta EKxY respondet rectæ 1EK1Y Fig. 5. Auctoris, manet rectangulum xYc excessus quadrati YK supra quadratum xK vel KC; rectangulum vero CYX est summa quadrati YC & rectanguli YCX (Eucl. prop. 3. lib. 2). Tab. Z. Fig. 3.

Denique (*in Fig. 4.*), inqua recta EcYK respondet rectæ 2E2YK Fig. 5. Auctoris, est rectangulum xYc excessus quadrati cK vel CK supra quadratum YK (Eucl. prop. 5. lib. 2); rectangulum vero CYX est excessus rectanguli YCX supra quadratum YC (Eucl. prop. 3. lib. 2). Tab. Z. Fig. 4.

Hinc facile deducitur reliqua demonstratio.

Sed, perfecto circulo, res ita facilius confici videtur. Jam (*Fig. 1. quæ est Auctoris 3.*) æquantur AC, YE, adde æquales CK, Kx & communem KE; & erit Yx æqualis AK, KE simul: sed, per Lemma II, est XY ad AK ut YC ad AK, KE simul, nempe, ad Yx; & per naturam circuli CY ad Yx ut cY ad YX; ergo cY ad YX ut YX ad AK. Tab. Z. Fig. 1.

Jam ex EK abscinde Kb parem KB, reliqua bc æquabit reliquam BC, nempe CA aut YE; quare, addita communi Ec erit Yc æqualis Eb aut excessui EK supra KB.

Sed (in Fig. 2. quæ est Auctoris 4.) est CB æqualis EY; adde æquales CK, Kc; atque EY, cK simul æquabunt KB aut ei parem Kb; deme hinc inde communes bY, cK, ac remanebit Yc æqualis Eb excessui EK supra KB. Tab. Z. Fig. 2.

At in casu primo (Fig. 5. Newtoniana, ea est 3. ex nostris) æquales sunt AC, YE; deme æquales CK, Kx; & AK æquabit KE, Yx simul: ergo Yx est excessus AK supra AE. Atqui, per Lemma II, est YX ad AK ut YC ad Yx; & per circuli naturam CY ad Yx ut cY ad YX; ergo cY ad YX ut XY ad AK. Tab. Z. Fig. 3.

Jam

Jam BK æquat YE & KC simul, id est, Y*c* & KE simul; quare Y*c* est excessus BK supra KE.

Tab. Z. Fig. 4. In casu secundo (Fig. 5. Newtoni, aut 4. ex his) æquales sunt AC, EY; quocirca excessus EY supra AK est CK vel K*x*; adde utrinque KY; & excessus EK supra KA erit Y*x*; est autem, per Lemma secundum, YX ad AK ut CY ad Y*x*, & per naturam circuli CY ad Y*x* ut *c*Y ad YX; ergo *c*Y ad YX ut YX ad AK.

Nunc BK æquat EY & *c*K simul, id est, KE & *c*Y simul, ideo *c*Y æquat excessum BK supra KE.

Tab. Z. Fig. 5. Denique in casu tertio (Fig. 5. Newtoniana, & 5. ex hisce nostris.) æquales sunt AC & EY; addita igitur KE, pares erunt AC, KE simul, & KY; &, demtis æqualibus CK, K*x*, erunt AK, KE simul æquales Y*x*; sed per Lemma secundum YX ad AK est ut CY ad Y*x*; & per circuli naturam, CY ad Y*x* ut *c*Y ad YX; ergo *c*Y ad YX ut YX ad AK.

Quoniam vero BC æquat YE; additis æqualibus CK, K*c* & communi KE; BK, KE simul æquabunt *c*Y.

Diversos casus, quibus determinandis immorari noluit NEWTONUS, evolvere videtur operæ pretium, quam in rem præmittam aliquot lemmata.

24. Quando punctum K est extra puncta A & B, una recta datæ longitudinis CA poni potest in angulo CXA, & una EY in angulo FXY, earum quæ transeunt per punctum K.

Tab. Z. Fig. 6. Nam, angulus XCK ostensus est acutus, quare obtusus est angulus ei deinceps XCA; & fortius angulus CAH; qui eo major est (Eucl. prop. 16. lib. 1.) Ergo, ducta quavis KH, quæ ipsi XC occurrat in G, & ipsi XA in H, erit HK major quam KA (Eucl. prop. 29. lib. 1.).

Jam per C agatur CI parallela ipsi AH & occurrens rectæ KH in I: cadet punctum I inter puncta G & H, nam angulus KCI æqualis angulo KAH (Eucl. prop. 29. lib. 1.) major est quam angulus KCG, qui æquat angulum XCA (Eucl. prop. 15. lib. 1.)

Est autem HI ad AC ut HK ad AK (Eucl. prop. 2. lib. 6.), quare HI, & fortius HG major est quam AC.

Si vero intra triangulum CXA ducatur quævis K*gh*, eodem pacto ostendetur *gh* minor quam CA.

Tab. Z. Fig. 7. Sed in Fig. 7.; Est angulus KCG obtusus & major angulo KAH quare ex A ducta AI parallela ipsi CG, demonstrabitur, ut supra, GH quidem major; *gh* vero minor quam AC. Et hæc quidem pro rectis, quæ ex K ducuntur intra angulum AXC.

Pro iis vero quæ ducuntur intra angulum YXE, angulus CYK demonstrabitur acutus per Fig. 1. & 2. hujus tabulæ, in quibus rectangulum ad R est triangulum KRY. Ideo in Fig. 6. 7. obtusus est angulus GYK, & in Fig. 6. major angulo YEX, vel HEK; & in Fig. 7. contra angulus HEK major est quam angulus EYX, vel GYK: unde redibit demonstratio superior.

Tab. Z. Fig. 1. 25. In angulo his deinceps nulla æqualis CA vel CB poni potest, quæ transeat per punctum K. Nam in Fig. 1., angulus hic est CXE, cujus latus

latus XE totum est extra circulum, & lateris XC sola pars XC est intra circulum. Quoniam rectæ CY; KY conveniunt in puncto Y; anguli YCK; CKY simul duobus rectis minores sunt. Ergo quævis ducta per K intra angulum CKY ipsi CY occurret inter puncta C & Y. Eadem de caussa recta AE occurret inter puncta A & E; quare, siqua ejus pars æquat ipsam CA, ea pars erit in angulo EXY. Ergo recta utrique EX; XC occurrens in angulo EXC, cadet intra angulum EKD, eique ad verticem CKx; atque ideo erit diametro major. Est autem AC vel CB semidiametro minor.

Quod autem pertinet ad Fig. 2., angulus de quo agitur, est AXY; & recta ducenda per K, & occurrens ipsis XY; YA, cadet intra angulos EKD & CKx; atque ideo extra circulum excurret saltem ad partes Y; nam ad alteram partem occurrere potest rectæ XA intra circulum, nempe inter puncta A & x; & semper erit radio major; quo minor esse debet. Tab. X. Fig. 2.

26. Sed quando æquatio construenda habet $+q$; ipsæ KA & KB sumi debent ad easdem partes (N°. X. pag. . hujus). Igitur hujus æquationis unam radicem præbebit constructio; atque hujusmodi æquatio unam tantum habet radicem realem.

27. Nulla recta æqualis ipsi CA cadere potest in angulo AXC præter CA (N°. 24. pag. 240. hujus). Ergo una radix erit XY; quæ negativa est, si æquatio habet $+r$, quia æquatio

$$x^3+qx+r=0$$

radices positivas non habet; eadem positiva erit si æquatio habet $-r$, quia æquatio

$$x^3+qx-r=0$$

habet unam radicem positivam, ut monet noster in fine N*i*. X. pag. 240. hujus.

28. Quando punctum K cadit inter puncta A & B, patet tres rectas poni posse per K æquales datæ CA, quæ radio major est, unam 1E1Y intra angulum CXE; alteram 2E2Y intra angulum CX2E; tertiam 3E3X intra angulum ad verticem AX3Y. Tab. IX. Fig. 5.

Hæ observationes non difficile aptantur ad reliqua ad N*um* LII. usque, ad quem transeo. Sed prius observo quod.

29. Æquatio $r-qx=x^3$, quæ habetur in fine N*i*. XIV. pag. 242. hujus, resolvitur in analogiam

$$\frac{r}{n}-\frac{qx}{n} \text{ ad } xx \text{ ut } x \text{ ad } n;$$

& ut duo primi termini evadant lineares, faciendum est x ad n ut $\frac{r}{nn}$ ad z; eritque

$$xz = \frac{r}{n}, \text{ \& } xz - \frac{qx}{n} \text{ ad } xx \text{ ut } x \text{ ad } n \text{ ut } z - \frac{q}{n} \text{ ad } x.$$

Prima analogia x ad n ut $\frac{r}{nn}$ determinatur primo Lemmate, & secunda tertio.

30. Quia vero r hic est quantitas positiva, scribi debet XY $= -x$, unde $\frac{r}{n} + \frac{qx}{n}$ ad xx ut $-x$ ad n; tunc autem esset $\frac{r}{n} = -xz$; nam $-x$ ad n ut $\frac{r}{nn}$ ad z; quapropter $-xz + \frac{qx}{n}$ ad xx ut $-x$ ad n; ac (dividendo primos duos terminos per $-x$) $z - \frac{q}{n}$ ad $-x$ ut $-x$ ad n, & $r + qx = -x^3$, aut $x^3 + qx + r = 0$.

31. Si vero haberetur $-r$, tunc XY esset quantitas positiva, & analogia esset $\frac{+r-qx}{n}$ ad xx ut x ad n, atque $+r-qx = x^3$, seu $x^3+qx-r=0$.

32. Quod si æquatio proposita esset $x^3 - qx - r = 0$, esset XY radix positiva $= +x$, & analogia fieret $\frac{r+qx}{n}$ ad xx ut x ad n ut $z + \frac{q}{n}$ ad x; & constructio fieri deberet ut in casu tertio, fig. 5. Auct. aut 5. nostra.

33. Si denique æquatio fuisset $x^3 - qx + r = 0$, haberemus $\frac{qx-r}{n}$ ad xx ut x ad n ut $\frac{q}{n} - z$ ad x, & constructio facienda esset ut in casu primo & secundo, fig. Auctoris, aut 3. 4. ex nostris.

Hoc ad exemplum, facile determinabuntur casus in reliquis formulis.

34. Obiter observo in N°. XXIII. pag. 244. hujus, facile demonstrari triangula ACX; AKG esse similia, & quia CA facta est æqualis CX, esse etiam KA æqualem AG, quod alio pacto demonstrat noster N°. XXV. pag. 245. hujus.

Nam, quia æquales sunt rectæ CA; AX, per constructionem, æquales sunt anguli KCX; CXG (Eucl. prop. 5. lib. 1.) Sed anguli KCX; XGK simul conficiunt duos rectos (Eucl. prop. 22. lib. 3.); atque ideo æquales sunt angulis CXG; GKC simul, qui pariter conficiunt duos rectos; & eadem de caussa æquales angulis KCX; XCA; & angulis CXG; CXA; ergo demptis æqualibus & communibus, æquales manent ACX; AKG; KGA; CXA.

Tandem venio ad N^{um} LII. Ibi docet Auctor descriptionem ellipsis, quæ quanquam explicata fuerit probl. XXXV. pag. pag. 251. Tomi I. tamen libet addere analysim geometriam, quæ perfacilis est.

Tab. 4. Fig. 2. 35. *Data magnitudine recta DE ita moveatur per rectas indefinitas IK, LM se ad rectum angulum intersecantes in C, ut datæ DE extremitas altera D semper*

sit

sit in recta LM, altera vero E semper in recta IK; quaeritur locus descriptus ab F puncto ipsius DE ita in F productae, ut EF data sit magnitudine.

ANALYSIS.

Ponatur prius punctumD esse in C, tunc punctum F erit in A; eritque AC aequalis toti FD. Moveatur nunc recta, servatis legibus propositis, ita ut punctum D progrediatur versus L, aliquando punctum E cadet in C; & tunc erit C*b* par ipsi EF. Feratur punctum E versus K, liquet punctum D descensurum versus C, ubi rursus incidet; & tunc erit C*a* aequalis toti DF aut CA. Descendat nunc punctum D versus M, regredietur punctum E versus C, ad quod aliquando deveniet; & tunc erit CB par datae EF vel C*b*. Eat denique punctum E versus I, ascendet punctum D versus C, ubi rursus cadet; & recta DF coïncidet iterum cum CA. Hinc patet puncta A, B, *a*, *b* futura ad locum quaesitum.

Nunc sit recta DF in locum quemlibet DEF, & ex F ipsi ML parallela agatur indefinita FN ipsi IC occurrens in G, atque ex D agatur DH parallela AC & occurrens FN in H. Est ergo quadratum DF ad quadratum FE ut DH quadratum ad quadratum GE, & ablato antecedente ab antecedente, & consequente a consequente, erit quadratum DF ad quadratum EE ut excessus quadrati DF supra DH quadratum ad excessum quadrati FE supra EG quadratum. Est autem FD quadratum aequale quadrato AC, & FE par CB; & excessus quadrati AC supra DH vel CG est rectangulum AG*a*, excessus vero quadrati FE supra EG quadratum est quadratum GF; ergo quadratum AC ad CB quadratum ut rectangulum AG*a* ad quadratum GF. Igitur locus est ellipsis, cujus major semiaxis tota DF, minor vero EF.

36. Ceterum fons, unde omnes constructiones dimanant, hic est.

Omnis aequatio trium dimensionum ad quatuor ascendet, si per incognitam cognita quavis auctam vel diminutam multiplicetur. Exempli gratia, aequatio cubica

$$x^3 + pxx + qx + r = 0$$

ducta in $x + a$ fit

$$x^4 \begin{matrix} +p \\ +a \end{matrix} x^3 \begin{matrix} +q \\ +ap \end{matrix} xx \begin{matrix} +r \\ +aq \end{matrix} x + ar = 0.$$

Quaevis aequatio quadrato-quadratica determinata fingi potest composita ex duabus quadraticis indeterminatis, quarum una sumi potest ad libitum, altera ex assumpta & proposita deducitur. Sic aequatio proposita

$$x^4 \begin{matrix} +p \\ +a \end{matrix} x^3 \begin{matrix} +q \\ +ap \end{matrix} xx \begin{matrix} +r \\ +aq \end{matrix} x + ar = 0$$

fingi potest composita ex hac ad arbitrium sumpta

$$\beta y = xx + \frac{px + ax}{2}$$

& ex alia quam facile reperiam ponendo hanc assumptam in proposita; quod sic fit: assumpta quadretur & erit

$$\beta\beta yy = x^4 \begin{matrix} +p \\ +a \end{matrix} x^3 + \begin{matrix} +\frac{pp}{4} \\ \frac{2ap}{4} \\ +\frac{aa}{4} \end{matrix} xx;$$

ergo

$$\beta\beta yy \begin{matrix} -\frac{pp}{4} \\ -\frac{2ap}{4} \\ -\frac{aa}{4} \end{matrix} xx = x^4 \begin{matrix} +p \\ +a \end{matrix} x^3,$$

quo valore posito in æquatione proposita, ea fit

$$\beta\beta yy \begin{matrix} -\frac{pp}{4} \\ +\frac{2ap}{4} \\ -\frac{aa}{4} \\ +q \end{matrix} xx \begin{matrix} +r \\ +aq \end{matrix} x + ar = 0;$$

quæ itidem quadratica est & indeterminata. Hujus rei ratio est, quod æquatio

$$\beta y = xx + \frac{px + ax}{2}$$

convenit infinito quantitatum numero, ideoque eas etiam quæ sub proposita continentur, complectitur. Altera vero complecti quidem debet infinitas quantitates, & propterea debet esse indeterminata; sed alia ad aliam ita referri debet, ut contineant ambæ junctæ quantitates tantum illas quas proposita continebat: quod fieri nequit nisi secunda a proposita deducatur.

37. Rem expedire potes, si sumas duas æquationes indeterminatas ad libitum, e quarum altera, primæ ope, alteram incognitam elimines; unde æquationem

tionem determinatam conficies, cujus terminos comparabis cum terminis propofitæ, & ita conftantes determinabis.

Affumpfi

$$\beta y = xx + \frac{px + ax}{2}, \text{ non } \beta y = xx \text{ aut } \beta y = xx + \varkappa x,$$

quia fic, quadrando ftatim obtineo duos primos propofitæ terminos, quos fimul ejicio. Si vero propofita fecundum terminum non haberet, aut eum manere præftaret, fufficeret ponere $\beta y = xx$ aut $\beta y = xx + \varkappa x$, ubi $\varkappa$ indicat quantitatem conftantem pro re nata determinandam.

38. Si quando æquatio cubica ad quadrato-quadraticam efferenda eft, præftat plerumque ita computum inftituere, ut quadrato-quadratica fecundo termino careat, quod facile fit, fi æquatio cubica ducatur in incognitam cognita fecundi termini propofitæ minutam, fi fecundus propofitæ terminus fit affirmativus; aut eadem auctam, fi fit negativus. Sic, in propofito exemplo, fi æquatio

$$x^3 + pxx + qx + r = 0 \text{ ducatur in } x - p,$$

habetur æquatio quadrato-quadratica

$$x^4 \begin{matrix} +q \\ -pp \end{matrix} xx \begin{matrix} +r \\ -pq \end{matrix} x - pr = 0.$$

Si vero propofita fecundo termino deftituta effet, fufficeret eam ducere in incognitam.

39. Sed jam propofita aut ultro aut per has artes fit quadrato-quadratica, animadvertendum eft ex affumpta & propofita plures haberi poffe æquationes, quarum duæ commodiores, ut res fert, funt feligendæ. Sic in fecunda ex inventis ponatur pro xx ejus valor $\beta y - \frac{px - ax}{2}$ in qxx, habebitur

$$\beta\beta yy + \beta qy \begin{matrix} +\frac{2ap}{4} \\ -\frac{pp}{4} \\ -\frac{aa}{4} \end{matrix} xx \begin{matrix} -\frac{qp}{2} \\ +r \\ -\frac{aq}{2} \end{matrix} x + ar = 0;$$

fi in $\left(\frac{2q + ap}{2}\right) xx$, fiet

$$\beta\beta yy \begin{array}{l} +\frac{2\beta q}{2} \\ +\frac{a\beta p}{2}\end{array} y \begin{array}{l} -\frac{pq}{2}\\ +\frac{aq}{2} \\ -\frac{app}{4}\\ -\frac{aap}{4}\\ +r\end{array} x \begin{array}{l}-\frac{pp}{4}\\ -\frac{aa}{4}\end{array} xx + ar = 0;$$

& sic de ceteris.

40. Quinimo & cuicumque ex his secundis addendo primam æquationem alteræ conficientur.

41. Æquatio fictitia est ad parabolam, & æquatio hinc exsurgens potest esse ad circulum, aut ellipsin. Si habeas parabolam datam, id est, cujus latus rectum datum sit $= b$, æquatio ad parabolam vertetur in hanc

$$by = xx + \frac{px + ax}{2}.$$

Construenda nunc sit æquatio proposita per datam hanc parabolam & circulum; patet æquationem secundam, si xx fractionibus liberetur, verti in hanc

$$xx = -\frac{(4r - 4aq)\,x - 4bbyy - 4ar}{4q + 2ap - pp - aa},$$

quæ numquam erit ad circulum, nisi coefficiens ipsius $-yy$ sit $= 1$; ergo

$$= \frac{4bb}{4q + 2ap - pp - aa}, \text{ aut } 4q + 2ap - pp - aa = 4bb,$$

hoc est,

$$aa = +2ap + 4q - pp - 4bb, \text{ \& } a = +p \pm \sqrt{(4q - 4bb)};$$

aut igitur q superat bb, aut ab eo superatur, aut ei æquatur. Si primum, duo sunt valores ipsius a ad arbitrium sumendi, & ideo duo circuli problema solventes; nam pone $\sqrt{(4q - 4bb)} = f$; erit æquatio ad parabolam

$$by = xx \pm \frac{fx}{2} + qx,$$

& æquatio ad circulum

xx

$$xx = -\frac{(4r - 4pq \mp 4fq)\,x}{4bb} - yy - \frac{4pr \mp 4fr}{4bb}.$$

Si ſecundum; res perfici non poſſet. Si tertium, unus circulus problema ſolveret.

42. Ceterum dum agimus de circulo, ſemper intelligendum eſt coordinatas eſſe ad rectos angulos.

43. Simili modo verti poſſet æquatio ſecunda in ellipſin ſpecie datam, ponendo

$$4bb \text{ ad } 4q + 2ap - pp - aa \text{ ut } m \text{ ad } n,$$

id eſt, in data diametrorum ratione; unde rurſus haberetur a, quæ tunc æquaret $p \pm \sqrt{(4q - \frac{4bbn}{m})}$: ubi eadem quæ ſupra notanda ſunt. Hyperbola autem nullo pacto poſſet obtineri: nam ſi curva eſſet hyperbola, terminus $\frac{-4bbyy}{4q + 2ap - pp - aa}$ deberet eſſe poſitivus, & idcirco diviſor negativus, igitur $4q + 2ap$ minor $pp + aa$, id eſt

$$4q + 2pp \pm 2p\sqrt{(4q - \frac{4bbn}{m})} \text{ minor quam}$$

$$pp + pp \pm 2p\sqrt{(4q - \frac{4bbn}{m})} + 4q - \frac{4bbn}{m},$$

vel o minor $-\frac{4bbn}{m}$, quod eſt abſurdum, ſiquidem omnis quantitas negativa minor eſt nihilo; ſeu, quod idem eſt, tunc

$$4q + 2ap - pp - aa = 4q + 2pp \pm 2p\sqrt{(4q - \frac{4bbn}{m})} - pp - pp \mp 2p\sqrt{(4q - \frac{4bbn}{n})} - 4q\,\frac{bbn}{m} = +\frac{bbn}{m}$$

deberet eſſe quantitas negativa, quod non eſt.

44. Sed ex æquatione aſſumpta & ex illa, quæ inde & ex propoſita exoritur, obtineri poſſunt, ut diximus, aliæ æquationes, quæ dant alos circulos & hyperbolam. Etenim æquatio

$$\beta\beta yy + \beta qy \begin{array}{l} + \frac{2ap}{4} - \frac{pq}{2} \\ - \frac{pp}{4} + r \\ - \frac{aa}{4} + \frac{aq}{2} \end{array} x - ar = 0$$

fit

fit quidem

$$xx = -\frac{(2pq+4r+2aq)\,x+4bbyy+4\beta qy-4ar}{aa-2ap+pp},$$

quæ nequit eſſe ad circulum neque ad ellipſin; quandoquidem ob

aa ad ap ut ap ad pp, eſt $aa+pp$ major quam $2ap$,

& quantitates $4bb$ ac $aa-2ap+pp$ ambæ poſitivæ, eſt autem ad hyperbolam, cujus ſpecies definitur ponendo $4bb$ ad $aa-2ap+pp$ datam habere rationem.

45. Sed, ſi ex illa ſubduceretur æquatio $bb\left(by-\frac{px-ax}{2}-xx\right)=0$,

haberetur

$$bbyy \begin{array}{l} +bq \\ -b^3 \end{array} y \begin{array}{l} +\frac{2ap}{4} \\ -\frac{pp}{4} \\ -\frac{aa}{4} \\ +bb \end{array} xx \begin{array}{l} -\frac{pq}{2} \\ +r \\ +\frac{aq}{2} \\ +\frac{bbp}{2} \\ +\frac{abb}{2} \end{array} x - ar = 0,$$

quæ verteretur in

$$xx = -\frac{(2pq+4r+2aq+2bbp+2abb)\,x+4bbyy+(4bq-4b^3)y-4ar}{aa-2ap+pp-4bb},$$

quæ eſſe poteſt ad circulum, ſi fiat

$$\frac{4bb}{aa-2ap+pp-4bb} = -1,$$

unde orietur

$aa-2ap+pp+4bb = 4bb$, unde $a = p$;

& ad aliam quamvis hyperbolam ſpecie datam, ſi fiat $aa-2ap+pp-4bb$ ad $4bb$ in data ratione; & denique ad ellipſim, ſi ponas

$aa-2ap+pp-4bb$ ad $-4bb$ in data ratione.

46. Nota quod in N^is. 41..45. pro $\beta\beta$ poſuimus bb, quia ipſam β datam finximus ob datam parabolam; in aliis vero hypotheſibus alius valor ipſius β adhibendus erit.

47.

47. Quoniam autem circulus ſimplicior eſt ſectionibus conicis, is ſemper adhibetur cum alia ſectione conica data ſaltem ſpecie. Ex. gr. detur ellipſis, cujus axes ſint c, b. Ad hanc ellipſin exponendam aſſumamus aliquam ex jam repertis æquationibus, quæ ad ellipſin eſſe poſſunt, puta

$$xx = -\frac{(4r - 4aq)\,x - 4\beta\beta yy - 4ar}{4q + 2ap - pp - aa},$$

debet ergo eſſe

$$\frac{4\beta\beta}{4q + 2ap - pp - aa} = \frac{bb}{cc}, \ \& \ \beta\beta = \frac{bb\gamma\gamma}{4cc}.$$

(ponendo brevitatis gratia $\gamma\gamma = 4q + 2ap - pp - aa$)

igitur altera æquatio quæ poteſt eſſe ad circulum, ubi

$$aa - 2ap + pp - 4\beta\beta = -4\beta\beta, \text{ nempe}$$

$$xx - \frac{(2pq + 4r + 2aq + 2\beta\beta q + 2a\beta\beta)\,x + 4\beta\beta yy + (4\beta q - 4\beta^3)\,y - 4ar}{aa - 2ap + pp - 4\beta\beta} = 0;$$

fiet primo

$$xx = + \frac{2pq - 4r - 2aq}{4\beta\beta} - 2q - 2a)\,x - yy - (\frac{q}{\beta} + \beta)\,y + \frac{ar}{\beta\beta};$$

ſed tunc $aa - 2ap + pp = 0$; ergo æquatio

$$\gamma\gamma = 4q + 2ap - pp - aa \text{ fit } \gamma\gamma = 4q \ \& \ \beta\beta = \frac{bbq}{cc},$$

quare æquatio ad ellipſim evadit

$$xx = -(\frac{r}{q} - p)\,x - \frac{bbyy}{cc} - \frac{pr}{q},$$

& æquatio ad circulum

$$xx = -(\frac{ccr}{bbq} - 2q - 2p)\,x - yy - (\frac{a\sqrt{q}}{b} + \frac{b\sqrt{q}}{a})\,y + \frac{ccpr}{bbq}:$$

quæ facile conſtrui poſſunt.

49. Quæ diximus de ellipſi data, facile aptantur tum ad ellipſim ſpecie datam, tum ad hyperbolam.

50. Hoc pacto fortaſſe invenit Newtonus rationem quam tradidit (N°. LII,

LII. pag. 110. hujus) construendæ æqutionis

$$x^3 = pxx + qx + r \text{, vel } x^3 - pxx - qx - r = 0,$$

aut certe hoc pacto potuit eam invenire. Nam æquationem illam duc in $x - p$ & habebis

$$x^4 - 2px^3 \begin{matrix} -q \\ +pp \end{matrix} xx \begin{matrix} -r \\ +pq \end{matrix} x + pr = 0.$$

Pone nunc

$$\frac{nu}{2} = xx - px - \frac{q - nn}{2};$$

erit, quadrando,

$$\frac{nnuu}{4} = x^4 - 2px^3 \begin{matrix} -q \\ -nn \\ +pp \end{matrix} xx \begin{matrix} +pq \\ +nnp \end{matrix} x + \begin{matrix} +\frac{qq}{4} \\ \frac{nnq}{2} \\ +\frac{n^4}{4} \end{matrix},$$

hoc est,

$$\frac{nnuu}{4} + nnxx - nnpx - \frac{qq - 2nnq - n^4}{4} = x^4 - 2px^3 \begin{matrix} -q \\ +pp \end{matrix} xx + pqx;$$

sed ex proposita æquatione est

$$x^4 - 2px^3 \begin{matrix} -q \\ +pp \end{matrix} xx + pqx = rx - pr;$$

ergo (dividendo per nn & multiplicando per 4)

$$uu + 4xx - 4px - \frac{qq}{nn} - 2q - nn = \frac{4rx - 4pr}{nn},$$

aut

$$uu = -4xx + 4px + \frac{4rx}{nn} + \frac{qq}{nn} + 2q + nn - \frac{4pr}{nn},$$

seu

$$u = \sqrt{(-4xx + 4px + \frac{4rx}{nn} + \frac{qq}{nn} + 2q + nn - \frac{4pr}{nn})},$$

æqua-

æquatio ad circulum, quod melius videbis si pro $2x$ scribas z; tunc enim erit

$$u = \sqrt{(-zz + 2pz + \frac{2rz}{nn} + \frac{qq}{nn} + 2q + nn - \frac{4pr}{nn})}.$$

Si ergo rectæ CE, CK ad angulos rectos sibi occurrant in C, & u ponantur tendere ex C in D, z vero ex C in K; transibit CK per circuli centrum. Quando autem $u = 0$, id est in ipsa CK est Tab. XI. Fig. 2.

$$\sqrt{(-zz + 2pz + \frac{2rz}{nn} + \frac{qq}{nn} + 2q + nn - \frac{4pr}{nn})} = 0,$$

id est,

$$zz = 2pz + \frac{2rz}{nn} + \frac{qq}{nn} + 2q + nn - \frac{4pr}{nn},$$

vel

$$z = p + \frac{r}{nn} \pm \sqrt{(\frac{qq}{nn} + 2q + nn - \frac{2pr}{nn} + pp + \frac{rr}{n^4})}.$$

Captas pone $Cf = p$, $fK = \frac{r}{nn}$; erit K centrum circuli, cujus radius est

$$\sqrt{(\frac{qq}{nn} + 2q + nn - \frac{2pr}{nn} + pp + \frac{rr}{n^4})} = \sqrt{((\frac{q}{n} + n)^2 + (\frac{r}{nn} - p)^2.)}.$$

Sume igitur $CB = n$ & $BA = \frac{q}{n}$: per A age ad rectos angulos AI; & per K & f age KI, fF parallelas ipsi AE & occurrentes AI in I & F. Dehinc abscinde GF æqualem FA, parem $fC = p$, & erit $IK = n + \frac{q}{n}$, ac $IG = \frac{r}{nn} - p$; igitur GK radius quæsitus. Quæ constructio ne hilum quidem differt a Newtoniana.

51. Nunc æquatio assumpta ducatur in fractionem $\frac{2n - 2a}{n}$, & fiet

$$2nu - 2au = 4xx - \frac{4axx}{n} + \frac{4apx}{n} - 4px - 2q + \frac{2aq}{n} - 2nn + 2an;$$

huic addatur æquatio ad circulum

$$uu = -4xx + 4px + \frac{qq}{nn} + 2q + nn + \frac{4rx}{nn} - \frac{4pr}{nn},$$

 &

LII. pag. 210. hujus) construendæ æqutionis

$$x^3 = pxx + qx + r\text{, vel } x^3 - pxx - qx - r = 0,$$

aut certe hoc pacto potuit eam invenire. Nam æquationem illam duc in $x - p$ & habebis

$$x^4 - 2px^3 \begin{matrix}-q\\+pp\end{matrix}\, xx \begin{matrix}-r\\+pq\end{matrix}\, x + pr = 0.$$

Pone nunc

$$\frac{nu}{2} = xx - px - \frac{q - nn}{2};$$

erit, quadrando,

$$\frac{nnuu}{4} = x^4 - 2px^3 \begin{matrix}-q\\-nn\\+pp\end{matrix}\, xx \begin{matrix}+pq\\+nnp\end{matrix}\, x + \begin{matrix}+\frac{qq}{4}\\+\frac{nnq}{2}\\+\frac{n^4}{4}\end{matrix},$$

hoc est,

$$\frac{nnuu}{4} + nnxx - nnpx - \frac{qq - 2nnq - n^4}{4} = x^4 - 2px^3 \begin{matrix}-q\\+pp\end{matrix}\, xx + pqx;$$

sed ex proposita æquatione est

$$x^4 - 2px^3 \begin{matrix}-q\\+pp\end{matrix}\, xx + pqx = rx - pr;$$

ergo (dividendo per nn & multiplicando per 4)

$$uu + 4xx - 4px - \frac{qq}{nn} - 2q - nn = \frac{4rx - 4pr}{nn},$$

aut

$$uu = -4xx + 4px + \frac{4rx}{nn} + \frac{qq}{nn} + 2q + nn - \frac{4pr}{nn},$$

seu

$$u = \sqrt{\left(-4xx + 4px + \frac{4rx}{nn} + \frac{qq}{nn} + 2q + nn - \frac{4pr}{nn}\right)},$$

æqua-

æquatio ad circulum, quod melius videbis si pro $2x$ scribas z; tunc enim erit

$$u = \sqrt{(-zz + 2pz + \frac{2rz}{nn} + \frac{qq}{nn} + 2q + nn - \frac{4pr}{nn})}.$$

Si ergo rectæ CE, CK ad angulos rectos sibi occurrant in C, & u ponatur tendere ex C in D, z vero ex C in K; transibit CK per circuli centrum. Quando autem $u = 0$, id est in ipsa CK est Tab. XL. Fig. 2.

$$\sqrt{(-zz + 2pz + \frac{2rz}{nn} + \frac{qq}{nn} + 2q + nn - \frac{4pr}{nn})} = 0,$$

id est,

$$zz = 2pz + \frac{2rz}{nn} + \frac{qq}{nn} + 2q + nn - \frac{4pr}{nn},$$

vel

$$z = p + \frac{r}{nn} \pm \sqrt{(\frac{qq}{nn} + 2q + nn - \frac{2pr}{nn} + pp + \frac{rr}{n^4})}.$$

Captas pone $Cf = p$, $fK = \frac{r}{nn}$; erit K centrum circuli, cujus radius est

$$\sqrt{(\frac{qq}{nn} + 2q + nn - \frac{2pr}{nn} + pp + \frac{rr}{n^4})} = \sqrt{((\frac{q}{n} + n)^2 + (\frac{r}{nn} - p)^2.)}.$$

Sume igitur $CB = n$ & $BA = \frac{q}{n}$: per A age ad rectos angulos AI; & per K & f age KI, fF parallelas ipsi AE & occurrentes AI in I & F. Dehinc abscinde GF æqualem FA, parem $fC = p$, & erit $IK = n + \frac{q}{n}$, ac $IG = \frac{r}{nn} - p$; igitur GK radius quæsitus. Quæ constructio ne hilum quidem differt a Newtoniana.

51. Nunc æquatio assumpta ducatur in fractionem $\frac{2n - 2a}{n}$, & fiet

$$2nu - 2au = 4xx - \frac{4axx}{n} + \frac{4apx}{n} - 4px - 2q + \frac{2aq}{n} - 2nn + 2an;$$

huic addatur æquatio ad circulum

$$nu = -4xx + 4px + \frac{qq}{nn} + 2q + nn + \frac{4rx}{nn} - \frac{4pr}{nn},$$

 &

& fiet

$$2nu - 2an + uu = -\frac{4axx}{n} + \frac{4apx}{n} + \frac{4rx}{nn} + \frac{2aq}{n} + \frac{qq}{nn} - nn + 2an - \frac{4pr}{nn},$$

seu (ordinando & pro $2x$ reponendo z)

$$uu = 2au - 2nu - \frac{azz}{n} + \frac{2apz}{n} + \frac{2rz}{nn} + \frac{2aq}{n} + \frac{qq}{nn} - nn + 2an - \frac{4pr}{nn},$$

nempe,

$$u = a - n \pm \surd(-\frac{azz}{n} + \frac{2apz}{n} + \frac{2rz}{nn} + \frac{2aq}{n} + \frac{qq}{nn} - \frac{4pr}{nn} + aa),$$

æquatio ad ellipsin, cujus axes sunt in data ratione, scilicet subduplicata, Tab. XI Fig. 2. a ad n. Abscinde igitur BE cujusvis longitudinis, si ellipsis specie data non sit; sed ita ut ad n datam habeat rationem, si ellipsis specie detur, & semæqualem arbitrariæ a; erit E centrum ellipseos. Pone nunc

$$\surd(-\frac{azz}{n} + \frac{2apz}{n} + \frac{2rz}{nn} + \frac{2aq}{n} + \frac{qq}{nn} - \frac{4pr}{nn} + aa) = 0,$$

& invenies

$$z = p + \frac{r}{an} \pm \surd(2q + \frac{qq}{an} - \frac{2pr}{an} + an + pp + \frac{rr}{aann}).$$

Quapropter abscinde FH $= \frac{r}{an}$, id est, fac FH ad FI $(\frac{r}{nn})$ ut BC (n) ad BE (a); & per H age HL ipsi AE parallelam & occurrentem perpendiculari ES in L, erit L centrum ellipseos. Jam

$$\surd(2q + \frac{qq}{an} - \frac{2pr}{an} + an + pp + \frac{rr}{aann}) = \surd((\frac{q}{\surd an} + \surd an)^2 + (\frac{r}{an} - p)^2);$$

& est HG $= \frac{r}{an} - p$: restat igitur sumenda HR $= \frac{q}{\surd an} + \surd an$, id est, faciendum est HR ad HL (AE $= \frac{q}{n} + a$) ut BD $(\surd an)$ ad BE (a): erit GR minor diameter & SG major; siquidem RG² ad GS², ut RH² ad HL² aut AE², ut BD² ad BE², ut an ad aa, ut n ad a; quæ est ipsissima Auctoris constructio.

52. Sumsissimus $\frac{nu}{2} = xx - px - \frac{q - nn}{2}$, quia sic, quadrando, invenimus

mus quantitatem, in qua incognita u est duarum tantum dimensionum, æqualem totis primo & secundo & parti tertii & quarti termini æquationis propositæ; quo pacto computatio facilior redditur. Poterat tamen æquatio cubica proposita multiplicari per $x+p$, & tunc habuissemus

$$x^4 \begin{matrix} -q \\ -pp \end{matrix} xx \begin{matrix} -r \\ -pq \end{matrix} x - pr = 0,$$

quæ fuisset simplicior; & quæ, premendo eadem vestigia, construi posset per æquationem $\frac{nu}{2} = xx - \frac{q-nn}{2}$ itidem simpliciorem.

53. Pariter animadverte quod quantitas n indeterminata relinquitur, quæ determinari ita possit ut constructiones peculiares faciliores evadant. Sed hæc quoque constructio potest confici per ellipsim datam & circulum rei statui aptum. Dentur enim axes ellipseos, & dabitur majoris latus rectum; pone minorem axem $= n$ indeterminatæ, & latus rectum $= a$ pariter indeterminatæ; sic ellipsis erit data, & circulus, qui in Auctoris constructione positus fuerat datus, aut ad arbitrium determinandus ob indefinitam n, quæ ingreditur in ejusdem radio, erit determinatus & pendebit a data ellipsi. Item quod æquatio, quam construximus, habet radices quatuor; construenda vero tres. Secunda e quatuor est GF vel p, quam quantitatem ipsi x æqualem fecimus, quando æquationem propositam duximus in $x-p$; qua demta, restant tres illæ quæ quærebantur.

Ceterum quæ monet Auctor de positione linearum & radicum negativarum ac positivarum tendentia, recluso constructionum fonte, ultro patent & sese cuivis offerunt.

Lemmatibus & regulis a Viro summo traditis, res minore computatione conficiuntur; sed nescio an sic Algebræ sua servetur elegantia, quæ, ut dicam quod sentio, tota in eo est ut perpauca theoremata sint in auxilium advocanda. Multitudo theorematum methodo Veterum convenit; methodus autem Recentiorum ideo inventa mihi videtur, ut paucis & facillimis principiis problemata solvi possint & construi; idcirco, ut constructionum harum fontes aperirem, laboravi.

54. Constructio quoque N°. LIX. pag. 259. hujus, facile deducitur ex principiis nostris. Æquatio

$$2nu - 2au + uu = -\frac{4axx}{n} + \frac{4apx}{n} + \frac{4rx}{nn} + \frac{2aq}{n} + \frac{qq}{nn} - nn + 2an - \frac{4pr}{nn}$$

est ad ellipsim, quia termini uu, $\frac{4axx}{n}$ utrinque ab æqualitatis signo positi, habent signa contraria: ut ea sit ad hyperbolam, debent eadem signa habere; muta igitur omnes $-a$ in $+a$, & idcirco etiam omnes $+a$ in $-a$; aut, quod eodem recidit, æquationem, quam supra duximus in $2n-2a$, ducamus in $2n+2a$, & habebimus

$$2nu + 2au + uu = \frac{4axx}{n} - \frac{4apx}{n} + \frac{4rx}{nn} - \frac{2aq}{n} + \frac{qq}{nn} - nn - 2an - \frac{4pr}{nn},$$

sive (pro $2x$ reponendo z, & ordinando)

$$zz = 2pz - \frac{2rz}{an} + 2q - \frac{qq}{an} + \frac{n^3}{a} + 2nn + \frac{4pr}{an} + \frac{2nnu}{an} + 2nu + \frac{nuu}{a},$$

&

$$z = p - \frac{r}{an} \pm \surd(pp + \frac{2pr}{an} + \frac{rr}{aann} + 2q - \frac{qq}{an} + \frac{n^3}{a} + 2nn + \frac{2nnu}{a} + 2nu + \frac{nuu}{a}).$$

Posita ergo superiore circuli constructione, quia circulus idem est, in AI cape, ut jubet Auctor, ex F versus A rectam FH $= \frac{r}{an}$; & erit AH $= p - \frac{r}{an}$; & per H age HL indefinitam ipsi AD parallelam, & hyperbolæ diameter jacebit in HL. Nunc, ubi ordinata nulla est, ibi est figuræ vertex; pone igitur

Tab. 4. Fig. 3.

$$\surd(pp + \frac{2pr}{an} + \frac{rr}{aann} + 2q - \frac{qq}{an} + \frac{n^3}{a} + 2nn + \frac{2nnu}{a} + 2nu + \frac{nuu}{a}) = 0,$$

& habebis, quadrando & ordinando,

$$uu = -2nu - 2au - 2an - nn + \frac{qq}{nn} - \frac{2aq}{n} - \frac{rr}{an^3} - \frac{2pr}{nn} - \frac{app}{n},$$

&

$$u = -n - a \pm \surd(\frac{qq}{nn} - \frac{2aq}{n} - \frac{rr}{an^3} - \frac{2pr}{nn} - \frac{app}{n} + aa).$$

Jam est CB $= -n$: sume igitur BE ex B versus A $= -a$: ex E demitte perpendicularem EL; eritque L hyperbolæ centrum, & ejus major axis dimidiatus erit quantitas radicalis supra inventa. Debet autem quadratum dimidii axis majoris ad quadratum dimidii minoris M esse ut a ad n; ergo

$$MM = \frac{qq}{an} - 2q - \frac{rr}{an} - \frac{2pr}{an} - pp + an = (\surd an - \frac{q}{\surd an} - \frac{r}{an} - p) \text{ in } (\surd an - q + \frac{r}{an} + p),$$

& est quadratum dimidii minoris axis æquale rectangulo ex partibus ordinatæ

tæ ab asymptoto ad curvam & a curva ad asymptotum; atque est GF + FH $= p + \frac{r}{an}$; quapropter inter CB & BE sume mediam AD $= \sqrt{an}$, & abscinde hinc inde a puncto H rectas HR, HR singulas æquales $\sqrt{an - q}$, faciendo nempe HR ad HL (EB — BA $= a - \frac{q}{n}$) ut DA ($\sqrt{an}$) ad BE (a): & erunt RL, LR asymptoti, atque hyperbola transibit per punctum G. Hic repete quæ constructioni per ellipsin adjuncta sunt.

55. Pro parabola assumes æquationem $nu = 2xx - 2px - q - nn$, id est, assumptam duces in 1; quia tunc nullum debet esse quadratum alterius incognitæ sub signo radicali, & omnes termini ducti in a debent evanescere. In hac æquatione si ponas $x = 0$, erit $u = -\frac{q}{n} - n$, id est, parabola transibit per punctum A; & si fingas $x = p$, erit iterum $u = -\frac{q}{n} - n$, & parabola transibit per H, unde patet ejus axem esse rectam Ff; quod etiam sic perspici potest. Est

$$xx = px + \frac{q + nn + nu}{2}$$

Ergo

$$x = \frac{p}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(pp + 2q + 2nn + 2nu)},$$

quod monstrat esse Ff axem. Ubi nunc ordinata nulla est, habetur

$$u = -\frac{q}{n} - n - \frac{pp}{2n}.$$

Sumi igitur debet in fF ex f versus F recta æqualis $\frac{q}{n} + n + \frac{pp}{2n}$ aut ultra F recta par $\frac{pp}{2n}$; quare p est ordinata ad parabolam.

56. Supra monstravimus quomodo, data æquatione quadrato-quadratica, una determinatos & alia indeterminata ad ellipsim, hyperbolam, aut parabolam datam, inveniatur circulus, qui suis cum data curva intersectionibus, exhibeat radices æquationis propositæ. Sed, ut explicemus elegentissimam Auctoris methodum, quæ habetur N°. LIII. pag. 250. hujus, sequentia lemmata præmittenda sunt.

Sit ellipsis aut hyperbola AM, *cujus latus transversum sit* AH, *rectum* AG; *& in latere transverso duo sumantur puncta* L *&* a, *& fiat ut* LA *ad* La, *sic* LH *ad* l.h; *atque ut* AH *ad* AG, *sic* ah *ad* ag; *& latere transverso* ha, *recto* ag, *describatur ellipsis altera aut hyperbola* am, *& harum similia latera transver-* Tab. a. Fig. 4. 5.

sa sint AH; ah, *id est harum ordinatæ sint parallelæ: dico quod quævis recta* LM, *occurrens duabus sectionibus in punctis* M *&* m, *ibi secatur in ratione* AL *ad* La; *& contra* &c.

Centrum figuræ AM sit C; & figuræ *am* sit *c*. Quoniam LA ad L*a* est ut HL ad L*h*; erit etiam AL ad L*a*, (vel HL ad L*h*,) ut AH ad *ah*; vel ut CA ad *ca*; ut AG ad *ag*.

Nunc a punctis M; *m*; agantur ordinatæ parallelæ MP; *mp*; & jungantur HG; *hg*; occurrentes PM in N; & *pm* in *n*. Quoniam sunt in eadem ratione HA ad AG; HP ad PN; *ha* ad *ag*; *hp* ad *pn*; erunt & reliquæ AP; *ap*; in eadem ratione AG ad *ag*, vel AH ad *ah*, aut AC ad *ac*. Igitur rectangula APH, *aph*, sunt similia & ut quadrata AG; *ag*; vel AC; *ac*. Est autem rectangulum APH ad rectangulum APN ut HP ad PN; ut HA ad AG; ut *ha* ad *ag*; ut *hp* ad *pn*; ut rectangulum *hpa* ad rectangulum *npa*; & rectangulum APN æquale est quadrato PM, ac rectangulum *apn* quadrato *pm*: ergo quadrata PM; *pm* sunt ut rectangula APH; *aph*; ut quadrata AC; *ac*. Sed quadrata eadem PM; *pm*, sunt ut quadrata PL; L*p*. Ergo rectæ AC; *ac*, vel AH; *ah*, sunt ut rectæ PL; L*p*, aut ML; L*m*. Q. E. D.

Pro conversa. Non sit punctum *m* in figura *am*, sed punctum O. Erit ergo AH ad *ah* ut ML ad LO; sed, per hypothesim, ut AH ad *ah*, ita ML ad L*m*; ergo ML ad L*m*, ut ML ad LO; æquales itaque sunt L*m* & LO.

Sequentia facile ad hyperbolam transferuntur, ideo figuram hyperbolæ omisi.

Tab. 4. Fig. 6. 57. *Si, positis quæ supra, in recta* LM *sumatur quodvis punctum* K, *& fiat* GL *ad* Lq *ut* KL *ad* Lk: *dico quod, si punctum* k *fuerit intra aut extra curvam* AM, *erit etiam punctum* k *pariter intra aut extra curvam* am.

Nam, quia GL ad L*g* est ut ML ad L*m*, id est, per hypothesim, ut KL ad L*k*; erit alternando ML ad LK ut L*m* ad L*k*; ergo, si ML major aut minor est quam LK, erit pariter L*m* major aut minor quam L*k*.

58. Junctæ GK, *gk* sunt parallelæ.

59. *Si centro K, radio KG describatur circulus occurrens rectæ KL in P; & centro k radio kg describatur alter circulus occurrens rectæ eidem in p, erit LP major Lp.*

Nam KL ad L*k* ut KG ad *kg*, vel ut KP ad *kp*; ergo KL ad L*k* ut PL ad L*p*: sed est KL major quam L*k*, ergo PL major L*p*.

60. *Si circulus gγ ellipsi occurrat in altero quovis puncto γ, & jungatur Lγ: dico hanc productam donec ellipsi occurrat in Y, illi occurrere in puncto, ubi circulus GP ellipsim majorem secat.*

Junge *k*γ, KY. Est, ut KL ad L*k* ita YL ad Lγ: erunt itaque parallelæ rectæ *k*γ, KY. Igitur KL ad L*k* ut KY ad *k*γ: sed ut KL ad L*k* ita KG ad *kg*; ergo KY ad *k*γ ut KG ad *kg*; æquales autem sunt *gk*, *k*γ, ergo & GK, KY, quapropter punctum Y est ad circulum GP, & ad ellipsin.

61. Igitur ductæ ad rectos angulos Y*t*, γT sunt ut GL ad L*g*. Sed erat YX (posita Auctoris constructione) dupla radix; igitur, ubi habetur Xγ, ut obtineatur XY, fieri debet γT ad *t*Y ut *g*L ad LG.

Solutio æquationum per approximationem satis accurata & facilis habetur in Additamento. Nonnulla quidem afferri possent; sed ea omitto ne liber nimis excrescat.

ADDITA-

ADDITAMENTUM

VEL DE

SOLUTIONE

ET

CONSTRUCTIONE

ÆQUATIONUM &c.

SCRIPTA VARIA

EX TRANSACTIONIBUS PHILOSOPHICIS

ET ALIUNDE

EXCERPTA.

ADDITAMENTUM.

METHODUS NOVA

accurata & facilis inveniendi radices æquationum quarumcunque generaliter, sine prævia reductione. *Per* Edm. Halley, *Geom. Prof. Savil.*

Artis analyticæ præcipuus quidem usus est problemata mathematica ad æquationes perducere, easque terminis, quantum fieri possit, simplicissimis exhibere. Ars autem ista manca quodammodo, nec satis analytica merito videretur, nisi methodi quædam subministrarentur, quarum ope radices, sive lineæ sive numeri sint, ex jam inventis æquationibus elicere liceret, eoque nomine problemata soluta dare.

Veteribus sane vix quicquam supra quadraticarum æquationum naturam innotuit; quæcunque vero scripsere de solidorum problematum effectione geometrica ope parabolæ, cissoïdis, aliusve curvæ, particularia tantum sunt, ac casibus particularibus destinata; de numerica vero extractione ubique altum silentium; ita ut quicquid in hoc genere jam calculo præstamus, modernorum inventis fere totum debeatur.

Ac primus quidem ingens ille Algebræ hodiernæ repertor ac restaurator *Franciscus Vieta*, annis abhinc circiter centum, methodum generalem aperuit pro educendis radicibus ex æquatione qualibet; eamque sub titulo *De numerosa potestatum ad exegesin resolutione*, publico donavit, *ubique*, ut ait, *observando retrogradam compositionis viam.* Hujusque vestigiis insistentes *Harriottus*, *Oughtredus* aliique, tam nostrates quam extranei, quæcunque de hac re scriptis mandarunt, a *Vieta* desumpta debent agnoscere. Qualia vero in hoc negotio præstiterit sagacissima ingenii *Newtoniani* vis, ex contractiore specimine a Clarissimo *Wallisio*, Cap. XCIV. algebræ suæ, edito, potius conjectura assequi quam pro certo comperiri licet. Ac dum obstinata Authoris modestia amicorum precibus devicta cedat, inventaque hæc sua pulcherrima in lucem promere dignetur, expectare cogimur.

Nuper vero eximius ille juvenis *D. Josephus Raphson, R. S. S. analysin æquationum universalem* anno 1690. evulgavit, suæque methodi præstantiam pluribus exemplis abunde illustravit; quo genii mathematici maxima quæque pollicentis nobile indicium prodidit.

Hujus exemplo ac ductu (ut par est credere) *D. de Lagny*, haud vulgaris, apud *Parisienses* Mathematum Professor, idem argumentum aggressus est; qui cum totus fere sit in eliciendis potestatum purarum radicibus, præsertim cubica, pauca tantum, eaque perplexa nec satis demonstrata, de affectarum radicum extractione subjungit. Regulas autem binas, compendiosas admodum, pro approximatione radicis cubicæ profert, alteram rationalem, alteram irrationalem; nempe cubi $aaa + b$ latus esse inter

$$a + \frac{ab}{3aaa + b} \text{ ac } \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{b}{3a})} + \frac{1}{2}a$$

Radicem autem potestatis quintæ $a^5 + b$ sic exprimit

$$\frac{1}{2}a + \sqrt{((\sqrt{\frac{1}{4}a^4 + \frac{b}{5a}}) - \frac{1}{4}aa)}$$

(non $\frac{1}{2}aa$ ut perperam legitur in libro gallico impresso.) Has regulas, cum nondum librum videram, ab amico communicatas habui, quarum vires experimento edoctus, compendiumque admiratus, volui etiam demonstrationem investigare. Ea vero inventa, ad universalem æquationum omnium resolutionem eandem methodum accommodari posse statim cognovi; eoque magis eas excolere statui, quia uno intuitu rem totam synoptice explicari posse videbam, quodque hoc pacto singulis calculi restaurati vicibus saltem triplicarentur notæ sive ciphræ in radice jam inventæ, quæ quidem omnibus aliorum omnium computationibus non nisi pari cum datis numero augentur.

Demonstrantur autem regulæ prædictæ ex genesi cubi & potestatis quintæ. Posito enim latere cubi cujusque $a + e$, cubus inde conflatus fit

$$aaa + 3aae + 3aee + eee,$$

adeoque si supponatur aaa numerus cubus proxime minor dato quovis non cubo, eee minor erit unitate, ac residuum, sive b, æquabitur reliquis cubi membris

$$3aae + 3aee + eee:$$

rejectoque eee ob parvitatem,

$$b = 3aae + 3aee.$$

Cumque aae multo majus sit quam aee, $\frac{b}{3aa}$ non multum excedet ipsam e: positoque

$e =$

$$e = \frac{b}{3aa}, \quad \frac{b}{3aa + 3ae},$$

cui proxime æquatur quantitas e, invenietur

$$\frac{b}{3aa + \frac{3ab}{3aa}} \text{ five } \frac{b}{3aa + \frac{b}{a}}:$$

hoc eſt

$$\frac{ab}{3aaa + b.} = e,$$

adeoque latus cubi

$$aaa + b \text{ habebitur } a + \frac{ab}{3aaa + b}$$

quæ eſt ipſa formula rationalis *Dni de Lagny*. Quod ſi aaa fuerit numerus cubus proxime major dato, latus cubi $aaa - b$ pari ratiocinio invenietur $a - \frac{ab}{3aaa - b}$; atque hæc radicis cubicæ approximatio ſatis expedita ac facilis, parum admodum fallit in defectu, cum ſcilicet e, reſiduum radicis hoc pacto inventum, paulo minus juſto ſit. Irrationalis vero formula etiam ex eodem fonte derivatur, videlicet

$$b = 3aae + 3aee, \text{ ſive } \frac{b}{3a} = ae + ee;$$

adeoque

$$\sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{b}{3a})} = \frac{1}{2}a + e,$$

atque

$$\sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{b}{3a})} + \frac{1}{2}a = a + e,$$

ſive radici quæſitæ. Latus vero cubi $aaa - b$ eodem modo habebitur

$$\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{b}{3a}.)}$$

Atque hæc quidem formula aliquanto propius ad ſcopum collimat, in exceſſu peccans ſicut altera in defectu, ac ad praxin magis commoda videtur, cum reſtitutio calculi nihil aliud ſit quam continua additio vel ſubductio ipſius $\frac{eee}{3a}$, ſecundum ac quantitas e innoteſcat; ita ut potius ſcribendum ſit

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4}aa + \frac{b - eee}{3a}\right)} + \frac{1}{2}a$$

in priori caſu, ac in poſteriori

$$\frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{4}aa + \frac{eee - b}{3a}\right)}.$$

Utraque autem formula ciphræ jam cognitæ in radice extrahenda ad minimum triplicantur, quod quidem arithmeticæ ſtudioſis omnibus gratum fore confido, atque ipſe inventori abunde gratulor.

Ut autem harum regularum utilitas melius ſentiatur, exemplum unum vel alterum adjungere placuit. Quæratur latus cubi dupli, ſive $aaa + b = 2$. Hic $a = 1$ atque $\frac{b}{3a} = \frac{1}{3}$, adeoque $\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{7}{12}}$ ſive 1,26 invenietur latus prope verum. Cubus autem ex 1,26 eſt 2,000376, adeoque

$$0{,}63 + \sqrt{\left(,3969 - \frac{2{,}000376}{3{,}78}\right)}$$

ſive

$$0{,}63 + \sqrt{(,\dot{3}\dot{9}\dot{6}\dot{8}\dot{0}\dot{0}\dot{5}29100529 1)} = 1{,}259921049895 - ;$$

quod quidem tredecim figuris latus cubi dupli exhibet, nullo fere negotio, videlicet, una diviſione & lateris quadrati extractione, ubi vulgari operandi modo quantum deſudaſſet arithmeticus norunt experti. Hunc etiam calculum quouſque velis continuare licet, augendo quadratum additione, $\frac{eee}{3a}$. Quæ quidem correctio hoc in caſu non niſi unitatis in radicis figura decimaquarta augmentum affert.

Exemp. II. Quæratur latus cubi æqualis menſuræ *Anglicæ*, *Gallon* dictæ, uncias ſolidas 231 continentis. Cubus proxime minor eſt 216 cujus latus $6 = a$, ac reſiduum $15 = b$ adeoque pro prima approximatione provenit

$$3 + \sqrt{\left(9 + \frac{5}{6}\right)} = \text{radici.}$$

Cum-

Cumque $\sqrt{(9,8333...)}$ sit 3,1358... patet $6,1358 = a + e$. Supponatur jam $6,1358 = a$, & habebimus cubum ejus

$$231,000853894712,$$

ac juxta regulam

$$3,0679 + \sqrt{\left(9,41201041 - \frac{,000853894712}{18,4074}\right)}$$

æquatur accuratissime lateri cubi dati, id quod intra horæ spatium calculo obtinui

$$6,1357924396619589 7,$$

in octodecima figura justum, at deficiens in decima nona. Hæc vero formula merito præferenda est rationali ob ingentem divisorem, non sine magno labore tractandum; cum lateris quadrati extractio multo facilius procedat, ut experientia multiplex me docuit.

Regula autem pro radice surfolidi puri, sive potestatis quintæ, paulo altioris indaginis est, atque etiam adhuc multo perfectius rem præstat: datas enim in radice ciphras ad minimum quintuplicat, neque etiam multi nec operosi est calculi. Author autem nullibi inveniendi methodum ejusve demonstrationem concedit, etiamsi maxime desiderari videatur: præsertim cum in libro impresso non recte se habeat; id quod imperitos facile illudere possit. Potestas autem quinta lateris $a + e$ conficitur ex his membris

$$a^5 + 5a^4e + 10a^3ee + 10a^2eee + 5ae^4 + e^5 = a^5 + b,$$

unde

$$b = 5a^4e + 10a^3ee + 10a^2e^3 + 5ae^4,$$

rejecto e^5 ob parvitatem suam: quo circa

$$\frac{b}{5a} = a^3e + 2a^2e^2 + 2ae^3 + e^4,$$

atque utrinque addendo $\frac{1}{4}a^4$ habebimus

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4}aaaa + \frac{b}{5a}\right)} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^4 + a^3e + 2a\,e^2 + 2ae^3 + e^4\right)} = \frac{1}{2}aa + ae + ee.$$

Dein utrinque subducendo $\frac{1}{4}aa$,

$\frac{1}{2}a + e$ æquabitur $\surd(\surd(\frac{1}{4}a^4 + \frac{b}{5a}) - \frac{1}{4}aa)$

cui si addatur $\frac{1}{2}a$, erit

$$a + e = \frac{1}{2}a + \surd(\surd(\frac{1}{4}a^4 + \frac{b}{5a}) - \frac{1}{4}aa)$$

æqualis radici potestatis $a^5 + b$. Quod si fuisset $a^5 - b$, (assumpta a justo majore,) regula sic se haberet,

$$\frac{1}{2}a + \surd(\surd(\frac{1}{4}a^4 - \frac{b}{5a}) - \frac{1}{4}aa).$$

Atque hæc regula mirum in modum approximat, ut vix restitutione opus sit; at dum hæc mecum pensitavi, incidi in formularum methodum quandam generalem pro quavis potestate satis concinnam, quamque celare nequeo; cum etiam in superioribus potestatibus datas radicis figuras triplicare valeant.

Hæ autem formulæ ita se habent, tam rationales quam irrationales.

$$\surd aa + b = \surd(aa + b) \text{ vel } a + \frac{ab}{2aa + \frac{1}{2}b}$$

$$\surd^3 a^3 + b = \frac{1}{2}a + \surd(\frac{1}{4}aa + \frac{b}{3a}) \text{ vel } a + \frac{ab}{3aaa + b}$$

$$\surd^4 a^4 + b = \frac{2}{3}a + \surd(\frac{1}{9}aa + \frac{b}{6aa}) \text{ vel } a + \frac{ab}{4a^4 + \frac{3}{2}b}$$

$$\surd^5 a^5 + b = \frac{3}{4}a + \surd(\frac{1}{16}aa + \frac{b}{10a^3}) \text{ vel } a + \frac{ab}{5a^5 + 2b}$$

$$\surd^6 a^6 + b = \frac{4}{5}a + \surd(\frac{1}{25}aa + \frac{b}{15a^4}) \text{ vel } a + \frac{ab}{6a^6 + \frac{5}{2}b}$$

$$\surd^7 a^7 + b = \frac{5}{6}a + \surd(\frac{1}{36}aa + \frac{b}{21a^5}) \text{ vel } a + \frac{ab}{7a^7 + 3b}$$

Et sic de ceteris etiam adhuc superioribus. Quod si assumeretur a radice quæ-

quæsita major; (quod cum fructu fit quoties poteſtas reſolvenda multo propior ſit poteſtati numeri integri proxime majoris quam proxime minoris,) mutatis mutandis eædem radicum expreſſiones proveniunt.

$$\sqrt{aa - b} = \sqrt{(aa - b)} \text{ vel } a - \frac{ab}{2aa - \frac{1}{2}b}$$

$$\sqrt{^3 aaa - b} = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{b}{3a})} \text{ vel } a - \frac{ab}{3aaa - b}$$

$$\sqrt{^4 a^4 - b} = \frac{2}{3}a + \sqrt{(\frac{1}{9}aa - \frac{b}{6aa})} \text{ vel } a - \frac{ab}{4a^4 - \frac{3}{2}b}$$

$$\sqrt{^5 a^5 - b} = \frac{3}{4}a + \sqrt{(\frac{1}{16}aa - \frac{b}{10a^3})} \text{ vel } a - \frac{ab}{5a^5 - 2b}$$

$$\sqrt{^6 a^6 - b} = \frac{4}{5}a + \sqrt{(\frac{1}{25}aa - \frac{b}{15a^4})} \text{ vel } a - \frac{ab}{6a^6 - \frac{5}{2}b}$$

$$\sqrt{^7 a^7 - b} = \frac{5}{6}a + \sqrt{(\frac{1}{36}aa - \frac{b}{21a^5})} \text{ vel } a - \frac{ab}{7a^7 - 3b}$$

Atque inter hos duos terminos ſemper conſiſtit vera radix, aliquanto proprior irrationali quam rationali; *e* vero juxta formulam irrationalem inventa, ſemper peccat in exceſſu, ſicut in defectu a rationali formula reſultans quotus; adeoque ſi fuerit $+ b$, irrationalis majorem juſto exhibet radicem, rationalis minorem. E contrario vero ſi fuerit $- b$. Atque hæc de eliciendis radicibus e poteſtatibus puris dicta ſunto, quæ quidem, ad uſus ordinarios ſufficientes, multo facilius habentur ope logarithmorum: quoties vero ultra tabularum logarithmicarum vires accuratiſſime definienda eſt radix, ad hujuſmodi methodos neceſſario recurrendum eſt. Præterea, cum ex harum formularum inventione ac contemplatione, univerſalis regula pro æquationibus affectis (quam non ſine fructu Geometriæ ac Algebræ ſtudioſis omnibus uſurpandam confido) mihi ipſi oblata ſit, volui ipſius inventi primordia qua poſſim claritate aperire.

Æquationum quidem affectarum quadrato-quadratum non excedentium conſtructionem generalem concinnam admodum ac facilem, *Num.* 188. harum *Tranſact.* jam tum inventam publici juris feci: ex quo ingens cupido animum inceſſit idem numeris efficiendi. Atque brevi poſt *Dn. Raphſon* magna ex parte voto ſatisfeciſſe viſus eſt, uſque dum *Dus de Lagny* etiam ad-

adhuc compendiosius rem peragi posse hoc suo libello mihi suggessit. Methodus autem nostra hæc est.

Supponatur radix cujusvis æquationis z composita ex partibus $a +$ vel $- e$, quarum a ex hypothesi assumatur ipsi z quantum fieri possit propinqua, (quod tamen commodum est, non necessarium) & ex quantitate $a +$ vel $- e$ formentur potestates omnes ipsius z in æquatione inventæ, iisque assigantur numeri coefficientes respective: deinde potestas resolvenda subducatur e summa partium datarum in prima columna, ubi e non reperitur, quam homogeneum comparationis vocant, sique differentia $\pm b$. Dein habeatur summa omnium coefficientium ipsius lateris e in secunda columna, quæ sit s; denique in tertia addantur omnes coefficientes quadrati ee, quarum summam vocemus t. Ac radix quæsita z, formula rationali habebitur

$$a + \text{vel} - \frac{sb}{ss + \text{vel} - tb}:$$

irrationali vero fiet

$$z = a \mp \frac{\frac{1}{2}s \pm \sqrt{\frac{1}{4}ss + bt}}{t}$$

id quod exemplis illustrare fortasse operæ pretium erit. Instrumenti vero loco adsit tabella, potestatum omnium ipsius $a +$ vel $- e$ genesin exhibens, quæ si opus fuerit, continuari facile possit. A septima vero incipiam, cum pauca problemata eousque assurgere deprehendantur. Hanc tabellam jure optimo *speculum analyticum generale* appellare licet. Potestates autem prædictæ ex continua multiplicatione per $a + e = z$ ortæ, sic proveniunt cum suis coefficientibus adjunctis.

Tabella Potestatum.

$$\begin{array}{llllllll}
 & & s & t & u & w & x & y \\
lz^7 = & la^7 & + 7la^6e & + 21la^5ee & + 35la^4e^3 & + 35la^3e^4 & + 21la^2e^5 & + 7lae^6 + le^7 \\
kz^6 = & ka^6 & + 6ka^5e & + 15ka^4ee & + 20ka^3e^3 & + 15ka^2e^4 & + 6ka\,e^5 & + k\,e^6 \\
hz^5 = & ha^5 & + 5ha^4e & + 10ha^3ee & + 10ha^2e^3 & + 5ha\,e^4 & + h\,e^5 & \\
gz^4 = & ga^4 & + 4ga^3e & + 6ga^2ee & + 4ga\,e^3 & + g\,e^4 & & \\
fz^3 = & fa^3 & + 3fa^2e & + 3fa\,ee & + f\,e^3 & & & \\
dz^2 = & da^2 & + 2da\,e & + d\,ee & & & & \\
cz = & ca & + c\,e & & & & &
\end{array}$$

Quod si fuerit $a - e = z$, ex iisdem membris conficitur tabella, negatis solummodo imparibus potestatibus ipsius e, ut e, e^3, e^5, e^7: & affirmatis paribus e^2, e^4, e^6. Sitque summa coefficientium lateris $e = s$; summa

ma coefficientium quadrati $ee = t$; cubi $= u$; biquadrati $= w$; surfolidi $e^5 = x$; summa vero coefficientium cubo-cubi $= y$; *&c.*

Cum autem supponatur e exigua tantum pars radicis inquirendæ, omnes potestates ipsius e multo minores evadunt similibus ipsius a potestatibus, adeoque pro prima hypothesi rejiciantur superiores, (ut in potestatibus puris ostensum est) ac formata æquatione nova, substituendo $a \pm e = z$ habebimus, ut diximus,

$$\pm b = \pm se \pm tee.$$

Cujus rei cape exempla sequentia, quo melius intelligatur.

Exemp. I. Proponatur æquatio

$$z^4 - 3zz + 75z = 10000.$$

Pro prima hypothesi ponatur $a = 10$, ac consequenter prodibit æquatio,

$$\begin{array}{lll} z^4 & = + a^4 & \ldots 4a^3e + 6a^2ee \ldots 4ae^3 + e^4 \\ - dz & = - da^2 & \ldots 2da\, e - d\, ee \\ + cz & = + ca & \ldots \quad ee \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} = + & 10000 \ldots 4000\, e + 600ee \ldots 40e^3 + e^4 \\ - & 300 \ldots \quad 60\, e - \quad 3ee \\ + & 750 \ldots \quad 75\, e \\ - & 10000 \end{array}$$

$$+ \quad \underset{}{450} - \underset{s}{4015e} + \underset{t}{597ee} - \underset{u}{40e^3} + e^4 = 0.$$

Signis + ac — (respectu e ac e^3) in dubio relictis, usque dum sciatur an e sit negativa vel affirmativa; quod quidem aliquam parit difficultatem; cum in æquationibus plures radices admittentibus, sæpe augeantur homogenea comparationis, ut appellant, a minuta quantitate a, ac e contra ea aucta minuantur. Determinatur autem signum ipsius e ex signo quantitatis b; sublata enim resolvenda ex homogeneo ab a formato, signum ipsius se, ac proinde partium in ejus compositione prævalentium, semper contrarium erit signo differentiæ b. Unde patebit an fuerit $-e$ vel $+e$, sive an a major vel minor radice vera assumpta sit. Ipsa autem e semper æquatur $\dfrac{\frac{1}{2}s - \sqrt{(\frac{1}{4}ss - bt)}}{t}$, quoties b ac t eodem signo notantur; quoties vero diverso signo connectuntur, eadem e fit $\dfrac{\sqrt{(\frac{1}{4}ss + bt)} - \frac{1}{2}s}{t}$.

Postquam vero compertum sit fore $-e$, in affirmatis æquationis

nis membris negentur e, e^3, e^5, &c. in negatis affirmentur; scribantur scilicet signo contrario; si vero fuerit $+e$, affirmentur in affirmatis, negentur in negatis. Habemus autem in hoc nostro exemplo 10450 loco resolvendæ 10000, sive $b = +450$, unde constat a majorem justo assumptam, ac proinde haberi $-e$: Hinc æquatio fit

$$10450 - 4015\,e + 597\,ee - 40e^3 + e^4 = 10000.$$

Hoc est

$$450 - 4015\,e + 597ee = 0.$$

Adeoque

$$450 = 4015\,e - 597ee$$

Sive

$$b = se - tee$$

cujus radix e fit $\dfrac{\frac{1}{2}s - \sqrt{(\frac{1}{4}ss - bt)}}{t}$. Vel si mavis $\dfrac{s}{2t} - \sqrt{(\dfrac{ss}{4tt} - \dfrac{b}{t})}$,

id est, in præsenti casu,

$$e = \frac{2007\frac{1}{2} - \sqrt{3761406\frac{1}{4}}}{597},$$

unde provenit radix quæsita prope verum, 9,886. Hoc vero pro secunda hypothesi substituto, emergit $a+e=x$ accuratissime 9,8862603936495...., in ultima figura vix binario justum superans; nempe cum $\dfrac{\sqrt{(\frac{1}{4}ss+bt)} - \frac{1}{2}s}{t} = e$. Atque hoc etiam, si opus fuerit, multo ulterius verificari posset, subducendo $\dfrac{\frac{1}{2}ue^3 + \frac{1}{2}e^4}{\sqrt{(\frac{1}{4}ss+tb)}}$ si fuerit $+e$, vel addendo $\dfrac{\frac{1}{2}ue^3 - \frac{1}{2}e^4}{\sqrt{(\frac{1}{4}ss-tb)}}$ radici prius inventæ, si sit $-e$. Cujus compendium eo pluris æstimandum quod quandoque, ex sola prima suppositione, semper vero ex secunda, iisdem conservatis coefficientibus, quousque velis calculum continuare possis. Ceterum æquatio prædicta etiam negativam habet radicem, id est. $x = 10,26.....$ quam cuilibet accuratius expiscari licet.

Exempl.

Exempl. II. Sit

$$z^3 - 17zz + 54z = 350$$

ac ponatur $a = 10$. Ex præscripto regulæ,

$$\begin{array}{lllll} zzz &= aaa &+ 3aae &+ 3aee &+ eee \\ -dzz &= daa &- 2dae &- dee & \\ +cz &= c\,a &+ c\,e & & \\ & \;\;b & \;\;s & \;\;t & \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{Id est} + 1000 &+ 300e &+ 30ee &+ eee \\ \quad - 1700 &- 340e &- 17ee & \\ \quad + 540 &+ 54e & & \\ \quad - 350 & & & \end{array}$$

$$\text{Sive} - 510 + 14e + 13ee + eee = 0.$$

Cum autem habeatur -510, constat a minorem justo assumi, ac proinde e affirmativam esse, ac ex $510 = 14e + 13ee$ fit

$$\frac{\sqrt{(bt + \frac{1}{4}ss)} - \frac{1}{2}s}{t} = e = \frac{\sqrt{6679} - 7}{13},$$

unde z fit 15,7... quæ nimia quidem est ob late sumptam a; ideo supponatur secundo $a = 15$, ac pari ratiocinio habebimus

$$e = \frac{\frac{1}{2}s - \sqrt{(\frac{1}{4}ss - tb)}}{t} = \frac{109\frac{1}{2} - \sqrt{11710\frac{1}{4}}}{28}$$

ac proinde $z = 14{,}954068$. Quod si calculum adhuc tertio restaurare velis, usque in vigesimam quintam figuram vero conformem invenies radicem. Paucioribus vero contentus, scribendo $tb \pm teee$ loco tb, vel subtrahendo aut addendo radici prius inventæ $\dfrac{\frac{1}{2}eee}{\sqrt{(\frac{1}{4}ss \mp tb)}}$ ad scopum statim pervenies. Æquatio vero proposita nulla alia radice explicari potest, quia potestas resolvenda 350 major est cubo ex $\frac{17}{3}$ vel $\frac{1}{3}d$.

Exempl. III. Sit æquatio illa quam in resolutione difficillimi problematis arithmetici adhibet Clarissimus *Wallisius*, Cap. LXII. Algebræ suæ, quo radicem *Vietæ* methodo accuratissime quidem assecutus est: eandemque exemplum methodi suæ affert laudatus *Dns Raphson pag.* 25, 26. nempe

$$z^4 - 80z^3 + 1998z^2 - 14937z + 5000 = 0.$$

Hæc autem æquatio ejus formulæ eſt, ut plures habeat radices affirmativas, ac quod difficultatem ejus augeat, prægrandes ſunt coefficientes reſpectu reſolvendæ datæ. Quo melius autem tractetur, dividatur, ac juxta notas punctationum regulas ponatur

$$-z^4 + 8z^3 - 20z^2 + 15z = 0{,}5$$

(ubi z eſt $\frac{1}{10} z$ in æquatione propoſita) ac pro prima hypotheſi habeamus $a = 1$. Proinde

$$+2 - 5e - 2ee + 4e^3 - e^4 - 0{,}5 = 0.$$

Hoc eſt $1\frac{1}{2} = 5e + 2ee$; hinc

$$\frac{\sqrt{(\frac{1}{4}ss + bt)} - \frac{1}{2}s}{t} = e \text{ fit } \frac{\sqrt{37} - 5}{4}$$

adeoque $z = 1{,}27$: Unde conſtat 12,7 radicem eſſe æquationis propoſitæ vero vicinam. Secundo loco ſupponatur $z = 12{,}7$ ac juxta præſcriptum tabellæ poteſtatum oritur

$$\begin{array}{lllll}
b & s & t & u & \\
-26014{,}4641 & -8193{,}532e & -697{,}74ee & -50{,}8e^3 & -e^4 \\
+163870{,}640 & +38709{,}60e & +3048ee & +80e^3 & \\
-322257{,}42 & -50749{,}2e & -1998ee & & \\
+189699{,}9 & +14937e & & & \\
-5000 & & & & \\
\hline
+298{,}6559 & -5296{,}132e & +82{,}26ee & +29{,}2e^3 & -e^4 = 0.
\end{array}$$

Adeoque

$$-298{,}6559 = -5296{,}132e + 82{,}26ee,$$

cujus radix e juxta regulam $= \dfrac{\frac{1}{2}s - \sqrt{(\frac{1}{4}ss - bt)}}{t}$ fit

$$\frac{2648{,}066 - \sqrt{6987686{,}106022}}{82{,}26} = {,}05644080331 \ldots = e$$

mi-

minori vero. Ut autem corrigatur,

$$\frac{\frac{1}{2}ue^3 - \frac{1}{2}e^4}{\sqrt{(\frac{1}{4}ss - bt)}} \text{ five } \frac{,0026201\ldots}{2643,423\ldots\ldots} \text{ fit } ,00000099117,$$

ac proinde e correcta $=$,05644179448.

Quod si adhuc plures radicis figuras desideras, formetur ex e correcta

$$tue^3 - te^4 = 0,43105602423\ldots,$$

ac

$$\frac{\frac{1}{2}s - \sqrt{(\frac{1}{4}ss - bt - tue^3 + te^4)}}{t} \text{ five } \frac{2648,066 - \sqrt{6987685,67496597577\ldots}}{82,26}$$

$$= ,05644179448074402 = e,$$

unde $a + e = z$ radix accuratissima fit

12,75644179448074402....

qualem invenit Cl. *Wallisius* in loco citato. Ubi observandum redintegrationem calculi semper triplicare notas veras in assumpta a, quas prima correctio, five $\frac{\frac{1}{2}ue^3 - \frac{1}{2}e^4}{\sqrt{(\frac{1}{4}ss - bt)}}$, quintuplices reddit, quæque etiam commode per logarithmos efficitur. Altera autem correctio post primam, etiam duplum ciphrarum numerum adjungit, ut omnino assumptas septuplicet; prima tamen plerumque usibus arithmetices abunde sufficit. Quæ vero dicta sunt de numero ciphrarum in radice recte assumptarum, ita intelligi velim, ut cum a non nisi decima parte distet a vera radice, prima figura recte assumatur; si intra centesimam partem, duæ primæ: Si intra millesimam tres priores rite se habeant; quæ deinde juxta nostram regulam tractatæ statim novem evadunt.

Restat jam ut nonnulla adjiciam de nostra formula rationali, videlicet $e = \frac{sb}{ss \pm tb}$, quæ quidem satis expedita videbitur, nec multum cedit priori, cum etiam datas ciphras triplicare valeat. Formata autem æquatione ex $a \pm e = z$, ut prius, statim patebit an a assumpta sit major vel minor vero, cum scilicet se signo semper notari debeat contrario signo dif-

ferentiæ refolvendæ ac homogenei fui ex a producti. Deinde pofito quod $\pm b \mp se +$ vel $- tee = 0$; divifor fit $ss - tb$ quoties b ac t iisdem fignis notantur; idem vero fit $ss + bt$, fi figna ifta diverfa fint. Praxi autem magis accommodata videtur, fi fcriberetur theorema,

$$e = \frac{b}{s} \pm \frac{tb}{\frac{s}{s}}$$

nempe cum una multiplicatione ac duabus divifionibus res peragatur, quæ tres multiplicationes ac unam divifionem alias requireret. Hujus etiam methodi exemplum càpiamus a prædictæ æquationis radice 12, 7...: ubi

$$\begin{array}{l} 298{,}6559 - 5296{,}132e + 82{,}26ee + 29{,}2e^3 - e^4 = 0 \\ +b \qquad\quad -s \qquad\qquad +t \qquad\quad +u \end{array}$$

adeoque $\frac{b}{s} - \frac{tb}{\frac{s}{s}} = e$, hoc eft, fiat ut s ad t ita b ad $\frac{tb}{s} = 5296, 132)$ 298,6559 in 82,26 (4,63875... quocirca divifor fit

$s - \frac{tb}{s} = 5291{,}49325\ldots)$ 298,6559 (0, 056441.....) $= e$, id eft quinque figuris veris adjectis radici affumptæ. Corrigi autem nequit hæc formula ficut præfens irrationalis; adeoque fi plures defiderentur radicis figuræ, præftat affumpta nova hypothefi calculum de integro repetere: ac novus quotus triplicando figuras in radice cognitas fupputatori etiam maxime fcrupulofo abunde fatisfaciet.

ÆQUA-

ÆQUATIONUM CUBICARUM

Et biquadraticarum, tum geometrica & mechanica, resolutio universalis,

a J. COLSON.

§. I. Æquationis cubicæ universalis

$$x^3 = 3px^2 + \begin{matrix} 3q \\ -3p^2 \end{matrix}\, x \begin{matrix} +2r, \\ +p^3 \\ -3pq \end{matrix}$$

radices tres sunt,

$$x = p + \sqrt[3]{(r + \sqrt{(r^2 - q^3)})} + \sqrt[3]{(r - \sqrt{(r^2 - q^3)})}$$

$$x = p - \left(\frac{1 - \sqrt{-3}}{2}\right).\sqrt[3]{(r + \sqrt{(r^2 - q^3)})} - \left(\frac{1 + \sqrt{-3}}{2}\right).\sqrt[3]{(r - \sqrt{(r^2 - q^3)})}$$

$$x = p - \left(\frac{1 + \sqrt{-3}}{2}\right).\sqrt[3]{(r + \sqrt{(r^2 - q^3)})} - \left(\frac{1 - \sqrt{-3}}{2}\right).\sqrt[3]{(r - \sqrt{(r^2 - q^3)})}$$

Vel, ut calculus arithmeticus facilior ac paratior evadat, si posueris binomii irrationalis $r + \sqrt{(r - q^3)}$ radicem cubicam esse $m + \sqrt{n}$, erunt ejusdem æquationis radices tres

$$x = p + 2m \ \&\ x = p - m \pm \sqrt{-3n}.$$

Igitur data æquatione quavis cubica, inter ejus hujusque æquationis universalis terminos singulos instituenda est comparatio, quo pacto facillime invenientur ipsæ p, q, r; & hisce cognitis, innotescent æquationis datæ radices omnes. Hujus vero solutionis exempla sint sequentia in numeris.

1. Æquationis cubicæ

$$x^3 = 2x^2 + 3x + 4$$

sit radix x indaganda.

Erit primo juxta præscriptum $3p = 2$, sive $p = \frac{2}{3}$.

Se-

Secundo $3q - (3p^2)\,\frac{4}{3} = 3$, sive $q = \frac{13}{9}$.

Tertio $2r\,(+p^3 - 3q\cdot p) - \frac{70}{27} = 4$, sive $r = \frac{89}{27}$ & $r^2 - q^3 = \frac{212}{27}$.

Et propterea

$x = \frac{2}{3} + \sqrt[3]{\left(\frac{89}{27} + \sqrt{\frac{212}{27}}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{89}{27} - \sqrt{\frac{212}{27}}\right)}$. Reliquæ duæ radices sunt impossibiles.

2. In æquatione

$$x^3 = 12x^2 - 41x + 42,$$

erit primo $3p = 12$, sive $p = 4$.

Secundo $3q - (3p^2)\,48 = -41$, sive $q = \frac{7}{3}$.

Tertio $2r + (p^3 - 3q\cdot p)\,36 = 42$, sive $r = 3$.

Et inde $r^2 - q^3 = -\frac{100}{27}$.

At binomii surdi $3 + \sqrt{-\frac{100}{27}}$ $(= r + \sqrt{(r^2 - q^3)})$ radix cubica, per methodos ex arithmetica petendas extracta, est

$$-1 + \sqrt{-\frac{4}{3}},\ (= m + \sqrt{n},)$$

& proinde radix

$$x = (p + 2m = 4 - 2 =)\ 2$$

vel etiam

$$x = (p - m \pm \sqrt{-3n} = 4 + 1 \pm (\sqrt{4})\ 2 =)\ 7 \text{ vel } 3.$$

Vel rursus, ejusdem binomii $3 + \sqrt{-\frac{100}{27}}$, radix alia cubica (tres enim agnoscit) est

$$\frac{3}{2} + \sqrt{-\frac{1}{12}}\ (= m + \sqrt{n},)$$

&

& proinde radix

$$x = (p + 2m = 4 + 3 =)\ 7,$$

& etiam

$$x = (p - m \pm \sqrt{-3n} = 4 - \frac{3}{2} \pm (\sqrt{\frac{1}{4}})\ \frac{1}{2} = 3 \text{ vel } 2.$$

Vel denuo, ejusdem binomii $3 + \sqrt{-\frac{100}{27}}$ radix cubica tertia est

$$-\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{25}{12}},\ (= m + \sqrt{n},)$$

& proinde radix

$$x = (p + 2m = 4 - 1 =)\ 3,$$

atque etiam

$$x = (p - m \pm \sqrt{-3n} = 4 + \frac{1}{2} \pm (\sqrt{\frac{25}{4}})\ \frac{5}{2} =)\ 7 \text{ vel } 2.$$

3. In æquatione

$$x^3 = -15x^2 - 84x + 100,$$

erit $p = -5$, $q = -3$, $r = 135$; & binomii $135 + \sqrt{18252}$ radix cubica est $3 + \sqrt{12}$. Igitur radix

$$x = -5 + 6 = 1,$$

&

$$x = -5 - 3 \pm \sqrt{-36} = -8 \pm \sqrt{-36},$$

impossibiles.

4. In æquatione

$$x^3 = 34x^2 - 310x + 1012,$$

erit $p = \frac{34}{3}$, $q = \frac{226}{9}$, $r = \frac{5536}{27}$; & binomii $\frac{5536}{27} + \sqrt{\frac{707560}{27}}$ radix cubica est $\frac{16}{3} + \sqrt{\frac{10}{3}}$. Igitur radix

$$x = \frac{34}{3} + \frac{32}{3} = 22,$$

&

$$x = \frac{34}{3} - \frac{16}{3} \pm \sqrt{-10} = 6 \pm \sqrt{-10},$$

impoſſibiles.

5. In æquatione

$$x^3 = 28x^2 + 61x - 4048,$$

erit $p = \frac{28}{3}$, $q = \frac{967}{9}$, $r = -\frac{25010}{27}$; & binomii $-\frac{25010}{27} + \sqrt{-3823,7}$… radix cubica eſt $\frac{41}{6} + \sqrt{-\frac{243}{4}}$. Igitur

$$x = \frac{28}{3} + \frac{41}{3} = 23,$$

&

$$x = \frac{28}{3} - \frac{41}{6} \pm (\sqrt{\frac{729}{4}})\frac{27}{2} = 16 \text{ vel } -11.$$

6. In æquatione

$$x^3 = -x^2 + 166x - 660,$$

erit $p = -\frac{1}{3}$, $q = \frac{449}{9}$, $r = -\frac{9658}{27}$; & binomii $\frac{9658}{27} + \sqrt{-\frac{1147205}{27}}$

radix cubica eſt $-\frac{22}{3} + \sqrt{-\frac{5}{3}}$. Igitur

$$x = -\frac{1}{3} - \frac{44}{3} = -15,$$

&

$$x = -\frac{1}{3} + \frac{22}{3} \pm \sqrt{5} = 7 \pm \sqrt{5},$$

irrationales.

7. In æquatione

$x^3 =$

$$x^3 = 63x^2 + 99673x + 9951705,$$

erit $p = 21$, $q = \frac{100996}{3}$, $r = 6031680$; & binomii $6031680 + \sqrt{-\frac{47887175043136}{27}}$ radix cubica est $183 + \sqrt{-\frac{529}{3}}$. Igitur

$$x = 21 + 366 = 387,$$

&

$$x = 21 - 183 \pm (\sqrt{529})\, 23 = -139 \text{ vel } 185.$$

Nec secus in ceteris procedendum. Investigatur autem theorema ad modum sequentem. Pono æquationis cujusdam cubicæ radicem $z = a + b$, & cubice multiplicando proveniet

$$z^3 = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 =)\ a^3 + 3ab\,(a+b) + b^3.$$

Jam loco ipsius $a + b$ valorem ejus z substituendo, fiet

$$z^3 = 3abz + a^3 + b^3,$$

quæ est æquatio cubica ex radice $z = a + b$ constructa, cui terminus secundus deest. Ut hæc vero ad formam magis commodam, magisque concinnam revocentur, sumo æquationem

$$z^3 = 3qz + 2r, \text{ quæ posthac ipsius}$$

$$z^3 = 3abz + a^3 + b^3,$$

vices gerat. Igitur transmutatione hujus in illam, fiet primo $3q = 3ab$, sive $q^3 = a^3\, b^3$; & secundo $2r = a^3 + b^3$, sive $2r\, a^3 = (a^6 + a^3\, b^3 =)$ $a^6 + q^3$. Et soluta hac æquatione quadratica, erit

$$a^3 = r + \sqrt{(r^2 - q^3)},$$

& hinc

$$b^3 = (2r - a^3 =)\ r - \sqrt{(r^2 - q^3)}.$$

Atque igitur tandem

$$a = \sqrt[3]{(r + \sqrt{(r^2 - q^3)})}$$

&

$$b = \sqrt[3]{(r - \sqrt{(r^2 - q^3)})}.$$

C 2 Et

Et propterea in æquatione cubica $z^3 = 3qz + 2r$ erit radix

$$z = (a + b =) \sqrt[3]{r + (r^2 - q^3)} + \sqrt[3]{(r - \sqrt{(r - q^3)})}.$$

At vero hæc radix revera triplex eſt, pro triplici valore quem induere poteſt

$$\& \sqrt[3]{(r + \sqrt{r^2 - q^3})} \; \& \; \sqrt[3]{(r - \sqrt{(r^2 - q^3)})}.$$

Cujusvis enim quantitatis radix cubica triplex erit, & ipſius unitatis radix cubica

vel eſt 1, vel $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, vel $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

Atque id adeo, propterea quod harum alicujus cubus ſit unitas. Igitur ſi

$$1 \cdot \sqrt[3]{(r + \sqrt{(r^2 - q^3)})} \text{ aut } \sqrt[3]{r + \sqrt{r^2 - q^3}}$$

$$(= \sqrt[3]{(1 \cdot (r + \sqrt{(r^2 - q^3)}))} = \sqrt[3]{1}\,(\sqrt[3]{(r + \sqrt{(r^2 - q^3)})}) \;.$$

radicem aliquam [quam ſupra nominavimus $m + \sqrt{n}$, aut $1\,(m + \sqrt{n})$] cubi $r + \sqrt{(r^2 - q^3)}$ deſignet; ipſæ

$$\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \cdot \sqrt[3]{(r + \sqrt{(r^2 - q^3)})}$$

&

$$\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \cdot \sqrt[3]{(r + \sqrt{(r^2 - q^3)})}$$

[id eſt $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \cdot (m + \sqrt{n})$ & $\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \cdot (m + \sqrt{n})$]

alias duas ejusdem cubi radices deſignabunt. Similiter &

$$\sqrt[3]{(r - \sqrt{(r^2 - q^3)})},$$

$$\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \cdot \sqrt{(r - \sqrt{(r^2 - q^3)})},$$

&

$$\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \cdot \sqrt[3]{(r - \sqrt{(r^2 - q^3)})},$$

[id

[id est]

$$m - \sqrt{n},\ \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.(m-\sqrt{n}),\ \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.(m-\sqrt{n},)$$

tres cubicæ radices erunt apotomes $r - \sqrt{(r^2 - q^3)}$. Atque has radices debite connectendo, fiet

$$z = \sqrt[3]{(r + \sqrt{(r^2 - r^3)})} + \sqrt[3]{(r - \sqrt{(r^2 - q^3)})},$$

id est

$$z = (m + \sqrt{n}) + (m - \sqrt{n}) = 2m,$$

$$z = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\ (\sqrt[3]{(r^2-q^3)}) + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.\ \sqrt[3]{(r-\sqrt{(r^2-q^3)})}$$

id est

$$z = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.(m+\sqrt{n}) + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.(m-\sqrt{n}) =$$

$$-m + \sqrt{-3n},$$

&

$$z = -\frac{1-\sqrt{-3}}{2}.\ \sqrt[3]{(r+\sqrt{(r^2-q^3)})} +$$

$$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.\ \sqrt[3]{(r-\sqrt{(r^2-q^3)})}$$

id est

$$z = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\ (m+\sqrt{n}) + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\ (m-\sqrt{n})$$

$$= -m - \sqrt{-3n},$$

quæ tres erunt radices æquationis cubicæ $z^3 = 3qz + 2r$. Debite autem connectuntur radices istæ ad modum præcedentem, quippe quæ sic connexæ, & more vulgari in se invicem continuo ductæ, æquationem $z^3 = 3qz + 2r$ restituunt. Denique fac $z = x - p$, & æquatio fiet

$$x^3 - 3px^2 + 3p^2x - p^3 = 3qx - pq + 2r,$$

C 3 quæ

quæ universalis est, & cujus radices evadunt ut supra fuerunt exhibitæ.

Hic obiter notatu dignum est, quod æquationis cubicæ cujuscunque radices omnes sint possibiles & reales, quoties binomii membrum irrationale $\sqrt{(r^2 - q^3)}$ impossibilitatem in se complectitur; hoc est, quoties q est quantitas affirmativa, & simul cubus ejus major est quadrato ex latere r. At si membrum istud $\sqrt{(r^2 - q^3)}$ sit possibile, hoc est si q sit quantitas negativa, aut etiam si affirmativæ cubus sit minor quadrato ex latere r, tunc unicam tantum agnoscit æquatio radicem possibilem & realem, reliquæque duæ erunt impossibiles.

In hoc theoremate si fiat $p = 0$, hoc est, si desit æquationis terminus secundus, tunc deventum erit ad casum regularum quæ dicuntur *Cardani*, cujus solutio continetur in præcedentibus.

§. 2. Æquationis biquadraticæ universalis

$$x^4 = 4p x^3 + \begin{matrix} 2q \\ -4p^2 \end{matrix} x^2 + \begin{matrix} 8r \\ -4pq \end{matrix} x + \begin{matrix} 4s, \\ -q^2 \end{matrix}$$

radices quatuor sunt

$$x = p - a \pm \sqrt{(p^2 + q - a^2 - \frac{2r}{a})},$$

&

$$x = p + a \pm \sqrt{(p^2 + q - a^2 + \frac{2r}{a})},$$

Ubi a est radix æquationis cubica

$$a^6 = \begin{matrix} p^2 \\ +q \end{matrix} a^4 \begin{matrix} -2pr \\ -s \end{matrix} a^2 + r^2.$$

Jam data æquatione quavis biquadratica, inter ejus hujusque æquationis universalis terminos singulos instituenda est comparatio, quo pacto citissime invenientur ipsæ p, q, r, s; & hisce cognitis, non latebit valor ipsius a, ex theoremate superiori inveniendus, & tum demum innotescent æquationis datæ radices omnes.

Huic solutioni illustrandæ exemplum unum aut alterum sufficiat.

1. Æquationis biquadraticæ

$$x^4 = 8x^3 + 83x^2 - 162x - 936$$

sint radices extrahendæ. Erit primo juxta præscriptum

$$4p = 8, \text{ sive } p = 2.$$

Se-

Secundo

$$2q - (4p^3)\ 16 = 83,\ \text{sive}\ q = \frac{99}{2}.$$

Tertio

$$8r - (4pq)\ 396 = -162,\ \text{sive}\ r = \frac{117}{4}.$$

Quarto

$$4s - (q^2)\ \frac{9801}{4} = -936,\ \text{sive}\ s = \frac{6057}{16}.$$

Hinc

$$p^2 + q = \frac{107}{2},\ 2pr + s = \frac{7929}{16},\ r^2 = \frac{13689}{16},$$

& proinde

$$a^6 = \frac{107}{2} a^4 - \frac{7929}{16} a^2 + \frac{13689}{16}.$$

Jam ut æquatio hæc, aliquatenus cubica, in radices ejus resolvatur, ad theorema præcedens recurrendum est, in quo erit

$$p = \frac{107}{2},\ q = \frac{22009}{144},\ r = \frac{2903923}{1728},\ \&\ r^2 - q^3 = -\frac{11940075}{16}.$$

Atqui binomii

$$\frac{2903923}{1728} + \sqrt{-\frac{11940075}{16}}$$

radix cubica est

$$-\frac{53}{12} + \sqrt{-\frac{400}{3}}$$

& propterea

$$a^2 = \frac{107}{6} - \frac{53}{6} = 9,$$

&

& proinde

$$x = 5 - 12 \pm \sqrt{(25 + 176 - 144 + 64)} = -7 \pm (\sqrt{121})\ 11 = 4 \text{ vel } -18,$$

&

$$x = 5 + 12 \pm \sqrt{(25 + 176 - 144 - 64)} = 17 \pm \sqrt{-7}, \text{ impossibiles.}$$

Hujus autem theorematis inventio est hujusmodi. Ex duarum æquatiotionum quadraticarum $z^2 + 2az - b = o$, & $z^2 - 2az - c = o$ in se invicem multiplicatione, æquationem conficio biquadraticam

$$z^4 = (4a^2 + b + c)\, z^2 + (2ac - 2ab)\, z - bc,$$

cui terminus secundus deest, quamque huic æquationi

$$z^4 = ez^2 + fz + g$$

statuo æquipollere. Unde primo $4a^2 + b + c = e$, sive $b = e - 4a^2 - c$.

Secundo $2ac - 2ab = f$, hoc est,

$$2ac - 2ae + 8a^3 + 2ac = f, \text{ sive } c = \frac{f}{4a} + \frac{e}{2} - 2a^2,$$

& inde

$$b = (e - 4a^2 - c =) - \frac{f}{4a} + \frac{e}{2} - 2a^2.$$

Tertio $-bc = g$, sive

$$-\frac{f^2}{16a^2} + \frac{e^2}{4} - 2ea^2 + 4a^4 = -g,$$

hoc est,

$$a^6 = \frac{1}{2}ea^4 - \frac{1}{4}ga^2 - \frac{1}{16}e^2a^2 + \frac{f^2}{64},$$

quæ æquatio quasi cubica est, ex radice a^2 & notis vel assumptis e, f, g, conflata. Ea vero radix per theorema superius exhiberi potest; & eodem calculo innotescent ipsæ b & c. At æquationum

$$z^2 + 2az - b = o \;\&\; z^2 - 2az - c = o$$

radices sunt

$z =$

$$z = -a \pm \sqrt{(a^2 + b)} \ \& \ z = a \pm \sqrt{(a^2 + c)}$$

sive

$$z = -a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{2}e - a^2 - \tfrac{f}{4a})}, \ \& \ z = a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{2}e - a^2 + \tfrac{f}{4a})},$$

quæ proinde erunt radices æquationis $z^4 = ez^2 + fz + g$; cognita videlicet a vel a^2 ex æquatione

$$a^6 = \tfrac{1}{2}ea^4 - \tfrac{1}{4}ga^2 - \tfrac{1}{16}e^2a^2 + \tfrac{f^2}{64}.$$

Jam, ut æquatio ista evadat universalis & omnibus suis terminis instructa, fac $z = x - p$, eritque

$$x^4 - 4px^3 + 6p^2x^2 - 4p^3x + p^4 = ex^2 - 2pex + p^2e + fx - fp + g,$$

item &

$$x = p - a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{2}e - a^2 - \tfrac{f}{4a})}, \ \& \ x = p + a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{2}e - a^2 + \tfrac{f}{4a})}.$$

Tandem concinnitatis & compendii gratia, fac

$$e = 2q + 2p^2 \ \& \ f = 8r;$$

tum

$$x^4 - 4px^3 + 4p^2x^2 = 2qx^2 - 4pqx + 2p^2q + p^4 + 8rx - 8pr + g,$$

$$x = p - a \pm \sqrt{(p^2 + q - a^2 - \tfrac{2r}{a})}$$

$$x = p + a \pm \sqrt{(p^2 + q - a^2 + \tfrac{2r}{a})},$$

$$\& \ a^6 = (p^2 + q)\,a^4 - (\tfrac{1}{4}g + \tfrac{1}{4}p^4 + \tfrac{1}{2}p^2q + \tfrac{1}{4}q^2)\,a^2 + r^2.$$

Denique fac

$$g = 4s - q^2 + 8pr - p^4 - 2p^2q,$$

& fiunt æquationes præcedentes

$$x^4 = 4px^3 \begin{array}{l}+2q\\-4p^2\end{array} x^2 \begin{array}{l}+8r\\-4pq\end{array} x \begin{array}{l}+4s\\-q^2\end{array}$$

&

&

$$a^6 = \begin{array}{l} p^2 \\ +q \end{array} a^4 \begin{array}{l} -2pr \\ -s \end{array} a^2 + r^2.$$

Scilicet omnia evadunt ut ſupra ſunt poſita.

§. 3. Hactenus de æquationum cubicarum & biquadraticarum reſolutione analytica. Quoniam autem earundem *effectio geometrica* per parabolam vulgo tradi ſolet, & nonnullis in pretio eſt, ipſam συνοπτικῶς, & quidem univerſalius non pigebit hic exhibere.

Data æquatione quavis vel cubica vel biquadratica, inſtituenda eſt comparatio inter terminos ejus, terminosque reſpondentes hujus æquationis

$$x^4 = \begin{array}{l} \frac{2p}{q} \\ -4e \end{array} x^3 \begin{array}{l} +\frac{4pr}{q} \\ -4r^2 \\ +2s \\ -1 \end{array} x^2 \begin{array}{l} +\frac{2p^2}{q} \\ -\frac{2ps}{q} \\ +4rs \\ -2g \end{array} x \begin{array}{l} +p^2 \\ -q^2, \\ -s^2 \\ +t^2 \end{array}$$

quo pacto facile ſatis eruentur ipſæ p, q, r, s, t; earum interim una aliqua utcunque pro lubitu aſſumpta. Tum in parabola quavis data AVB, cujus vertex principalis V, axis VS, & axi perpendicularis VT, capiatur VS $= p$ verſus interiora parabolæ, & in angulo SVT inſcribatur ST $= q$, quæ producta parabolam ſecet in punctis binis N & O. Biſecetur ON in M, & per M agatur MA axi parallela & parabolæ occurrens in A. Ipſi ON parallela ducatur AL, ut ſit AL latus rectum parabolæ ad diametrum AM, ſitque hæc eadem unitas. In AL (utrinque, ſi opus eſt, producta) capiatur AG $= r$, & a puncto G ducatur GR axi parallela, quæ parabolam ſecet in B, a quo capiatur BR $= s$. A noviſſime invento puncto R ducatur RE ipſi VT parallela & æqualis, quæ ſiniſtram verſus jaceat, reſpectu ipſius R, ſi q ſit quantitas affirmativa, at verſus dextram ſi q ſit negativa. Atque idem de ipſis AG & BR intelligatur, quæ ad contrarias iiidem partes duci debent, ſi modo valores ipſarum r & s prodeant negativi. Denique centro E & radio EC $= t$ deſcribatur circulus CKkc, qui parabolam in totidem ſecabit punctis, quot ſunt æquationis datæ radices reales. Etenim a punctis iſtis C, K, &c. ducantur CP, Kπ &c. ipſi ST parallelæ, & ad rectam GR (ſi opus eſt, productam) terminatæ, eritque harum quævis x, ſeu æquationis datæ radix quæſita; eæ ſcilicet ad dextram jacentes erunt radices affirmativæ, quæ vero ad ſiniſtram ſunt poſitæ, erunt radices negativæ. Punctum contactus, ſi quod fuerit, hic ſumitur pro interſectionis punctis duobus ad invicem viciniſſimis. TAB. XII. Fig. 1.

Inter æquationes cubicas & biquadraticas ita constructas hoc tantum intercedit diſcriminis, quod in prioribus, ob terminum ultimum in præcedente æquatione deficientem, ſemper ſit

d 2 p^2-

$$p^2 - q^2 - s^2 + t^2 = 0,$$

five

$$t = \sqrt{(s^2 + q^2 - p^2)}.$$

Igitur centro C & radio

$$EB \; (= \sqrt{(BRq + (ERq) \; STq - VSq)})$$

descripto circulo CK*kc*, radicum una CP in priore constructione in nihilum abit.

Hæc autem demonstrantur ad modum sequentem. Manentibus jam constructis, & producta CP, si opus est, donec secet AM in H, erit CH ordinata parabolæ ad diametrum AH, & proinde CH*q* = AL . AH = AH, ob AL = 1. At CH = CP + AG, & AH = GB + BP, & propterea

$$CPq + 2AG \,.\, CP + AGq = GB + BP;$$

sed ob naturam parabolæ erit AG*q* = GB, unde

$$CPq + 2AG \,.\, CP = BP.$$

Jam a puncto C ad ipsam BP demittatur norma CD, quæ occurrat etiam ipsi EI, ad BP actæ parallelæ, in puncto I. Propter similia triangula CDP & TVS, erit $DP = \frac{VS \,.\, CP}{ST}$ & $CD = \frac{VT \,.\, CP}{ST}$, & proinde

$$CPq + 2AG \,.\, CP = BP = DP + BD = \frac{VS \,.\, CP}{ST} + BR - IE,$$

Sive

$$CPq + 2AG \,.\, CP - \frac{VS}{TS} CP - BR = - IE.$$

Ast

$$IEq = CEq - CIq =$$

$$CEq - CDq - VTq - 2CD \,.\, VT =$$

$$CEq - \frac{VTq \,.\, CPq}{STq} - VTq - \frac{2VTq \,.\, CP}{ST}$$

$$(\text{ob } VTq = STq - SVq)$$

$$= CEq - CPq + \frac{SVq}{STq} CPq - STq +$$

$$SVq - 2ST \cdot CP + \frac{2SVq}{ST} CP,$$

quæ igitur æqualis erit quadrato ex latere

$$CPq + 2AG \cdot CP - \frac{VS}{ST} CP - BR.$$

Atque hæc æquatio ad terminos p, q, r, s, t revocata ipsissima fit æquatio proposita.

Hinc liquet, quod eadem quævis æquatio biquadratica innumeras per parabolam constructiones sortiri possit, pro indefinito valore quantitatis istius, quam ad arbitrium assumi posse jam diximus. Sed casus est simplicissimus faciendo VS $= p = 0$, & migrat constructio, si rem ipsam spectes, in vulgarem istam, in qua radicum repræsentatrices rectæ CP, &c., sunt ad axem perpendiculares. Æquatio autem fit

$$x^4 = -4rx^3 \begin{array}{l} -4r^2 \\ +2s \\ -1 \end{array} x^2 \begin{array}{l} +4rs \\ -2q \\ \end{array} x \begin{array}{l} -q^2 \\ -s^2, \\ +t^2 \end{array}$$

quæ facile construitur ut supra.

§. 4. Sed ne parabolæ descriptio organica difficilis nimium videatur, in promptu est artificium quoddam mechanicum, ope fili penduli pondere instructi peractum, cujus auxilio quam exactissime & facillime æquatio novissima construi potest, & proinde æquationum quarumcunque cubicarum & biquadraticarum radices inveniri; idque sine ullo linearum ductu nisi rectarum & circuli. Constructio autem, quam appellare libet *mechanicam*, est ad hunc modum.

Contra parietem erectum, vel planum aliud quodvis horizonti perpendiculare, ad punctum aliquod F suspendatur filum tenuissimum & flexile FP; pondere quovis P ad extremitatem P appenso. In hoc filo notetur punctum aliquod N, a puncto suspensionis F satis remotum; vel filo parvulus, si id mavis, innectatur nodus N. Et sumpta utcunque NO pro unitate ad punctum medium A ducatur (in plano prædicto) recta AQ horizonti parallela, & utrinque quantum satis producta. Hisce generaliter paratis, pro particulari jam applicatione fac AQ $= r$; ipsis q, r, s, t, ut sæpius inculcatum, vel arithmetice vel geometrice, pro datæ cujusvis æquationis exigentia, in æquatione novissima prius determinatis. Tunc acu vel stylo tenuissimo, aut etiam cuspide circini admodum gracili, flectatur filum a loco suo ad punctum quoddam B, ita ut punctum N cadat in novissime invento puncto Q. In BQ ab isto B capiatur BR $= s$, & in R ad ipsam BR perpendicularis erigatur ER $= q$. Verum enim vero istæ AQ, BR, RE; ad contrarias partes ab earum initiis cadere debent, si for-

TAB. XII. Fig. 2.

forte valores ipsarum r, s, q, prodeant negativi. Denique in puncto invento E figatur circini crus unum, &, ad distantiam EZ $= t$ extensum, agatur crus alterum in orbem, secumque circumducat filum FZP. Hac fili circulatione pondus P nunc ascendet nunc descendet motu reciproco, ut & nodus N nunc supra rectam AQ extabit, nunc vero infra eandem deprimetur. Quoties autem reperietur nodus ille N in ipsa AQ, puta in punctis D, d, Δ, δ, abscindet is rectas DQ, dQ, ΔQ, δQ, quæ erunt æquationis datæ radices omnes reales; hæ nempe ad dextram erunt radices affirmativæ, illæ vero ad sinistram radices negativæ. Demonstratio est manifesta ex præcedentibus, habita tantum ratione parabolæ, per puncta B, C, c, k, K, transeuntis. Nam posito F foco parabolæ, (cujus distantia a vertice est $\frac{1}{4}$ON,) notum est quod lineæ omnes ut FB + BQ, FC + CD, &c, eandem ubique conficiant summam.

Atque ex principiis hic positis proclive erit instrumentum haud inconcinnum & quantumvis accuratum fabricari, cujus beneficio hujusmodi æquationum quarumcunque radices nullo fere negotio inveniri possint, & præ oculis exhiberi. Hoc autem quilibet, si id curæ sit, variis modis pro ingenio suo efficere potest, & de his jam satis.

ÆQUA-

ÆQUATIONUM QUARUNDAM

Potestatis tertiæ, quintæ, septimæ, nonæ, & superiorum, ad infinitum usque pergendo, in terminis finitis, ad instar regularum pro cubicis, quæ vocantur Cardani, resolutio analytica.

Per AB. DE MOIVRE, R. S. S.

Sit n numerus quicunque, y quantitas incognita, sive æquationis radix quæsita, sitque a quantitas quævis omnino cognita, sive ut vocant homogeneum comparationis; atque horum inter se relatio exprimatur per æquationem

$$ny + \frac{nn - 1}{2.3} ny^3 + \left(\frac{nn-1}{2.3}\right)\left(\frac{nn-9}{4.5}\right) ny^5 +$$
$$\left(\frac{nn-1}{2.3}\right)\left(\frac{nn-9}{4.5}\right)\left(\frac{nn-25}{6.7}\right) ny^7, \text{ \&c.} = a.$$

Ex hujus seriei natura manifestum est, quod si n sumatur numerus aliquis impar (integer scilicet, nec refert utrum sit affirmativus vel negativus) tunc series sponte sua terminabitur, & æquatio fiet una ex supra præfinitis, cujus radix est

$$(1)\ y = \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{\sqrt{(1+aa)}+a} - \frac{\tfrac{1}{2}}{\sqrt[n]{\sqrt{(1+aa)}+a}}$$

Vel

$$(2)\ y = \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{\sqrt{(1+aa)}+a} - \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{\sqrt{(1+aa)}-a}$$

Vel

$$(3)\ y = \frac{\tfrac{1}{2}}{\sqrt[n]{\sqrt{(1+aa)}-a}} - \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{\sqrt{(1+aa)}-a}$$

Vel

$$(4)\ y = \frac{\tfrac{1}{2}}{\sqrt[n]{\sqrt{(1+aa)}-a}} - \frac{\tfrac{1}{2}}{\sqrt[n]{\sqrt{(1+aa)}+a}}$$

Exem-

Exempli gratia, sit hujus æquationis potestatis quintæ

$$5y + 20y^3 + 16y^5 = 4$$

radix invenienda, quo in casu erit $n = 5$ & $a = 4$. Radix juxta formam primam erit

$$y = \frac{1}{2}\sqrt[5]{(\sqrt{17}+4)} - \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[5]{(\sqrt{17}-4)}}$$

quæ in numeris vulgaribus expeditissime explicari potest ad hunc modum. Est $\sqrt{17} + 4 = 8.1231$, cujus logarithmus 0.9097164, & hujus pars quinta 0.1819433, huic respondens numerus est $1.5203 = \sqrt[5]{(\sqrt{17}+4)}$. Ipsius vero 0.1819433 complementum arithmeticum est, 9.8180567, cui respondet numerus $0.6577 = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{\sqrt{17}+4}\right)}$. Igitur horum numerorum semidifferentia $0.4313 = y$.

Hic venit observandum quod loco radicis generalis, non incommode sumeretur $y = \frac{1}{2}\sqrt[n]{2a} - \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{2a}}$, quando numerus a respectu unitatis, est satis magnus, ut si æquatio fuerit

$$5y + 20y^3 + 16y^5 = 682,$$

erit log. $2a = 3.1348143$, cujus pars quinta 0.6269628, & huic respondens numerus 4.236. Complementi autem arithmetici 9.3730372 numerus est 0.236 & horum numerorum semidifferentia $2 = y$.

Atqui præterea, si in æquatione præcedenti signa alternatim sint affirmantia & negantia, vel quod eodem redit, si series obvenerit hujusmodi

$$ny + \frac{1-nn}{2.3}ny^3 + \left(\frac{1-nn}{2.3}\right)\left(\frac{9-nn}{4.5}\right)ny^5 +$$

$$\left(\frac{1-nn}{2.3}\right)\left(\frac{9-nn}{4.5}\right)\left(\frac{25-nn}{6.7}\right)ny^7, \text{ \&c.} = a$$

erit hujus radix

$$(1)\ y = \frac{1}{2}\sqrt[n]{(a+\sqrt{(aa-1)})} + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{(a+\sqrt{(aa-1)})}}$$

vel

vel

$$(2)\ y = \frac{1}{2}\sqrt[n]{(a+\sqrt{(aa-1)})} + \frac{1}{2}\sqrt[n]{(a-\sqrt{(aa-1)})}$$

vel

$$(3)\ y = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{(a-\sqrt{(aa-1)})}} + \frac{1}{2}\sqrt[n]{(a-\sqrt{(aa-1)})}$$

vel

$$(4)\ y = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{(a-\sqrt{(aa-1)})}} + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{(a+\sqrt{(aa-1)})}}$$

Hic autem notandum, quod si $\frac{n-1}{2}$ numerus extiterit impar, radicis inventæ signum in ei contrarium permutandum est.
Proponatur æquatio

$$5y - 20y^3 + 16y^5 = 6,$$

unde $n = 5$ & $a = 6$. Erit radix $= \frac{1}{2}\sqrt[5]{(6+\sqrt{35})} + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[5]{(6+\sqrt{35})}}$.

Vel, quoniam $6+\sqrt{35} = 11.916$, erit hujus logarithmus 1.0762804 & ejus pars quinta 0.2152561, complementum verò arithmeticum 9.7847439. Horum logarithmorum numeri sunt 1.6415 & 0.6091 respective, quorum semisumma $1.1253 = y$.

Verum si acciderit ut a sit minor unitate, tunc radicis forma secunda, ut quæ proposito est magis conveniens, præ reliquis seligenda est. Sic si æquatio fuerit

$$5y - 20y^3 + 16y^5 = \frac{61}{64},$$

erit

$$y = \frac{1}{2}\sqrt[5]{(\frac{61}{64} + \sqrt{\frac{-375}{4096}})} + \frac{1}{2}\sqrt[5]{(\frac{61}{64} - \sqrt{\frac{-375}{4096}})}.$$

 Et

Et quidem si binomialium radix quintana ullo pacto extrahi queat, prodibit radix proba & possibilis, etsi expressio ipsa impossibilitatem mentiatur. Binomialis vero $\frac{61}{64} + \sqrt{\frac{-375}{4096}}$ radix quintana est $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{-15}$, & binomialis $\frac{61}{64} - \sqrt{\frac{-375}{4096}}$ radix itidem quintana est $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{-15}$, quorum binomialium semisumma $= \frac{1}{4} = y$.

Si autem extractio ista vel non peragi posset, vel etiam difficilior videretur, res ubique confici potest per tabulam sinuum naturalium ad modum sequentem.

Ad radium 1 sit $a = \frac{61}{64} = 0.95312$ sinus arcus cujusdam, qui proinde erit $72^\circ: 23'$ cujus pars quinta (eo quod $n = 5$) est $14^\circ: 28'$; hujus sinus $0.24981 = \frac{1}{4}$ proxime. Nec secus procedendum in aequationibus graduum superiorum.

DE

DE CONSTRUCTIONE PROBLEMATUM

ſolidorum, ſive æquationum tertiæ vel quartæ poteſtatis, unica data parabola ac circulo efficienda; diſſertatiuncula.

Authore EDM. HALLEY.

Quo pacto æquationes omnes cubum vel quadrato-quadratum quantitatis incognitæ involventes, ope parabolæ cujuſcunque datæ & circuli, conſtrui poſſint, clare tradit ac liquide demonſtrat præclarus ille *Carteſius* in Lib. III. Geometriæ ſuæ. Sed primum jubet ſecundum æquationis terminum, ſi adfuerit, tollere, ac deinde reductæ æquationis radices regula ibidem expoſita elicere. Cum vero operatio iſta nimis laborioſa videatur, nonnullis viſum eſt conſtructionem ſimilem etiam abſque ulla prævia reductione comminiſci; inter quos *Franciſcus* a *Schooten* methodum valde facilem ac ſimpliciſſimam pro conſtruendis cubicis quomodolibet affectis prodidiſſet, ſi modo, expoſito principio unde regulam derivavit, Lectoris memoriæ, quam plurimis ac intricatis cautionibus obruit, melius ſtuduiſſet. Nuper vero Vir Cl. D. *Thomas Baker* noſtras, integro libello de conſtructionibus hiſce conſcripto, non ſolum cubicas, ſed etiam biquadraticas omnes cujuſcunque generis unica generali regula complexus eſt, eamque demonſtrationibus ac exemplis per omnes caſus abunde ſatis illuſtravit; nec non ſub finem modum proponit unde regula iſta generalis inveſtigari poſſit. Haud tamen illum ipſum oſtendit, cujus ope (uti ſuſpicor) clavem ſuam geometricam catolicam obtinuit, vel, ſaltem multo facilius obtinere potuit. Cumque perplexis cautionibus de ſignis + & −, regula hæc D. *Bakeri* non minus obnoxia fuit quam illa *Schooteni*, ut vix abſente libro conſtructiones illas quis tuto peragat; haud injucundum nec tyronibus incommodum fore viſum eſt, utriuſque fundamentum exponere, ac ſimul, emendata methodo, in re tam difficili, lucem quantum valeam afferre.

Conſtructio quam tradit *Carteſius*, quæque facillime radices æquationum omnium cubicarum vel biquadraticarum, ubi deficit ſecundus terminus, eruit, ut nota, ſupponi poteſt; attamen cum cardo ſit a quo ſubſequentia pendent, ne diſſertatiuncula hæc capite truncata videatur, ex illius Geometria deſumptam placuit regulam adjungere, paucis nonnullis in melius, uti reor, tranſpoſitis.

Deficiente ſecundo termino omnes æquationes cubicæ reducuntur ad hanc formam

$$z^3 *. \; apz. \; aaq = o,$$

ac biquadraticæ ad hanc

$$z^4. *. apzz. aaqz. a^3r = o.$$

(ubi *a* designat latus rectum parabolæ cujusvis datæ, quam in constructione adhibere licet,) vel sumendo *a* pro unitate, ad hanc

$$z^3 *. pz. q = o,$$

vel ad hanc

$$z^4 *. pzz. qz. r = o.$$

TAB. XII. Fig. 3. Jam data parabola FAG cujus axis sit ACDKL ac latus rectum *a* vel 1, fiat AC ejus dimidium, ac collocetur semper a vertice A versus interiora figuræ: dein sumatur CD $= \frac{1}{2}p$ in linea illa AC continuata versus C, si in æquatione fuerit $-p$, vel versus alteram partem si habeatur $+p$. Porro e puncto D, aut ex puncto C si non habeatur quantitas *p*, erigenda est ad axem perpendicularis DE æqualis $\frac{1}{2}q$, dextrorsum quidem si fuerit $-q$, ad alterum vero axis latus si fuerit $+q$; ac circulus centro E radio AE descriptus, si æquatio fuerit tantum cubica, parabolam tot punctis F & G intersecabit quot veras habet radices, quarum quidem affirmativæ ut GK erunt ad dextram axis partem, negativæ ut FL ad sinistram.

At si æquatio biquadratica fuerit, augeri vel minui debet circuli radius AE, addendo, si fuerit $-r$, vel subducendo, si sit $+r$, ex ejus quadrato rectangulum *ar*, seu contentum sub latere recto & quantitate data *r*; id quod nullo fere negotio efficitur geometrice. Hujus vero circuli intersectiones cum parabola omnes veras biquadraticæ æquationis radices dimissis ad axem perpendiculis exhibebunt; affirmativas quidem ad dextram axis; negativas vero ad sinistram. Totius demonstrationem *Cartesio* ejus inventori relinquo.

Notandum hic me operam dare ut semper habeantur radices affimativæ ad dextrum axis latus, ut evitetur confusio a pluribus cautionibus, quarum causa minime evidens est, necessario oritura.

His præmissis, ut aditus pateat ad constructionem etiam earum æquationum ubi reperitur terminus secundus, consideranda venit regula pro tollendo termino secundo, ac reducenda æquatione ad aliam, quæ methodo præcedente construi possit. Omnes vero hujus classis æquationes cubicæ ad hanc formam

$$z^3. bzz. apz. aaq = o,$$

vel ad hanc

$$z^3. bzz. *. aaq = o;$$

biquadraticæ vero ad hanc

$$z^4.\ bz^3.\ apzz.\ aaqz.\ a^3r = 0,$$

vel hanc

$$z^4.\ bz^3.\ *.\ aaqz.\ a^3r = 0,$$

vel

$$z^4.\ bz^3.\ apzz.\ *.\ a^3r = 0$$

vel denique ad hanc

$$z^4.\ bz^3.\ *.\ *.\ a^3r = 0$$

reduci possunt: e quibus omnibus, prout signis + & — diversimode connectantur, ingens oritur varietas, unde regula generalis omnibus inserviens obscura ac maxime difficilis redditur, nisi methodo quam subjungimus illustrata nodisque extricata tractetur.

Tollitur in biquadraticis secundus terminus, ponendo $x = z + \frac{1}{4}b$, si fuerit $+ b$ in æquatione vel $x = z - \frac{1}{4}b$ si fuerit $- b$: hinc $x - \frac{1}{4}b$ in primo casu, & $+ \frac{1}{4}b$ in altero æquatur z; & in æquatione quavis proposita, substituta loco z quantitate æquali prodibit nova æquatio termino secundo carens, cujus radices omnes x data differentia $\frac{1}{4}b$ vel excedunt vel deficiunt a radice quæsita z. Cum vero in rebus istiusmodi plus exempla quam præcepta valere soleant, proponatur una vel altera æquatio construenda.

Exemplum I.

$$z^4 + bz^3 - apzz - aaqz + aaar = 0.$$

Sit

$$x - \frac{1}{4}b = z$$

Et erit

$$xx - \frac{1}{2}bx + \frac{1}{16}bb = zz$$

&

x^3

$$x^3 - \frac{3}{4} bx^2 + \frac{3}{16} b^2x - \frac{1}{64} b^3 = z^3$$

&

$$x^4 - bx^3 + \frac{3}{8} bbxx - \frac{1}{16} b^3 x + \frac{1}{256} b^4. = z^4.$$

hinc

$$\begin{array}{rl} x^4 - bx^3 + \frac{3}{8} bbxx - \frac{1}{16} bbbx + \frac{1}{256} b^4. & = z^4 \\ + bx^3 - \frac{3}{4} bbxx + \frac{3}{16} bbbx - \frac{1}{64} b^4 & = + bz^3 \\ - apxx + \frac{1}{2} apbx - \frac{1}{16} apbb & = - apzz \\ - aaqx + \frac{1}{4} aaqb & = - aaqz \\ + aaar & \end{array}$$

Harum omnium ſumma fit æquatio nova ſecundo termino carens, quæque proinde juxta regulam carteſianam conſtrui poſſit, ſumendo loco $\frac{1}{2} p$ dimidium coefficientis termini tertii per a, ſive latus rectum, diviſi, hoc eſt $- \frac{3bb}{16a} - \frac{1}{2} p$; ac loco $\frac{1}{2} q$, dimidium coefficientis termini quarti per aa diviſi, ſive $+ \frac{bbb}{16aa} + \frac{pb}{4a} - \frac{1}{2} q$. Cujus partes ſigno + notatæ ſiniſtrorſum ab axe, ſigno — notatæ dextrorſum collocandæ ſunt, ut habeatur centrum circuli ad conſtructionem requiſiti, ac cujus interſectiones cum parabola, dimiſſis in axem perpendiculis, radices omnes veras x deſignent, affirmativas quidem ad dextram axis, negativas vero ad ſiniſtram. Cum vero $x - \frac{1}{4} b = z$, ducendo lineam axi parallelam, ad dextrum ejus latus & ad diſtantiam $\frac{1}{4} b$, perpendicula illa ad hanc parallelam terminata deſignabunt omnes radices quæſitas z, affirmativas ad dextram, negativas vero ad ſiniſtram. Radium circuli quod attinet, habetur ille addendo partes negativas ac auferendo partes affimativas termini quinti per aa diviſi, e quadrato lineæ AE, a centro invento E ad verticem parabolæ A ductæ: id quod maxima ex parte efficitur capiendo, loco lineæ AE, lineam, quæ ad interſectionem parabolæ ac parallelæ prædictæ terminatur; ejus enim quadratum omnes termini quinti partes ex ablatione termini ſecundi æquationi novæ ingeſtas complectitur (uti facile probabitur:) ac reſtat ſolummodo ut hujus lineæ quadratum augeatur, ſi in æquatione habea-

tur

tur $-r$, vel minuatur si sit $+r$, additione vel subductione rectanguli ar, unde conflatur quadratum radii circuli quæsiti.

Hæc est methodus investigandi regulam centralem D^ni *Bakeri* omnibus cautionibus libera ac satis facilis; ac sola differentia ex eo provenit, quod ego juxta axem, ille vero juxta axi parallelam circuli ejusdem centrum determinat: quodque ego semper radices affirmativas ex axis dextro latere invenio, quas ille nunc dextro nunc sinistro constituit.

Æquationes cubicas quod attinet, eæ reduci debent ad biquadraticas, antequam eadem regula generali construi possint; id quod fit ducendo æquationem propositam in radicem suam z, unde provenit æquatio biquadratica in qua deficit terminus ultimus sive r: quapropter sublato secundo termino & invento centro E, circulus ducendus est per ipsam intersectionem parabolæ & parallelæ ad axem superius memoratæ; cum scilicet ar sit $= o$, & in nova æquatione totus terminus quintus ex ipsa ablatione termini secundi oriatur. Construenda sit hæc æquatio.

Exemplum II.

$$z^3 - bzz + apz + aaq = 0:$$

Quæ ducta in z fit

$$z^4 - bz^3 + apzz + aaqz = 0,$$

Ad tollendum secundum termiinum ponatur $x + \frac{1}{4}b = z$, & fiet

$$\begin{aligned}
x^4 + bx^3 + \tfrac{3}{8}bbxx + \tfrac{1}{16}b^3x + \tfrac{1}{256}b^4 &= +z^4\\
-bx^3 - \tfrac{3}{4}bbxx - \tfrac{3}{16}b^3x - \tfrac{1}{64}b^4 &= -bz^3\\
+ apxx + \tfrac{1}{2}abpx + \tfrac{1}{16}apbb &= +apzz\\
+ aaqx + \tfrac{1}{4}aaqb &= +aaqz
\end{aligned}$$

In hac nova æquatione, tertii termini semicoefficiens per a divisa, id est $-\frac{3bb}{16a} + \frac{1}{2}p$, loco $\frac{1}{2}p$ usurpanda est; ac coefficientis termini quarti dimidium, divisum per aa, lateris recti quadratum, id est $-\frac{bbb}{16aa} + \frac{pb}{4a} + \frac{1}{2}q$, vicem ipsius $\frac{1}{2}q$ in constructione *Cartesii* subit; unde centrum E determinatur. Deinde ducta axi parallela ad distantiam $\frac{1}{4}b$ ad sinistrum ejus latus (ob $x + \frac{1}{4}b = z$) cujus intersectio cum parabola sit O; circulus centro E, radio EO descriptus parabolam secabit vel

vel tanget in tot punctis quot æquatio veras habet radices: quæ quidem radices, seu z, sunt perpendicula de punctis illis in axi parallelam demissa, ad dextram quidem affirmativæ, negativæ ad sinistram.

Si in æquatione defuerit terminus tertius, vel quartus, vel uterque, in investiganda regula centrali nulla omnino observanda est methodi differentia, sed deficiente quantitate p vel q, deerunt partes illæ linearum CD ac DE ex quantitate illa aliquo modo deductæ, ac procedendum est cum reliquis coefficientibus termini tertii & quarti in æquatione nova, sicut in præmissis exemplis præscriptum est.

Hactenus Cl. *Bakeri* methodum generalem pertractavimus, qua quidem nulla alia facilior ac paratior expectanda est, assumpta ad constructionem sive parabola, sive alia quævis linea curva, cum scilicet æquatio ad biquadraticam ascendit. Etenim dum hæc scribo mihi occurrit regulæ centralis effectio geometrica præter omnem spem expedita, ac harum rerum curiosis abunde satisfactura.

TAB. XII. Fig. 4. Descripta parabola NAM, cujus vertex A, axis ABC ac latus rectum a, reducatur æquatio ad hanc formam

$$z^4.\ az^3.\ apzz.\ aaqz.\ a^3r.\ = o\ \cdot$$

vel ad hanc

$$z^3.\ bzz.\ apz.\ aaq = o$$

si cubica tantum fuerit: dein ad distantiam BD $= \frac{1}{4} b$ ducatur linea DH axi parallela, ad sinistram quidem si fuerit $-b$, ad dextram si $+b$, parabolæ occurrens in puncto D; de quo dimittatur perpendiculum in axem BD. In linea AB continuata versus B fiat BK $= \frac{1}{2} a$, & ducatur linea DK utrinque interminata. Porro sit KC $=$ 2AB in axe semper ultra K continuato; ac si habeatur quantitas p signo $-$ affecta, versus easdem partes etiam sumatur CE $= \frac{1}{2} p$, vel in contrarias, si habeatur $+p$, ac e puncto E erigatur axi perpendiculum EF (vel e puncto C si defuerit quantitas p) lineæ DK, si opus est continuatæ, occurrens in puncto F; quod quidem circuli requisiti centrum est, si defuerit quantitas q. Ast si habeatur q, sumenda est in FE, si opus est continuata, linea FG $= \frac{1}{2} q$, sinistrorsum quidem si fuerit $+q$, dextrorsum si $-q$ collocanda: & punctum G erit centrum circuli ad constructionem propositam idonei, ejusque radius, si defuerit quantitas r, hoc est si tantum cubica fuerit, erit linea GD; cujus quadratum in biquadraticis augendum est, si fuerit $-r$, vel minuendum si $+r$, additione vel subductione rectanguli sub r & latere recto. Descripto sic circulo, ab intersectionibus ejus cum parabola demissis

missis in lineam DH perpendiculis, quæ ad sinistram sunt, ut NO, radices æquationis negativas semper designant, quæ ad dextram, ut ML, affirmativas.

Aliter ac paulo simplicius æquationes cubicæ juxta *Schooteni* regulam construuntur, quaque etiam radices ad axem referuntur: quoniam vero ipse inventor nec modum inveniendi nec demonstrationem inventi exponit, non abs re erit ejusdem fundamentum hic adjicere, simulatque effectionem geometricam concinniorem reddere, atque cautionibus, quibus implicatur, extricare.

Hæc regula derivatur ex eo quod omnis æquatio cubica reduci possit ad biquadraticam, in qua deficiet terminus secundus. Hoc fit ducendo æquationem propositam in $z - b = o$, si fuerit $+ b$ in æquatione, vel in $z + b = o$, si fuerit $- b$; & æquatio nova producta easdem habebit radices cum cubica, atque insuper alteram ipsi $- b$ æqualem, si fuerit $- b$ in æquatione; vel contra.

Proponatur construenda

$$z^3 - z^2 b + apz + aaq = o.$$

Hæc ducta in $z + b$ fit

$$z^4 - z^3 b + apz^2 + aaqz$$
$$+ z^3 b - bbzz + abpz + aaqb.$$

Hic deficit secundus terminus, ac coefficiens tertii $- bb + ap$ dat $- \frac{bb}{2a} + \frac{1}{2} p$ loco $\frac{1}{2} p$ vel CD in constructione *Cartesii*, & ex dimidio coefficientis termini quarti fit $+ \frac{1}{2} q + \frac{bp}{2a}$ loco $\frac{1}{2} q$ vel DE usurpanda; adeoque determinatur centrum circuli quæsiti: atque ob datam unam ex radicibus æquationis novæ, id est $-$ vel $+ b$, dabitur etiam punctum in circumferentia, id est radius ejus. Denique descripto circulo, ab intersectionibus ejus cum parabola demissa in axem perpendicula æquationis radices exhibebunt, affirmativas & negativas, eadem lege ac supra. Fig. 3.

Investigatur autem centrum circuli constructione perquam facili, ceterisque omnibus cubicis præferenda. Descriptæ parabolæ AMD sit vertex A, atque axis AF: ad distantiam ipsi b æqualem ducatur axi parallela DK, ad dextram si fuerit $+ b$ in æquatione, ad sinistram si $- b$, quæ parabolæ occurrat in puncto D. Centris D & A describantur radiis æqualibus arcus occulti utrinque sese intersecantes, ac per sectionum puncta ducatur linea interminata BC, quæ medio lineæ suppositæ AD perpendiculariter insistat, & axi occurrat in puncto E. Ab E, inferne quidem si in æquatione habeatur $- p$, vel superne versus A si fuerit $+ p$, Tab. XIII. Fig. 1.

ponatur EF $= \frac{1}{2}p$; & ex F (vel ex E si defuerit p) educatur perpendiculum FG, lineæ BC occurrens in puncto G; & in GF producta fiat GH $= \frac{1}{2}q$, dextrorsum quidem si in æquatione habeatur $-q$, aliter, sinistrorsum, applicanda: ac punctum H erit centrum quæsitum, HD vero circuli radius, qui demissis in axem perpendiculis ab intersectionibus suis cum parabola, ut LM, radices omnes, ut prius, commonstrabit. Quomodo vero constructio hæc ex præmissis consequatur, per se satis evidens est, nec opus est ut in eadem demonstranda diutius immorer.

Ne in his edendis frustraneam navasse operam, & ex aliorum inventis gloriolam captare videar, consulat Lector Cl. *Bakeri* librum Anno 1684. *Londini* editum, & quæ de hoc argumento scripsit a *Schooten* in commentario suo in Librum III. Geometriæ cartesianæ. Brevi concesso otio tractatulum alium de numero radicum in hujusmodi æquationibus, earumque limitibus, ex contemplatione constructionum præcedentium, aggredi ac in lucem proferre statuo.

DE

DE NUMERO RADICUM

In æquationibus solidis ac biquadraticis, sive tertiæ ac quartæ potestatis, earumque limitibus, tractatulus.

Authore E. HALLEY.

Cum in tractatulo, quem nuper publici juris feci in actis Philosophicis, Num. 188; methodum aperuissem, qua problemata solida utcunque affecta minimo negotio, unica data parabola & circulo, simplicissime construi possint; sub finem mihi sese obtulit contemplatio jucunda satis, nempe ex his constructionibus numerum radicum in quavis æquatione, earumque limites ac signa facile consequi ac determinari: quocirca fidem dedi me brevi de hac materia dissertatiunculam aliquam scripturum, in qua si non Principibus, saltem secundæ classis Geometris, me non ingratum nec inutile præstiturum omnino persuasum habui.

Propius vero inspicienti mihi compertum est, me imprudentem inter ardua geometrica illapsum, ac jam iis tractandis designatum, quibus olim laboravere Viri illustres *Harriottus* nostras, ac *Cartesius*; in quibus pari fato utrique paralogismum, (forsan in eorum scriptis geometricis unicum) diverso tamen modo, admisere, uti posthac probabitur: sed *Quandoque bonus dormitat.* Quapropter agnita rei tum difficultate tum præstantia, totis viribus incumbere statui, ne promissis exequendis impar crederer, ac ne geometriæ pars tam eximia, tamque parum culta, diutius tenebris involuta lateret; sed ope nostra lucide his paucis exposita daretur.

Imprimis vero Lectorem monitum velim, quod dum his legendis operam dat, oportet prædictam dissertationem Num. 188. editam, ad manum habere, ac constructiones ibidem traditas probe callere; quia quæ sequuntur ab illis maxima ex parte pendent, quas tamen hic repetere vix integrum esset.

Ex *Cartesio* & ex ibi dictis constat, tam in cubicis, quam in biquadraticis æquationibus, radices exponi posse demittendo perpendicula in axem, datamve diametrum parabolæ datæ, ab intersectionibus curvæ illius cum circulo. Cumque circulus parabolam secans, vel in quatuor vel duobus punctis eam intersecare necesse est, constat in biquadraticis vel duas vel quatuor radices veras, affirmativas vel negativas, semper haberi; uti etiam si forte circulus illam tangat, quo in casu æqualitas duarum radicum ejusdem signi concluditur. In cubicis autem, quoniam una ex intersectionibus ad constructionem requiritur, non nisi una vel tres reliquæ radices designant unam vel tres; uti in casu contactus, unde constat duas æquales reperiri radices, problemaque, unde resultat æquatio, revera planum esse.

 Cu-

Cubicæ itaque omnes, quomodocunque affectæ, una vel triplici radice explicabiles sunt, utique semper possibiles, nempe si radices negativas pro veris admiseris: sed biquadraticæ, quarum terminus ultimus r signo — affectus est, duabus vel quatuor. Ast si habeatur $+ r$ in æquatione, eaque
TAB. XII. Fig. 4. tanta sit, ut $\sqrt{(GDq - ar)}$, minor sit quam ut circulus, eo radio ac centro G descriptus, parabolam contingere in aliquo puncto possit, æquatio data omnino impossibilis est, nec ulla radice negativa vel affirmativa explicabilis. Sed de his plura in sequentibus.

Quoniam vero tanta intercedit differentia inter casus cubicarum & biquadraticarum, ut simul comprehendi nequeant; primum cubicas deinde alteras tractabimus. Cubicæ vero infinitis circulis in data parabola construuntur, biquadraticæ autem unico tantum, saltem his methodis: id adeo quia ponendo $z - e$, sive indeterminata aliqua, æqualem nihilo, æquatio cubica reducitur ad biquadraticam easdem radices cum cubica habentem, atque insuper aliam ipsi e æqualem; unde fit ut tot circulis diversis construi possit cubica, quot imaginari velis quantitates e, id est infinitis. Inter has vero constructiones, illa quam superius (§. ult.) dedi, longe facillima est. Huic tamen non multum cedit alia, quæ ad enucleationem numeri radicum, earumque limitum magis accommodata videtur, quæque ortum trahit ex ablatione secundi termini, ponendo modo vulgari $x = z +$ vel $-$
TAB. XIII. Fig. 2. tertia parte coefficientis termini secundi. Hæc autem est. Data parabola ABY ejusque vertice A, axe AE & latere recto a, reducatur æquatio ad formam consuetam, id est

$$z^3.\ bz^2.\ apz.\ aaq = o.$$

Deinde ad distantiam $\frac{1}{3}b$ ducatur axi parallela BK, dextrorsum quidem si fuerit $+ b$, aliter sinistrorsum, parabolæ occurrens in B; ac lineæ suppositæ AB erigatur perpendicularis utrinque interminata DP, axi occurrens in puncto G. De B in axem demitte perpendiculum BC, & ipsi AC fiat GE semper æqualis, ac versus inferiora ponatur. Ab E fiat EH $= \frac{1}{2}p$, sursum quidem, si in æquatione fuerit $+ p$, deorsum vero si $- p$, ac e puncto H (vel ex E si defuerit quantitas p) educatur perpendiculum HQ interminatæ DP occurrens in puncto O. Denique in linea HQ interminata, fiat OR $= \frac{1}{2}q$, ab O dextrorsum si fuerit $- q$, sinistrorsum si $+ q$, collocanda: ac circulus centro R, radio RA descriptus, tot punctis secabit parabolam, quot æquatio proposita veras habet radices; eæque erunt perpendicula ZY a punctis intersectionum Y in axi parallelam BK demissa; quarum quæ ad dextram lineæ BK affirmativæ sunt, ad sinistram negativæ.

Hujus constructionis commoditas in eo consistit, quod circulo per verticem transeunte peragitur, perinde ac si defuisset secundus terminus; ideoque

que

que ad radicum numerum determinandum, sufficit loci sive lineæ curvæ proprietates perspectas habere, quæ spatia discriminat, ubi si ponatur centrum circuli qui per parabolæ verticem transeat, circumferentia ejus vel uno vel tribus aliis punctis eam secabit; hoc est lineæ curvæ, in quam incidunt centra omnium circulorum per verticem transeuntium ac deinde parabolam tangentium, naturam definire.

Locus autem ille est paraboloïs, quam cum *Cl. Wallisio* semicubicalem appellare licet, sive in qua cubi applicatarum ad axem sunt inter se ut quadrata portionum axis. Hujus latus rectum est $\frac{27}{8}$ lateris recti datæ parabolæ, vertex vero punctum V existente AV dimidium lateris recti ejusdem parabolæ. Hoc est, si ponatur unitas pro latere recto datæ parabolæ, $\frac{8}{27}$ cubi ordinatim applicatæ æquabuntur quadrato partis diametri, sive cubus ex $\frac{2}{3}$ VH quadrato ex HR, si scilicet R sit centrum circuli qui per verticem parabolæ transeat, eamque deinde contingat. Hæc est curva illa quam primus mortalium *Nelius* nostras rectæ datæ æqualem demonstravit, eaque occasione apud principes Geometras dudum celebris; ejusque proprietates *Cl. Wallisius* sub finem libri *de Cissoide*, & *Hugenius* *Prop.* 8. & *9. de linearum curvarum Evolutione*, aliique acri ingenio disquisivere, quorum scripta consulat Lector. Hæc curva utrinque ab axe parabolæ descripta, id est VNL, VPX, spatium complectitur, in quo si ponatur centrum circuli, qui per verticem A transeat, intersecabit ille parabolam in tribus aliis punctis; spatia vero ab axe remotiora centra præbent circulis non nisi uno præter verticem puncto parabolam secantibus.

His probe intellectis, jam ad determinandum radicum numerum accingimur. Ac primum deficiat secundus terminus; fitque latus rectum 1, vel $AV = \frac{1}{2}$; in constructione VH est $\frac{1}{2}p$, HR vero $\frac{1}{2}q$; cumque si fuerit $+p$, ab V versus superiora ponenda sit $\frac{1}{2}p$, centrum circuli extra spatium LVX semper constituitur; ideoque una tantum radice explicabilis est, affirmativa si $-q$, negativa si $+q$: quæ quidem radices *Cardani* regulis investigantur. Si vero fuerit $-p$, $VH = \frac{1}{2}p$ inferne ponitur, ac fieri potest ut HR cadat inter axem & curvam VX vel VL, si scilicet cubus ex $\frac{2}{3}$ VH, sive ex $\frac{1}{3}p$, major sit quam quadratum ex $\frac{1}{2}q$, sive $\frac{1}{27}p^3$ major quam $\frac{1}{4}qq$, quo in casu tres dantur radices, duæ negativæ, si fuerit $-q$, ac una affirmativa earum summæ æqua-

æqualis; vel ſi $+ q$, duæ affirmativæ unaque negativa. Quod ſi $\frac{1}{27}p^3$ minor ſit quam $\frac{1}{4}qq$ una tantum reperitur radix, affirmativa ſi $- q$, negativa ſi $+ q$. Atque hæc paſſim docentur ab iis qui hanc geometriæ partem tractarunt.

Jam adſint omnes termini, ac primum poponatur, e. g. æquatio hæc

$$z^3 - z^2 b + zp - q = 0;$$

cui etiam Figuram 2. adaptavimus. In cujus conſtructione BC $= \frac{1}{3}b$, VG $= \frac{1}{2}$ AC $= \frac{1}{18}bb$, VE $\frac{1}{6}bb$, VH $\frac{1}{6}bb - \frac{1}{2}p$, GH $\frac{1}{9}bb - \frac{1}{2}p$ vel $\frac{1}{2}p - \frac{1}{9}bb$, hinc HO $= \frac{1}{27}b^3 - \frac{1}{6}bp$, vel $\frac{1}{6}bp - \frac{1}{27}b^3$, atque HR, ſive diſtantia centri circuli R ab axe, eſt ſemper differentia inter $\frac{1}{6}bp$ & $\frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{2}q$; quæ ſi æquantur, centrum cadit in axe; ſi $\frac{1}{6}bp$ major ſit quam $\frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{2}q$ ad ſiniſtram axis, ſin minor ad dextram. Si itaque cubi ex $\frac{2}{3}$ VH, (hoc eſt ex $\frac{1}{9}bb - \frac{1}{3}p$ quam nominemus d) latus quadratum ſive $\sqrt{ddd}$, majus ſit quam HR, ſive differentia inter $\frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{2}q$ & $\frac{1}{6}bp$; reperitur centrum R intra ſpatium NPV, paraboloidibus VPX, VNL, ac recta interminata DNP, circumſcriptum: ac proinde circulus parabolam ſecabit in tribus punctis Y, Y, Y, ad dextram lineæ BK ſitis, atque adeo æquatio tres habet radices affirmativas. Centro vero extra hoc ſpatium NVP conſtituto, non niſi una radice affirmativa explicari poteſt. Hic obiter notandum rectam DP paraboloidem VPX tangere in puncto P, exiſtente BP $= \frac{1}{27}b^3$, alteram vero VNL ſecare in puncto N, ita ut demiſſo in axem penpendiculo NF, VF ſit pars quarta ipſius EV, ſive $\frac{1}{24}bb$, NF vero $\frac{1}{108}b^3$, VW autem, quæ e puncto V axi perpendiculariter erecta lineæ DP occurrit in W, æqualis eſt $\frac{1}{54}b^3$ ſive $\frac{1}{2}$ EP.

Hinc tuto concluditur, ſi in æquatione vel p major ſit quam $\frac{1}{3}bb$, vel q ma-

q major quam $\frac{1}{27}b^3$, non nisi unam eamque affirmativam radicem reperiri. Fallit itaque regula *Cartesii* (Edit. *Amst.* 1659. pag. 70.) ubi tot veras dari radices quot sunt in æquatione mutationes signorum + & — pronunciat, frustra etiam in commentariis suis sphalma hoc excusante *Schootenio.* Fingi enim possunt infinite plures æquationes præcedentis formulæ tres signorum mutationes habentis, quæ unam tantum, quam quæ tres habeant radices. *Propositio etiam quinta sectionis quintæ Artis Analyticæ Harriotti Nostri*, uti *Prob.* 18. *Numerosæ Potest. Resol. Vietæ*, vix satis firma est, cum ex limitationibus quas ibi posuerunt, toti parallelogrammo PIVW id conveniat, quod soli spatio NVP jam competere probavimus, hoc est ut centrum præbeat circulo tribus aliis punctis, præter verticem, parabolam secante.

Quantitas autem q, sive terminus ultimus, datis b & p ea lege ut p minor sit quam $\frac{1}{3}bb$, accurate limitatur ex præcedente æquatione $\sqrt{ddd} = (\frac{2}{27}b^3 + \frac{1}{2}q) \pm \frac{1}{6}bp$; cum scilicet circulus parabolam contingat. Itaque $\frac{1}{2}q$ minor esse debet quam $\frac{1}{6}bp - \frac{1}{27}b^3 + \sqrt{ddd}$; at si p major fuerit quam $\frac{1}{4}bb$, majorem etiam esse oportet $\frac{1}{2}q$ quam $\frac{1}{6}bp - \frac{1}{27}b^3 - \sqrt{d^3}$, ne cadat centrum in spatiolo NVW. Atque his conditionibus æquatio semper triplici radice explicabilis erit, aliter non nisi una. Semper vero, sive tres sive una, affirmativæ sunt, ob positionem centri R, ad dextram lineæ DP.

Atque hic est casus maxime difficilis, ita ut quicunque præmissa bene calleat, sequentia facili negotio intelliget. Detur jam æquatio

$$z^3 - bz^2 + pz + q = 0.$$

Hic ut tres habeantur radices, oportet centrum circuli alicubi intra spatium PNΔ, rectis PN, PΔ, & curva paroboloidis NΔ, definitum, reperiri; quapropter cum EF sit $= \frac{1}{2}bb$, p minor esse debet quam $\frac{1}{4}bb$: jam ad determinationem quantitatis q, existente $d = \frac{1}{9}bb - \frac{1}{3}p$, ut antea, $\sqrt{ddd} + \frac{1}{27}bbb - \frac{1}{6}bp$ semper major esse debet quam $\frac{1}{2}q$, ut constituatur centrum circuli in spatio prædicto PNΔ: quod cum sit, æquatio talis duas habet radices affirmativas ac unam negativam. Si vero p major

major est quam $\frac{1}{3}bb$, vel $\frac{1}{2}q$ major quam $\sqrt{ddd} + \frac{1}{27}bbb - \frac{1}{6}bp$, non nisi una eaque negativa radice explicabilis est.

Proponatur jam æquatio

$$z^3 - bz^2 - pz - q = o.$$

Ut hæc æquatio tres habeat radices, oportet centrum circuli alicubi inveniri in spatio indefinito, inter rectam DPD & curvam paraboloidis PX; hic quantitas p non est obnoxia limitationibus, $\frac{1}{2}q$ vero semper minor esse debet quam $\sqrt{ddd} - \frac{1}{27}bbb - \frac{1}{6}bp$, posito $d = \frac{1}{9}bb + \frac{1}{3}p$. Hoc pacto duæ dantur radices negativæ, ac una affirmativa, aliter vero si $\frac{1}{2}q$ major sit quam $\sqrt{ddd} - \frac{1}{27}bbb - \frac{1}{6}bp$, posito $d = \frac{1}{9}bb + \frac{1}{3}p$: unica tantum affirmativa exponi potest.

Quarto loco sit æquatio

$$z^3 - bz^3 - pz + q = o,$$

quæ duas affirmativas habet radices ac unam negativam si centrum circuli reperiatur in spatio indefinito inter rectas PΔ, PD, ad curvam paraboloidis ΔL; hoc est, (posito $d = \frac{1}{9}bb + \frac{2}{3}p$) si $\frac{1}{2}q$ minor sit quam $\sqrt{ddd} + \frac{1}{29}bbb + \frac{1}{6}bp$; si vero $\frac{1}{2}q$ major hac quantitate fuerit, una tantum negativa inest radix.

Quatuor autem æquationes reliquæ, in quibus habetur $+ b$, quoad limitationem numeri radicum non differunt a prædictis, si signum termini ultimi mutetur, servato signo termini tertii; quæ vero affirmativæ erunt radices in illis, hic fiunt negativæ, & vice versa. Sic in æquatione,

$$z^3 - bz^2 + pz - q = o,$$

una vel tres erant affirmativæ radices; in hac vero,

$$z^3 + bz^3 + pz + q = o,$$

vel una vel tres negativæ sunt, sub iisdem conditionibus; nulla vero omnino affirmativa. Sic in

$$z^3 + bz^2 + pz - q = o,$$

duæ

duæ ſunt negativæ & una affirmativa, ſi p minor ſit quam $\frac{1}{3}bb$, ac $\frac{1}{2}q$ minor quam $\sqrt{d^3 + \frac{1}{27}b^3 - \frac{1}{6}bp}$, quemadmodum in

$$z^3 - bz^2 + pz + q = 0,$$

duæ erant affirmativæ & una negativa; excedentibus autem leges præſcriptas p vel q, una tantum hic eſt radix affirmativa, quæ ibi negativa erat. Pari modo in

$$z^3 + bz^2 - pz + q = 0,$$

vel duæ ſunt affirmativæ ac una negativa, vel una negativa tantum. Denique iisdem de cauſis in æquatione

$$z^3 + bz^2 - pz - q,$$

duæ ſunt negativæ & una affirmativa, vel una affirmativa tantum, quibus in æquatione

$$z^3 - bz^2 - pz + q,$$

duæ erant affirmativæ & una negativa, vel una negativa tantum, nempe prout $\frac{1}{2}q$ major vel minor fuerit quam $\sqrt{d^3 + \frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{6}bp}$.

Si defuerit terminus tertius, ſive pz, centrum R ſemper cadit in linea IPEΔ, quocirca ſi fuerit

$$z^3 - bz^2. *. - q,$$

vel

$$z^3 + bz^2. *. + q,$$

una tantum eſſe poteſt radix, ſi $-b$, affirmativa; ſi $+b$, negativa. At ſi fuerit

$$z^3 - bz^2. *. + q,$$

vel

$$z^3 + bz^2. *. - q,$$

duæ poſſunt eſſe affirmativæ ac una negativa in priore, vel una affirmativa & duæ negativæ in poſteriore, cadente centro in linea PΔ inter P ac Δ,

hoc eft fi $\frac{1}{4}q$ minor fit quam $\frac{1}{27}b^3$. Sin major fuerit, una tantum negativa in priore, vel una affirmativa in pofteriore, dari poteft.

Hactenus numerum radicum in cubicis æquationibus plenius affequuti fumus, reftat ut nonnulla adjiciam de quantitate radicum. Hic primum notandum quod omnis æquatio tres habens radices ope tabulæ finuum, trifectione fcilicet anguli, fatis expedite refolvi poffit; ponendo fcilicet $\sqrt{(\frac{4}{9}bb - \frac{4}{3}p)}$, vel $\sqrt{4d}$, fi fuerit $+p$ in æquatione, vel $\sqrt{(\frac{4}{9}bb + \frac{4}{3}p)}$, fi $-p$, pro radio circuli; angulum vero trifecandum qui finum habeat in tabula finuum $\frac{\frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{6}bp + \frac{1}{2}q}{\sqrt{d^3}}$. Invento hoc angulo, finus tertiæ partis ejus, ut & finus tertiæ partis complementi ad femicirculum, eorumque fumma, ex tabula finuum dabuntur. Hi vero finus in radium $\sqrt{(\frac{4}{9}bb \pm \frac{4}{3}p)}$ ducendi funt, & habebuntur quantitates (Y&, Y&, Y&, in Fig.) quarum & $\frac{1}{3}b$ vel fumma vel differentia, prout cafus poftulat, veras radices æquationis exhibebunt. Hæc omnia ex inventis *Cartefii* derivantur. Ut vero cafus omnes, quantum fieri poffit, breviter complectar, dico quod centro R, in prima æquationum formula, cadente in fpatio VGP, fectiones duæ Y, Y, cadunt inter A & B, ac proinde utraque ex minoribus radicibus minor eft quam $\frac{1}{3}b$, tertia autem & major femper fuperat $\frac{1}{3}b$, fuperatur vero a b. Quod fi cadat in fpatio GNV, duæ majores funt quam $\frac{1}{3}b$, minores vero quam $\frac{2}{3}b$, tertia vero eft b — duabus alteris, ac proinde minor quam $\frac{1}{3}b$. Sed adhibita limitatione quantitatis p, arctioribus terminis radices includuntur. Maxima enim radix minor eft quam $\sqrt{(\frac{4}{9}bb - \frac{1}{3}p)} + \frac{1}{3}b$, major vero quam $\sqrt{(\frac{1}{4}bb - p)} + \frac{1}{2}b$; at cum $\frac{1}{4}bb$ minor eft quam p, limes ille fit $\sqrt{(\frac{1}{9}bb - \frac{1}{3}p)} + \frac{1}{3}b$; radix media femper minor eft quam $\sqrt{(\frac{1}{4}bb - p)} + \frac{1}{2}b$; major vero quam $\frac{1}{3}b - \sqrt{(\frac{4}{9}bb - \frac{1}{3}p)}$; hunc vero limitem nunquam excedit radix minima, fed cum quantitate q evanefcit.

In

In secunda formula præscriptis legibus duæ sunt affirmativæ ac una negativa, ac cadente centro in spatio GPE, altera ex affirmativis major est, altera minor quam $\frac{1}{3}b$, major vero non excedit b, negativa autem major non esse potest quam $\sqrt{\frac{1}{3}bb} - \frac{1}{3}b$, est autem differentia ipsius b & summæ affirmativarum. Centro autem in spatio EGNΔ posito, utraque affirmativa major est quam $\frac{1}{3}b$, minor vero quam $\sqrt{\frac{1}{3}bb} + \frac{1}{3}b$, negativa vero semper minor est quam $\frac{1}{3}b$. Limites autem propiores ex data p evadunt, radicis quidem maximæ affirmativæ $\sqrt{(\frac{1}{4}bb - p)} + \frac{1}{2}b$, qua semper minor est, ut & major quam $\sqrt{(\frac{1}{9}bb - \frac{1}{3}p)} + \frac{1}{3}b$; hoc tamen limite minor est altera affirmativa, quæ cum quantitate q minuitur. Negativa vero semper minor est quam $\sqrt{(\frac{4}{9}bb - \frac{4}{3}p)} - \frac{1}{3}b$, ac deficiente quantitate, q evanescit.

In tertia formula duæ negativæ sunt ac una affirmativa: in hac, ut & in quarta, radices non limitantur a quantitate b; affirmativa vero semper minor est quam $\sqrt{(\frac{4}{9}bb + \frac{4}{3}p)} + \frac{1}{3}b$, major tamen quam $\sqrt{(p + \frac{1}{4}bb)} + \frac{1}{2}b$. Maxima vero ex negativis semper major est quam $\sqrt{(\frac{1}{9}bb + \frac{1}{3}p)} - \frac{1}{3}b$, minor vero quam $\sqrt{(p + \frac{1}{4}bb)} - \frac{1}{2}b$. Minor autem ex negativis semper minuitur cum minuta quantitate q.

In quarta formula cadente centro intra spatium LΔPD; si duæ sint affirmativæ ac una negativa, maxima ex affirmativis major esse nequit quam $\sqrt{(p + \frac{1}{4}bb)} + \frac{1}{2}b$, nec minor quam $\sqrt{(\frac{1}{9}bb + \frac{1}{3}p)} + \frac{1}{3}b$; minor vero radix ab hoc limite minuitur, minuta quantitate q. Negativa autem minor est quam $\sqrt{(\frac{4}{9}bb + \frac{4}{3}p)} - \frac{1}{3}b$; major vero quam $\sqrt{(p + \frac{1}{4}bb)} - \frac{1}{2}b$.

Notandum vero hic radices negativas ubique signo affirmativo notari, quia hæ sunt radices affirmativæ quatuor æquationum illarum, in quibus habetur $+b$, ac q signo contrario notatur; ut supra monui. Horum omnium demonstratio ex eo consequitur, quod ubicunque centrum circuli R incidit in lineas curvas VPX, vel VΔL, circumferentia ejus parabolam tangit in puncto, cujus distantia ab axe est $\sqrt{\frac{1}{3}}$ VH, eamque secat ex alte-

altera axis parte, ad distantiam $2\sqrt{\frac{2}{3}}$VH; cum vero centrum cadit in lineam DPD, altera ex radicibus fit $= o$, ac proinde cubica reducitur ad quadraticam, sive ad $z^2 - bz + p = o$, cujus radices limites designant, ubi evanescit quantitas q: ac quo minor est q, eo propius ad has limites accedunt radices. Quadratica est etiam cum centrum cadit in axe; hoc est, cum $\frac{1}{2}q = \frac{1}{6}bp - \frac{1}{27}b^3$, in prima formula; vel $\frac{1}{2}q = \frac{1}{27}b^3 - \frac{1}{6}bp$. in secunda; in tertia impossibile est; at in quarta cum $\frac{1}{2}q = \frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{6}bp$; quo in casu minor ex radicibus affirmativis est $\frac{1}{2}b$, major $\sqrt{(\frac{1}{2}bb + p)} + \frac{1}{3}b$; negativa vero $\sqrt{(\frac{1}{3}bb + p)} - \frac{1}{2}b$. In prima radices sunt $\frac{1}{3}b$, & $\frac{1}{3}b \pm \sqrt{(\frac{1}{3}bb - p)}$. In secunda vero formula, $\frac{1}{3}b$, & $\sqrt{(\frac{1}{3}bb - p)} + \frac{1}{3}b$, sunt affirmativæ: negativa autem $\sqrt{(\frac{1}{3}bb - p)} - \frac{1}{3}b$.

Atque hæc in cubicis sufficere posse videntur; ob eximium vero usum methodi, qua ope tabulæ sinuum radices harum æquationum inveniuntur, placuit unum vel alterum exemplum adjungere, ut praxis illius compendium inde innotescat.

Proponatur æquatio

$$z^3 - 39z^2 + 479z - 1881 = o;$$

quæruntur radices z. $\sqrt{(\frac{1}{9}bb - \frac{1}{3}p)} = \sqrt{9\frac{1}{3}} = \sqrt{d}$, cujus duplum $\sqrt{37\frac{1}{3}}$ radius est circuli; &

$$\frac{\frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{2}q - \frac{1}{6}bp}{\sqrt{d^3}} = \frac{2197 + 940\frac{1}{2} - 3113\frac{1}{2}}{9\frac{1}{3}\sqrt{9\frac{1}{3}}},$$

sive $\frac{24}{9\frac{1}{3}\sqrt{9\frac{1}{3}}}$ est sinus tabularis anguli, hoc est, facta divisione ope logarithmorum, Log. 9,9251560, cui respondet angulus 57 *gr.* 19 *m.* 11$\frac{1}{2}$ *s.*

Hujus

Hujus tertia pars 19 *gr.* 6 *m.* 24 *s.* & complementi 40 *gr.* 53 *m.* 36 *s.* sinus dant Log. 9. 514983, & 9. 816011, qui ducti in radium $\sqrt{37\frac{1}{3}}$ producunt Y&, & Y&, Log. 0. 301030. = 2, & Log. 0. 602059 = 4, tertia vero Y&, æqualis est eorum summæ sive 6. Ideoque radices sunt 13 — 4 = 9, 13 — 2 = 11, & 13 + 6 = 19, ex quibus singulis conflatur prædicta æquatio. Ubi notandum duas minores radices non excedere $\frac{1}{3}b$ vel 13, quia centrum R in constructione cadit ad dextram axis, id est $\frac{1}{6}bp$ minor est quam $\frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{2}q$.

Exemplum alterum sit

$$x^3 - 15x^2 - 229x - 525 = 0,$$

& quærantur radices.

$$\sqrt{(\frac{1}{9}bb + \frac{1}{3}p)} = \sqrt{101\frac{1}{3}} = \sqrt{d},$$

& radius circuli $\sqrt{405\frac{1}{3}}$. $\dfrac{\frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{6}bp + \frac{1}{2}q}{\sqrt{d^3}} = \dfrac{125 + 572\frac{1}{2} + 262\frac{1}{2}}{101\frac{1}{3}\sqrt{101\frac{1}{3}}} =$

$\dfrac{960}{101\frac{1}{3}\sqrt{101\frac{1}{3}}} =$ sinui tabulari arcus, cujus Log. 9. 9736426, & arcus ipse 70 *gr.* 14 *m.* 22 *s.* hujus pars tertia est 23 *gr.* 24 *m.* 47 *s.* & complementi 36 *gr.* 35 *m.* $12\frac{1}{2}$ *s*; quorum sinus Log. sunt 9. 599183, & 9. 775275, quibus addito Log. $\sqrt{405\frac{1}{3}}$, fiunt Log. 0. 903089 = 8, & Log. 1. 079181 = 12, & eorum summa = 20. Hinc concluditur $20 + \frac{1}{3}b$, vel 25, æquari radici affirmativæ, & 8 & $12 - \frac{1}{3}b$, sive 3 & 7, negativis. Quod si æquatio fuisset

$$x^3 + 15x^2 - 229x + 525 = 0,$$

3 & 7 fuissent affirmativæ; 25 vero negativa. Ceteræ autem cubicæ, unica tantum radice explicabiles, juxta regulas *Cardani* resolvendæ sunt, postquam demptus fuerit secundus terminus; nec video quo pacto minori calcu-

lo hoc negotium peragi poſſit. At ſi deſideretur radix hæc in quantitatibus b, p, q, expreſſa, dico eam eſſe in prima formula, $\frac{1}{3}b$ + vel — ſumma vel differentia radicum cubicarum ex

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}qq - \tfrac{1}{108}p^2b^2 + \tfrac{1}{27}b^3q - \tfrac{1}{6}bpq + \tfrac{1}{27}p^3)} \pm \tfrac{1}{27}b^3 + \tfrac{1}{2}q - \tfrac{1}{6}bp:$$

id eſt +, ſi $\frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{2}q$ major ſit quam $\frac{1}{6}bb$, aliter —; ſumma vero quoties $\frac{1}{3}bb$ major eſt quam p; ſin minor fuerit $\frac{1}{3}bb$, differentia. Inque ceteris formulis radix ſemper conflatur ex iisdem elementis, variatis tamen ſignis + & —, ut facile percipiet qui velit experiri.

Ope vero tabulæ logarithmicæ ſinuum verſorum radices hæ ſatis prompte inveniuntur; nempe ſi coefficientes numeri ſint ſurdi vel fracti, ac radices numeris ineffabiles, ut plerumque fit. Hæc autem eſt regula: in prima ac ſecunda formula, ſi $\frac{1}{3}bb$ minor ſit quam p; ſit $\frac{1}{3}p - \frac{1}{9}bb = d$, & poſita differentia inter $\frac{1}{6}bp$ & $\frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{2}q$, hoc eſt HR, in prima, ac inter $\frac{1}{6}bp + \frac{1}{2}q$ & $\frac{1}{27}b^3$, in ſecunda, pro radio; inveniatur angulus cujus tangens eſt $d\sqrt{d}$. Deinde ut co-ſinus hujus anguli, ad ejusdem ſinum verſum, ita differentia pro radio habita, ad quartum; cujus latus cubicum triſecando logarithmum habebitur: ac diviſo $\frac{1}{3}p - \frac{1}{9}bb$ per hoc latus cubicum e quoto ſubducatur diviſor, reſiduum erit quantitas Y&. Hujus reſidui ac $\frac{1}{3}b$ ſumma, ſi centrum cadit ad dextram axis, aliter differentia earundem, radix erit quæſita. Quod ſi $\frac{1}{3}bb$ major ſit quam p, poſito HR pro radio, ſit $d\sqrt{d}$, ſive diſtantia paraboloidis ab axe, ſinus arcus cujusdam. Hujus ſinus verſus ducatur in radium ſive $\frac{1}{6}bp - \frac{1}{27}b^3 \pm \frac{1}{2}q$, ac triſecto producti logarithmo, habebitur ejus latus cubicum, per quod dividatur $\frac{1}{9}bb - \frac{1}{3}p$. Dico quoti ac diviſoris ſummam eadem lege additam vel ablatam ex $\frac{1}{3}b$, radicem quæſitam exhibere. Ac par eſt ratio in tertia ac quarta formulis, niſi quod $\frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{6}bp \pm \frac{1}{2}q$ pro radio aſſu-

sumenda est, ac $\frac{1}{9}bb + \frac{1}{3}p$ in $\sqrt{(\frac{1}{9}bb + \frac{1}{3}p)}$ sive $d\sqrt{d}$ pro sinu. Sed hæc præcepta exemplis fortasse melius percipientur.

Sit æquatio cubica,

$$zzz - 17zz + 54z - 350,$$

ac quæratur radix z. Hic $\frac{1}{3}bb$ major est quam p, sed q major est quam cubus ex $\frac{1}{3}b$, ideoque una tantum affirmativa radice explicabilis est. Jam $\frac{289}{9} - \frac{54}{3}$ est d, ac $\frac{127}{9}\sqrt{\frac{127}{9}}$ pro sinu habenda est, ad radium $\frac{4913}{27} + 175 - 153$, hoc est $\frac{5507}{27}$: arcus vero competens fit 15 *gr.* 3 *m.* 49 *s.* Hujus sinus versi Log. 8. 5362376, additus Log. Radii 2. 3095913, dat 0. 8457889, cujus tertia pars 0. 2819276 est Log. radicis cubicæ 1. 91394, quo divisore diviso, $\frac{127}{9}$ sive d, fit quotus 7. 37281; quoti ac divisoris summa, aucta additione $\frac{1}{3}b$, fit radix quæsita, nempe 14. 9534, &c.

Exactis cubicis biquadraticas jam aggrediamur. Hæc semper vel nullam, vel duas, vel quatuor radices veras habent, quarum determinatio, partim a coefficientibus, partim a signo & magnitudine numeri absoluti dati, pendet. Harum omnium constructionem generalem superius satis concinnam podidi, quam lector jam vidisse supponitur. In constructione æquationis TAB. XIII. Fig. 3.

$$z^4 - bz^3 + pzz - qz + r = 0,$$

fit BD $= \frac{1}{4}b$, AB $= \frac{1}{16}bb$, BK $= \frac{1}{2}$, sive dimidio lateris recti, KC $=$ 2AB $= \frac{1}{8}bb$, KE $= \frac{1}{8}bb - \frac{1}{2}p$, AE $= \frac{1}{2} = \frac{3}{16}bb - \frac{1}{2}p$, FE $= \frac{1}{16}b^3 - \frac{1}{4}bp$, ac EG $= \frac{1}{16}b^3 - \frac{1}{4}bp + \frac{1}{2}q$; quo facto circulus, centro G, radio $\sqrt{(GD^2 - r)}$, intersecabit parabolam vel nullo, duobus, aut quatuor punctis, quæ perpendiculis in lineam HD radices omnes z exhibent. Ut autem quatuor sint, evidens est centrum circuli alicubi constitui debere intra spatium, de cujus puncto quovis tria perpendicula in curvam parabolæ demitti possint; atque simul radium minorem

rem esse maximo ex illis perpendiculis, majorem vero medio. Quod si centrum constituatur extra hoc spatium, ut non nisi una perpendicularis in parabolam demitti possit, qua major sit radius; vel si minor sit media ex tribus perpendicularibus, major vero quam minima ex illis, duæ tantum possunt esse radices; nulla vero omnino datur, quoties radius $\sqrt{(GD^2 - r)}$, minor est minima ex tribus, vel una illa, quoties una tantum est. Jam quale spatium hoc sit, quibusque limitibus discernitur, ac quibus conditionibus radius circuli minor vel major sit prædictis perpendicularibus, nobis restat inquirendum; ac primum quo pacto perpendicularis in parabolam demitti possit ostendendum est.

TAB. XIII. Fig. 4. Sit ABC parabola, AE axis ejus, AV semi-latus rectum, G punctum de quo demittenda est perpendicularis. Ducatur axi perpendicularis GE, ac bisecetur VE in F, & erecta perpendiculari FH ad idem axis latus, fiat FH $= \frac{1}{4}$ GE; dico quod circulus, centro H, radio HA descriptus, parabolam intersecabit in punctis tribus, vel uno, Z; ad quæ ductæ rectæ GZ curvæ parabolicæ pendiculariter insistunt.

Fig. 2. Ut autem tres sint hujusmodi intersectiones, oportet centrum circuli H ita collocari, ut sit intra spatium paraboloïdibus inclusum; hoc est ut FH minor sit quam $\sqrt{\frac{8}{27}VF^3}$, sive FH^2 minus quam cubus ex $\frac{2}{3}$ VF: atque adeo GE $=$ 4FG, minor erit quam $4\sqrt{\frac{8}{27}VF^3}$, sive $4\sqrt{\frac{1}{27}VE^3}$, hoc est quadratum ex GE minus erit quam $\frac{16}{27}VE^3$: coincidunt itaque hi limites cum paraboloïdibus duabus ejusdem generis cum iis, quibus in cubicis usi sumus, sed quarum latus rectum duplo minor est; id est $\frac{27}{16}$ lateris recti parabolæ, hoc est $\frac{27}{8}$ ipsius AV: ideoque ea ipsa est linea curva cujus evolutione generatur parabola, sic demonstrante *Hugenio*; quamque semper contingit linea DF, quæ parabolæ perpendiculariter insistit in puncto D.

Fig. 3. Punctum autem P, sive in quo contingit recta DF paraboloïdem, centrum est circuli, qui radio DP descriptus cum parabola in puncto D coincidit, sive ejusdem curvitatis est; ut per se satis constat.

Descriptis itaque hujusmodi paraboloïdibus VXP, VNΔ, utrinque ab axe; perspicuum est quod, nisi centrum circuli constituatur intra hos limites, non possit ille pluribus quam duobus in punctis parabolam intersecare: unde determinare licet quibus sub conditionibus coefficientes terminorum intermediorum coerceantur, in æquationibus biquadraticis, ut habeantur quatuor radices. Ac prima fronte clarum est p majorem esse non posse quam $\frac{3}{8}bb$, (scilicet in formulis ubi habetur $+ p$) nec q quam $\frac{1}{16}b^3$. Gene-

neraliter vero $\frac{1}{16}b^3 \mp \frac{1}{4}pb \mp \frac{1}{2}q$, id eſt diſtantia centri ab axe EG; minor eſſe debet quam $EH = 4\sqrt{\frac{1}{27}VE^3}$, hoc eſt (ob $VE = \frac{3}{16}bb \mp \frac{1}{2}p$) quam $(\frac{1}{4}bb \mp \frac{2}{3}p)\sqrt{(\frac{1}{16}bb \pm \frac{1}{6}p)}$; ſignis + & — in dubio relictis, ut ſecundum æquationis cujusvis naturam variari poſſint; quemadmodum in cubicis ſuperius oſtenſum eſt.

Termini autem ultimi r limitatio eadem facilitate inveniri nequit; id adeo, quia problema eſt ſolidum, in curvam parabolæ demittere perpendicularem, quodque non ſine ſolutione æquationis cubicæ reſolvi poteſt. Itaque primo loco deficiat ſecundus terminus, vel, ſi adfuerit, tollatur, ut æquatio habeat formulam,

$$z^4.\ *.\ pz^2.\ qz.\ r. = o.$$

Ac ſi fuerit $-r$, ſemper duabus vel quatuor radicibus explicari poteſt; ut autem quatuor ſint, oportet centrum circuli intra paraboloïdes prædictas conſtitui, ſive ut ſit $-p$, ac qq minus quam $\frac{8}{27}p^3$, ſive cubo ex $\frac{2}{3}p$.

Deinde habeantur radices æquationis hujus $y^3.\ *.\ \frac{1}{2}py.\ \frac{1}{4}q = o$, quantitatibus p & q iiſdem ſignis annexis quibus in biquadratica. Hæ autem radices auxilio tabulæ ſinuum ſatis expedite inveniuntur. Inventis autem tribus illis y, (quæ ſunt ordinatim applicatæ ad axem parabolæ, de punctis ubi incidunt perpendicula in curvam ejus, ſcilicet ZY (*Fig.* 4.)) $pyy - 3y^4$, ex minore y, quantitatem maximam r deſignabit, ſi fuerit $-r$; qua ſi minor fuerit r, æquatio quatuor habebit radices, aliter duas. Aſt ſi fuerit $+r$, oportebit eam minorem eſſe quam $3y^4 - pyy$ ex media y, nam ſi major ſit, non niſi duas habere poteſt radices, ſaltem ſi minor ſit r, quam $3y^4 - pyy$ ex minima y. Hac vero ſi major ſit, nulla omnino radice vera explicabilis eſt æquatio. Hi vero iidem limites aliter deſignantur ex quantitate q, ſcilicet $\frac{1}{2}qy - y^4$ in prima caſu, $y^4 - \frac{1}{2}qy$ in ſecundo, ac $y^4 + \frac{1}{2}qy$ in tertio.

Fieri autem poteſt ut duæ minores quantitates y non longe diſtent ab invicem, unde evenit quod utraque ex perpendicularibus major ſit quam recta GA, ſcilicet cum qq majus ſit quam $\frac{4}{27}p^3$, minus vero quam $\frac{8}{27}p^3$; cadente centro intra ſpatium paraboloïdibus (utriusque Figuræ 2 & 3) interjectum. Hoc in caſu, ſi fuerit $+r$, non niſi duæ poſſunt eſſe radices, exiſtente $y^4 + \frac{1}{2}qy$ ex maxima y, major quam r; aliter nulla. At ſi $\frac{1}{2}qy - y^4$

ex minima y, major fuerit quam r figno — notata, r vero major quam $\frac{1}{2}qy - y^4$ ex media y, tunc habentur quatuor radices; at duæ tantum, fi vel major priore vel minor pofteriore inventa fit r.

Si vero in æquatione fuerit $+ p$, vel fi fit $- p$ & qq majus fuerit quam $\frac{8}{27}p^3$, æquatio $y^3. *. \frac{1}{2}py. \frac{1}{4}q$, unica tantum explicatur radice y; hoc eft, una tantum perpendicularis de centro circuli demitti poteft: unde certo concluditur duas tantum radices haberi poffe in æquatione data, quarum fumma, fi fuerit $- r$, cum quantitate r augetur; at fi habeatur $+ r$, obtenta quantitate y, quantitas illa r minor effe debet quam $y^4 + \frac{1}{2}qy$; nam fi ea major fit, æquatio propofita abfurda & impoffibilis eft.

Longum & fuperfluum effet omnes hujus fenfus æquationes percurrere, cum ex jam dictis attendenti fatis evidens fit, quæ negativæ quæ affirmativæ fint; atque, quod radicum harum limites ex quantitatibus inventis petantur. In exemplum vero, quod cuivis in ceteris imitari licet, proponantur indagandi limites five conditiones, fub quibus in æquatione biquadratica quatuor radices affirmativæ dari poffint. Hoc autem fit quoties centrum circuli G, ponitur in fpatio VPK (*Fig.* 3.), ac fimul habetur $+r$, five circuli radius minor quam GD. Unde patet, æquationem de qua agitur hujus effe formulæ,

$$z^4 - bz^3 + pz^2 - qz + r = 0;$$

p vero majorem effe non poffe quam $\frac{3}{8}bb$, nec $\frac{1}{4}pb$, hoc in cafu, quam $\frac{1}{16}b^3 + \frac{1}{2}q$; deinde opus eft ut $\frac{1}{4}bb - \frac{2}{3}p$ in $\sqrt{(\frac{1}{16}bb - \frac{1}{6}p)}$ major fit quam $\frac{1}{16}b^3 + \frac{1}{2}q - \frac{1}{4}pb$; & ex his limitibus certo conftabit centrum intra fpatium VPK inveniri. Ut vero definiatur quantitas r, folvenda primum eft cubica,

$$y^3. *. -(\frac{3}{16}b^2 - \frac{1}{2}p)y = \frac{1}{32}b^3 + \frac{1}{4}q - \frac{1}{8}pb;$$

& habebuntur puncta, in quæ perpendiculares de centro in curvam parabolæ cadunt.

Inventis autem tribus valoribus hujus y, r minor effe debet quam

$$\frac{3}{256}b^4 + \frac{1}{4}bq - \frac{1}{16}bbp + 3y^4 - \frac{3}{8}b^2yy + pyy$$

ex

ex media y, major vero quam

$$\frac{3}{256}b^4 + \frac{1}{4}bq - \frac{1}{16}bbp + 3y^4 - \frac{3}{8}byy + pyy$$

ex minima y. Hos vero limites si excedat r, non nisi duæ radices haberi possunt. Denique si

$$\frac{3}{256}b^4 + \frac{1}{4}bq - \frac{1}{16}bbp + 3y^4 - \frac{3}{8}bbyy, + pyy$$

ex maxima y, minor fuerit quam r, æquatio proposita impossibilis est.

Accidit etiam ut quatuor sint affirmativæ, cum centrum G constituitur in spatiolo VTS, ducta scilicet RTS perpendiculari in medium suppositæ lineæ AD: hoc autem fit cum p major est quam $\frac{5}{16}bb$, ac $(\frac{1}{4}bb - \frac{2}{3}p)\sqrt{(\frac{1}{16}bb - \frac{1}{6}p)}$ major quam $\frac{1}{8}bp - \frac{5}{128}bbb - \frac{1}{2}q$. Quo in casu semper duæ, aliquando tres, ex radicibus fiunt majores quam $\frac{1}{4}b$.

Notandum vero hic limitem illum ex minima y productum, aliquando negativum fieri, sive minorem nihilo; quoties scilicet maxima ex tribus perpendicularibus major est quam GD (*Fig.* 3.) Hoc, si acciderit quantitas $+r$, a limite præscripto ex media y, in nihilum minui potest. Defectus vero limitis ex minima y monstrat quanta possit esse $-r$ in æquatione, si habeantur tres radices affirmativæ ac una negativa; quam si excedat, non nisi duæ, altera affirmativa, altera negativa, dari possunt. Hæc autem omnia demonstrantur ex eo quod prædicti limites quantitatis r, sint differentiæ quadratorum lineæ GD & perpendicularium in curvam parabolæ.

Ob perplexas vero cautiones, quas parit in æquationibus hisce signorum diversitas, præstat semper secundum terminum tollere, ac deinde juxta præcepta jam tradita radicum numerum ac signa inquirere; præsertim si quantitates illæ y non multum distent ab invicem. Ex quatuor autem hisce radicibus affirmativis, duæ semper sunt minores quam $\frac{1}{4}b$, duæ vero majores; nempe si DG minor sit quam AG, sive $\frac{1}{4}pb$ quam $\frac{3}{64}b^3 + q$. Tres autem minores sunt quam $\frac{1}{4}b$ quoties perpendicularis media, sive ex me-

media y inventa, major est quam AG, sive $\frac{3}{8}bby$ major quam $3y^3 - pyy$ ex eadem media y. Quarta vero & maxima radix major est quam maxima $y + \frac{1}{4}b$; æquatur autem differentiæ ipsius b & summæ ceterarum trium radicum, ideoque minor est b. Sed jam *Manum de Tabula*. Fortassis illi qui naturam parabolæ penitius perspectam habent, majori compendio hæc omnia peragere valebunt; at si quantitates hæ omnes b. p. q. & r, absque resolutione cubicæ æquationis rite determinari possint, non sine causa ambigitur; quæcunque enim æquationibus planis hac in re fiunt, non veros limites, sed approximationes tantum exhibent.

EPI-

EPISTOLA DOMINI

COLIN MAC LAURIN

Matheseos Professoris in Academia Edimburgensi,

& R. S. S.

DATA

Dno. MARTINO FOLKES, R. S. V. Pr.

De æquationibus, in quibus dantur radices impossibiles.

Præterita hyeme ad te scripsi me cogitasse de facillima & simplicissima methodo demonstrandi NEWTONI regulam, qua sæpe cognoscitur num æquatio aliqua habeat radices impossibiles, nec ne: quæ methodus spero fore ut non displiceat, cum communi tantum nitatur Algebra, fundeturque obviis quantitatum proprietatibus, quæ sequentibus Lemmatibus demonstrantur, nec opus habeat curvarum consideratione, quod non ita convenire videtur subjecto mere algebraico.

LEMMA I.

Summa quadratorum duarum quantitatum realium semper major est duplo earundem producto.

Sic $a^2 + b^2$ majus est quam $2ab$; nam eorum differentia $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$, idcirco positiva; cum sit semper positivum quadratum cujusvis quantitatis, sive positivæ, sive negativæ.

LEMMA II.

Summa quadratorum trium quantitatum realium, semper major est quam summa productorum, quæ fiunt multiplicando binas illas quantitates inter se.

Sic $a^2 + b^2 + c^2$ majus semper est quam $ab + ac + bc$: patet enim quod

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = \frac{2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc}{2}$$

$$= \frac{aa - 2ab + bb + aa - 2ac + cc + bb - 2bc + cc}{2} =$$

h 3 $a-$

$\frac{(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2}{2}$, id est semisummæ quadratorum differentiarum quantitatum a, b, c; cum vero hæc quadrata sint positiva, sequitur quod excessus ipsorum $a^2+b^2+c^2$ supra $ab+ac+bc$ est etiam positivus; & summa quadratorum trium quantitatum major est summa productorum; quæ fiunt multiplicando binas quantitates inter se.

LEMMA III.

Tripla summa quadratorum quatuor quantitatum major est quam dupla summa productorum, quæ fiunt multiplicando binas quantitates ex his inter se.

Nam

$3a^2+3b^2+3c^2+3d^2-2ab-2ac-2ad-2bc-2bd-2cd=a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+a^2-2ad+d^2+b^2-2bd+d^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2cd+d^2=(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-d)^2+(b-c)^2+(c-d)^2$, id est summæ quadratorum differentiarum quantitatum a, b, c, d, ideo

$$3a^2+3b^2+3c^2+3d^2$$

majus est quam

$$2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd,$$

cum excessus sit semper positivus.

LEMMA IV.

Sit m *numerus quantitatum* a, b, c, d, e *&c., summa quadratorum* $=$ A, *summa productorum ex binis quibuscunque illarum quantitatum in se ductis* $=$ B, *erit semper* $\left(\frac{m-1}{2}\right)$ A *majus quam* B.

Addendo enim quadrata differentiarum $a-b$, $a-c$, $a-d$, $b-c$, $b-d$, $c-d$ &c., a^2 sumitur tot vicibus, quot dantur quantitates præter a, idem dicendum de b^2, c^2, &c. Rectangula autem $-2ab-2ac-2ad-2bc$ &c. semel tantum oriuntur; ergo summa omnium quadratorum

$$(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2 \text{ \&c.}$$

$$=(m-1)a^2+(m-1)b^2+(m-1)c^2+\text{\&c.}-2ab-2ac-2bc-\text{\&c.}$$

$=(m-1)$ A -2B; sed $(a-b)^2$, $(a-c)^2$, $(a-d)^2$ &c., sunt semper positiva, ergo $(m-1)$ A -2B est etiam positivum, ac proinde $\left(\frac{m-1}{2}\right)$ A majus est quam B.

COROL-

COROLLARIUM.

Patet ex hac demonſtratione exceſſum ipſius $(m - 1)$ A ſupra 2B ſemper eſſe æqualem ſummæ quadratorum differentiarum harum quantitatum a, b, c, d &c.; & ubi hæ quantitates ſunt omnes æquales, eſt $(m - 1)$ A $- 2B = o$, aque cum hac modificatione intelligenda ſunt præcedentia Lemmata.

Obſervandum, quod licet ſuppoſuerim quantitates, a, b, c, d &c. eſſe poſitivas, propoſitiones etiam veræ ſunt de quantitatibus negativis, quarum quadrata eadem ſunt, ac ſi eſſent poſitivæ; productorum vero ſumma vel eadem vel minor, quam ſi eſſent poſitivæ.

PROPOSITIO I.

In æquatione quadratica, cujus radices ſunt reales, quadratum ſecundi termini ſemper majus eſſe debet, quam quater productum ex primo & tertio

Sint radices $+ a$, $+ b$, x incognita. Æquatio erit

$$\begin{array}{l} x^2 - ax + ab = 0. \\ \quad\; - bx \end{array}$$

Jam cum $a^2 + b^2$ ſit majus quam $2ab$ per Lem. I, erit $a^2 + b^2 + 2ab$ majus quam $4ab$; ideoque $(a + b)^2 . x^2$, quadratum ſecundi termini, majus quam $4ab . x^2$, quater productum ex primo & tertio termino.

PROPOSITIO II.

In omni cubica æquatione cujus omnes radices ſunt reales, quadratum ſecundi termini ſemper majus eſt quam triplum productum ex primo & tertio.

Æquatio cubica cujus omnes radices ſunt reales ſic poteſt exprimi

$$\begin{array}{l} y^3 - ay^2 + aby - abc = o. \\ \quad\; - by^2 + acy \\ \quad\; - cy^2 + bcy \end{array}$$

Per Lem. 2. $a^2 + b^2 + c^2$ majus eſt quam $ab + ac + bc$; addendo utrinque $2ab + 2ac + 2bc$, erit

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a + b + c)^2$$

majus quam $3ab + 3ac + 3bc$, ac proinde $(a + b + c)^2 . y^4$, quadratum ſecundi termini, majus quam $(3ab + 3bc + 3bc) y^4$, triplum productum ex primo & tertio termino.

COROL-

COROLLARIUM I.

In genere patet ex demonſtratione, quod quadratum ſummæ trium quantitatum realium $(a+b+c)^2$ ſemper majus eſt, quam tripla ſumma omnium productorum, quæ fiunt multiplicando binas quaſcunque ex illis quantitatibus inter ſe.

COROLLARIUM II.

Ex hac propoſitione ſequitur, quod ſi quadratum ſecundi termini non ſit majus triplo producto ex primo & tertio, radices æquationis non poſſint omnes eſſe reales, ſed duæ erunt impoſſibiles. Quod plane coincidit cum una parte regulæ NEWTONI, qua detegitur num æquationis cubicæ radices ſint impoſſibiles.

Cupit enim Vir Celeberrimus ſcribi ſupra medios terminos æquationis fractionem hanc $\frac{1}{3}$, & ſignum $+$ poni ſub primum & ultimum terminum, ut hic vides;

$$\begin{array}{cccc} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \\ x^3 + & px^2 + & qx + & r = 0 \\ + & - & * & + \end{array}$$

deinde multiplicat quadratum ſecundi termini per fractionem, quæ ſupereminet, & ſi productum illud majus ſit producto ex terminis adjacentibus, ponit ſignum $+$ ſub ſecundo termino; ſi vero illud productum minus inveniatur, ponit ſignum $-$, atque affirmat tot dari radices impoſſibiles, quot dantur mutationes inter ſigna. Jam per hanc Propoſitionem, ſi p^2x^4 non eſt majus quam $3qx^4$, vel $\frac{1}{3}p^2x^4$ non majus quam qx^4, radices non poſſunt omnes eſſe reales; eadem ſuppoſitio duas dat inter ſigna mutationes, quodcunque ſignum ſit ſub tertio termino, cum ſigna ſub primo & ultimo ſint ambo $+$; hæc ergo Propoſitio demonſtrat primam partem regulæ newtonianæ, quantum ſpectat cubicas æquationes.

COROLLARIUM III.

Si ſecundus terminus deſit in cubica æquatione & tertius terminus ſit poſitivus, æquatio habebit duas radices impoſſibiles; quadratum enim ſecundi termini (in hoc caſu $=0$) minus erit triplo producto ex terminis adjacentibus. Sed hoc clarius patebit conſiderando, quod ubi ſecundus terminus evaneſcit in æquatione, radices poſitivæ & negativæ ſunt æquales, & ſe mutuo deſtruunt; pone radices eſſe $+a$ & $-b-c$; in hoc caſu $a=b+c$, & tertii termini coefficiens erit

$$-ab-ac+bc = -bb-2bc-cc+bc = -bb-bc-cc,$$

ideo-

ideoque negativus; vel si ponas duas radices positivas, & unam negativam, sintque $-a, +b, +c$, erit nihilominus tertii termini coefficiens negativus, nempe erit $-bb-bc-cc$. Quare si radices sint reales, tertii termini coefficiens semper est negativus (deficiente scilicet secundo termino; si vero coefficiens ille sit positivus, certum est indicium duas dari radices impossibiles.

PROPOSITIO III.

In omni æquatione cubica, cujus omnes radices sunt reales, quadratum termini tertii, semper majus esse debet, quam ter productum ex secundo, & quarto.

In cubica æquatione, cujus radices sunt a, b, c, quadratum coefficientis tertii termini est $(ab+ac+bc)^2$; productum ex coefficientibus secundi & quarti est $(a^2bc+ab^2c+abc^2)$, ut patet ex sola inspectione æquationis; porro clarum est, $a^2bc+ab^2c+abc^2$ esse summam productorum ex binis quantitatum ab, ac, bc; ideo, per Cor. I. Propos. II., quadratum summæ harum quantitatum (id est, $(ab+ac+bc)^2$) majus esse debet quam $3a^2bc+3ab^2c+3abc^2$; itaque $(ab+ac+bc)^2y^2$, id est quadratum tertii termini, majus esse debet quam $(3a^2bc+3ab^2c+3abc^2)y^2$, id est, quam triplum productum ex secundo & quarto termino.

COROLLARIUM I.

Sequitur ex hac demonstratione, quod $(ab+ac+bc)^2$ majus est quam $3abc\,(a+b+c)$.

COROLLARIUM II.

Si quadratum tertii termini minus inveniatur, quam triplum productum e secundo & quarto termino, radices æquationis non possunt omnes esse reales; quod convenit cum secunda parte regulæ newtonianæ; hic enim, casus dat — ponendum sub termino. Itaque duæ sunt mutationes signorum, quodcunque sit signum sub secundo termino.

$$\begin{array}{cccc} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \\ x^3 & +px^2 & +qx & +v=0 \\ + & \mp & - & + \end{array}$$

SCHOLIUM.

Eodem modo demonstrari potest, quod si in cubica æquatione secundus terminus desit, cubus tertiæ partis tertii termini positive sumti, semper major est quadrato ultimi termini dimidiati.

Sint æquationis radices $+a, -b, -c$; vel $-a, +b, +c$; sitque

que $a = b + c$. in hoc casu deficiet secundus terminus, ipsaque æquatio hanc formam induet,

$$\begin{aligned} y^3 * &- b^2 y \pm bc\,(b+c) = o. \\ &- bcy \\ &- c^2 y \end{aligned}$$

Quadratum ipsius $b - c$ semper est positivum, cum b & c sint quantitates reales. Ponamus illud quadratum $(bb - 2bc + cc)$ æquale D, erit

$$b^2 + bc + c^2 = \text{D} + 3bc, \ \& \ (b+c)^2 = \text{D} + 4bc;$$

$$\frac{(b^2 + bc + c^2)^3}{27} = \frac{\text{D}^3}{27} + \frac{\text{D}^2 bc}{3} + \text{D}b^2c^2 + b^3c^3,$$

&

$$b^2c^2\,\frac{(b+c)^2}{4} = \frac{\text{D}b^2c^2}{4} + b^3c^3.$$

Jam clarum est quod

$$\frac{\text{D}^3}{27} + \frac{\text{D}^2 bc}{3} + \text{D}b^2c^2 + b^3c^3 \text{ majus est } \frac{\text{D}b^2c^2}{4} + b^3c^3,$$

(totum majus parte), cum D sit positivum ut etiam bc; nam b & c sunt radices eodem signo affectæ. Idcirco cubus tertiæ partis tertii termini, signo mutato, $\left(\frac{(b^2 + bc + c^2)^3}{27}\right)$ semper major est quadrato ultimi termini dimidiati $\left(b^2c^2\,\frac{(b+c)^2}{4}\right)$ In cubica æquatione $x^3 * + qx + r = o$, si q sit positivum, vel si $\frac{q^3}{27}$ minus sit quam $\frac{1}{4}r^2$, patet æquationem duas habere radices impossibiles si hoc Corol. conferatur cum Cor. III. Prop. II.

PROPOSITIO IV.

In æquatione quadrato-quadratica, cujus omnes radices sunt reales, $\frac{3}{8}$ quadrati termini secundi semper superant productum ex primo & tertio termino; & $\frac{3}{8}$ quadrati quarti termini semper superant productum ex tertio & quinto.

1. Sit æquatio

$$x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = o.$$

Cum

Cum omnes radices ponantur reales, vocentur a, b, c, d. Erit

$$p = a + b + c + d$$

$$q = ab + ac + ad + bc + bd + cd.$$

Sed patet per Lem. 3. quod

$$3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 3d^2$$

majus est quam

$$2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$$

addendo utrinque

$$6ab + 6ac + 6ad + 6bc + 6bd + 6cd,$$

patebit $3(a + b + c + d)^2$

majus esse quam

$$8ab + 8ac + 8ad + 8bc + 8bd + 8cd;$$

id est $3p^2$ majus esse quam $8q$, ideoque $\frac{3}{8} p^2 x^6$ majus quam qx^6.

2. Cum sit $r = abc + abd + acd + bcd$; & $s = abcd$; & cum

$$qs = a^2b^2cd + a^2c^2bd + a^2d^2bc + b^2c^2ad + b^2d^2ac + c^2d^2ab,$$

quæ summa componitur ex productis quæ oriuntur multiplicando inter se binas quascunque ex quantitatibus abc, abd, acd, bcd, quarum summa $= r$; sequitur $3r^2$ semper majus esse, quam $8qs$. Ita ut $\frac{3}{8}$ quadrati secundi vel quarti termini semper superent productum ex terminis utrinque adjacentibus.

COROLLARIUM.

Multiplicetur quadratum secundi vel quarti termini in æquatione quadrato-quadratica per fractionem $\frac{3}{8}$, & si productum illud non excedat productum ex terminis adjacentibus, æquatio habebit quasdam radices impossibiles.

PROPOSITIO V.

Sit æquatio cujuscunque dimensionis, ut m, *sintque coefficientes secundi, tertii, ultimi, penultimi, antepenultimi, termini respective* A, B, E, D, C; *si radices sint omnes reales, erit* $(m-1)\,A^2$ *semper majus, quam* $2mB$, *&* $(m-1)\,D^2$ *semper majus quam* $2m\,CE$.

1. Nam pone radices esse a, b, c, d, e, &c. erit per Lem. 4. $(m-1)\,a^2+(m-1)\,b^2+(m-1)\,c^2$ &c. majus quam $2ab+2ac+2ad$ &c.; addendo utrinque $(2m-2)\,ab+(2m-2)\,ac+(2m-2)\,ad$, &c. summa $(m-1)\,a^2+(2m-2)\,ab+(m-1)\,b^2+$ &c. $=(m-1)\,(a+b+c+$ &c$)^2$. major erit quam $2mab+2mac+2mad+$ &c. id est $(m-1)\,A^2$ majus erit quam $2mB$.

2. In genere sequitur ex hac demonstratione, quod quadratum summæ quarumvis quantitatum, quarum numerus est m, ductum in $(m-1)$, majus est quam summa productorum, quæ fiunt multiplicando binas quascunque ex illis quantitatibus inter se, ducta in $2m$. Sed facile cognoscitur ex formatione æquationum, quod CE est summa productorum quæ fiunt ex multiplicatione binarum quantitatum, quarum summa est D. Quare sequitur etiam $(m-1)\,D^2$ majus esse quam $2m$CE.

SECUNDA EPISTOLA EJUSDEM AD EUNDEM,

De radicibus æquationum, cum demonstratione aliarum quarundam regularum Algebræ.

Anno 1725. ad te scripsi me habere methodum demonstrandi NEWTONI regulam de radicibus impossibilibus in æquationibus, quæ methodus ex hoc claro principio deducitur; quadrata scilicet differentiarum quantitatum realium semper esse positiva. Deinde prima hujus methodi principia tibi misi, quæ in Transactionibus Philosophicis Mensis Maji Anni 1726. in lucem fuere edita. Propositum, quod ante aliquod tempus habui, edere Tractatum de Algebra, in quo & hunc & quosdam alios subjectos tractarem nova via, in causa fuit cur non operæ pretium putarem reliqua tibi mittere; sed quædam me jam movent rationes, ut una cum continuatione præcedentis methodi, parvum tibi mittam specimen duarum aliarum methodorum, quas in eodem subjecto sum secutus, cum quibusdam in æquationes observationibus, quas novas esse opinor; & quæ forsan magis tibi placebunt, quam quod pertinet ad ipsas radices impossibiles. Præter NEWTONI regulam, e sequentibus generalibus Propositionibus multæ variæque oriuntur regulæ inveniendi radices imaginarias, diversæ tum ab ea, quam NEWTONUS edidit, tum ab omnibus aliis, quæ jam in lucem prodierunt; unam speciatim exponam, omnibus huc usque notis utiliorem.

Po-

Ponamus dari æquationem dimensionum n, & hujus formæ

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - Ex^{n-5} + Fx^{n-6} - Gx^{n-7} + Hx^{n-8} - Ix^{n-9} + Kx^{n-10} \&c. = 0.$$

Sintque hujus æquationis radices a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l &c. erit $A = a + b + c + d + e +$ &c. Voco itaque a, b, c, &c. *Partes* seu *Terminos* coefficientis A; eandem ob causam voco ab, ac, ad, ae, bc, bd, be &c. *Partes* seu *terminos* coefficientis B; abc, abd, abe, bcd, &c. *Partes* seu *terminos* coefficientis C, & sic de ceteris. Per *dimensionem* alicujus termini intelligo numerum radicum, quæ in ejus partibus inter se sunt multiplicatæ, qui numerus semper æqualis est numero terminorum, qui in æquatione hunc coefficientem præcedunt. Sic A est coefficiens unius dimensionis, B duarum, C trium, & sic de ceteris. Partem seu terminum coefficientis C dico *similem* parti seu termino coefficientis G, ubi illa pars ipsius G continet omnes radices partis ipsius C, sic abc & $abcdefg$ sunt partes similes ipsorum C & G; eodem modo $abcd$, & $abcdef$ sunt partes similes ipsorum D & F; cum pars ipsius F contineat omnes radices partis ipsius D. *Dissimiles* voco partes, quæ communem radicem non habent, sic abc, & $defgh$ sunt partes dissimiles coefficientium C & F. Summam omnium productorum, multiplicando partes alicujus coefficientis, ut C, per similes partes alius coefficientis, ut G, sic exprimo $C'.G'$, ducendo lineolam supra utrumque coefficientem: eodem modo $D'.F'$ exprimit summam omnium productorum, quæ fieri possunt multiplicando partes similes ipsorum D & F inter se, & $C'.C'$ exprimit summam quadratorum omnium partium coefficientis C; sed $C'.C_{,}$ exprimit summam omnium productorum quæ fiunt multiplicando binos quoscunque terminos ipsius C inter se. (unde sequitur $C^2 = C'C' + 2C'.C_{,}$.) Hisce signis intellectis, & quinque Propositionibus præcedentis epistolæ præmissis, sequitur jam.

PROPOSITIO VI.

Si differentia dimensionum duorum quorumvis coefficientium ut C & G, *vocetur* m, *erit productum horum coefficientium æquale* $C'G' + (m+2)B'H' + \left(\frac{m+3}{1}\right)\left(\frac{m+4}{2}\right)A'I' + \left(\frac{m+4}{1}\right)\left(\frac{m+5}{2}\right)\left(\frac{m+6}{3}\right)1.K.$

Ubi B & H sunt coefficientes adjacentes ipsis C & G, A & I coefficientes adjacentes ipsis B & H, 1 & K coefficientes adjacentes ipsi A & I.

Notum est C esse æquale

$$abc + abd + abe + abf + abg + \&c.$$

$$G = abcdefg + abcdefh + abcdefi + bcdefgh + \&c.$$

Patet ulterius

1°. Quod in producto CG unusquisque terminus ipsius C' G' semel orietur, ut $a'b'c'defg$. Sed

2°. Quivis terminus ipsius B'H', ut $a'b^2cdefgh$, potest esse productum vel ex abc in $abdefgh$, vel ex abd in $abcefgh$, vel ex abe in $abcdfgh$, vel ex abf in $abcdegh$, vel ex abg in $abcdefh$, vel tandem ex abh in $abcdefg$; itaque potest esse productum ex quovis termino ipsius C qui cum radicibus, ab, contineat unam ex reliquis c, d, e, f, g, h, multiplicato per illum terminum ipsius G, qui cum ab ceteras quinque radices continet; id est productum illud $a^2b^2cdefgh$ tot dabitur vicibus, quot continet radices præter a, & b; vel in genere toties quoties unitas datur in differentia dimensionum ipsorum B & H., id est $m+2$ vicibus, quia m exprimit differentiam dimensionum ipsorum C & G; idirco, in expressione valoris ipsius CG, coefficiens secundi termini B'H' erit $m+2$.

3°. Unusquisque terminus, ipsius A'I', ut $a'bcdefghi$, potest esse productum cujusvis partis ipsius C, quæ cum radice a contineat duas quascunque e reliquis b, c, d, e, f, g, h, i, (quarum numerus æqualis est differentiæ dimensionum ipsorum A & I, id est in genere $= m+4$) multiplicatæ cum illa parte ipsius G quæ cum a reliquas sex radices continet; itaque $a'bcdefghi$ (vel quivis alius alius ipsius A'I' terminus) tot dabitur vicibus, quot dari possunt diversa producta ex binis quantitatibus, quarum numerus est $m+4$, id est vicibus $(m+4)\,(\frac{m+4-1}{2})$, vel $(\frac{m+3}{1})\,(\frac{m+4}{2})$; ideo ad exprimendum valorem ipsius CG, coefficiens tertii termini A'I' debet esse $(\frac{m+3}{1})\,(\frac{m+4}{2}.)$

4°. Unusquisque terminus ipsius 1 in K, ut $abcdefghik$, potest esse productum ex quavis parte ipsius C, quæ continet tres radices ipsius K, in illam partem ipsius G, quæ alias omnes continet radices; ideo 1 in K tot orietur vicibus in producto CG, quot fieri possunt diversa producta ex ternis quantitatibus, quarum numerus est $m+6$, id est vicibus $(m+6)$ $(\frac{m+5}{2})\,(\frac{m+4}{3})$; ideoque coefficiens quarti termini in expressione valoris ipsius CG, erit $(\frac{m+4}{1})\,(\frac{m+5}{2})\,(\frac{m+6}{3})$.

In genere, ad exprimendum valorem producti duorum quorumvis coefficientium, ut C & G; si x exprimat ordinem alicujus termini hujus valoris, ut ex: gr: ipsius A'I', idest, si x sit æqualis numero terminorum qui præcedunt A'I', ipsius A'I' coefficiens erit $(\frac{2x+m}{1})\,(\frac{2x+m-1}{2})$ $(\frac{2x+m-2}{3})$ &c. tot sumendo fractiones in hac progressione, quot dantur unitates in x.

CO-

COROLLARIUM I.

Si per hanc Propositionem quæratur quadratum alicujus coefficientis, ut E, erit $m = o$, differentia dimensionum coefficientium in hoc casu evanescente, & habebimus

$$E^2 = E' . E' + 2D'F' + 3 . \frac{4}{2} C'G' + 4 . \frac{5}{2} . \frac{6}{3} . B'H' \&c. =$$

$$E' . E' + 2D'F' + 6C'G' + 20B'H' + 70A'I' + 252K:$$

idcirco, si (ut in definitione) $E' . E$, exprimat summam productorum ex binis partibus quibuscunque ipsius E, erit $E^2 = E' . E' + 2E' . E_{,}$, ideoque

$$E' . E_{,} = D'F' + 3C'G' + 10B'H' + 35A'I' + 126K.$$

COROLLARIUM II.

Sequitur ex hac Propositione, quod

$$\begin{array}{lllllllll}
E^2 & = E' . E' & + 2D'F' & + 6C'G' & + 20B'H' & + 70A'I' & + 252K. \\
DF & = \cdots & D'F' & + 4C'G' & + 15B'H' & + 56A'I' & + 210K. \\
CG & = \cdots & \cdots & C'G' & + 6B'H' & + 28A'I' & + 120K. \\
BH & = \cdots & \cdots & \cdots & B'H' & + 8A'I' & + 45K. \\
AI & = \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & A'I' & + 10K. \\
K & = \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & K.
\end{array}$$

COROLLARIUM III.

Facile quoque patet ex Corol. præcedente, quod

$$\begin{array}{lllllll}
E' . E' & = E^2 & - 2DF & + 2CG & - 2BH & + 2AI & - 2K. \\
D'F' & = \cdots & DF & - 4CG & + 9BH & - 16AI & + 25K. \\
C'G' & = \cdots & \cdots & CG & - 6BH & + 20AI & - 50K. \\
B'H' & = \cdots & \cdots & \cdots & BH & - 8AI & + 35K. \\
A'I' & = \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & AI & - 10K.
\end{array}$$

PROPOSITIO VII.

Sit $l = n \left(\frac{n-1}{2}\right) \left(\frac{n-2}{3}\right)$ *&c., sumendo tot fractiones, quot coefficiens* E *habet dimensiones, erit semper* $\left(\frac{l-1}{2l}\right) E^2$ *majus quam* $DF - CG + BH - AI + K$, *si radices æquationis sunt omnes reales.*

Patet l exprimere numerum partium seu terminorum qui dantur in coefficien-

ficiente E; patet quoque ex Prop. V. quod $(\frac{l-1}{2l})E^2$ semper majus esse debet, quam summa productorum, quæ fiunt multiplicando binas partes quascunque ipsius E inter se, id est majus quam E'. E; Sed 2E'. E = E^2 — E'. E' = (per Theor. 1. Corol. ultimi) 2DF — CG + 2BH — 2AI + 2K; idcirco, cum $(\frac{l-1}{2l})E^2$ semper majus quam E'E, sequitur quod $(\frac{l-1}{2l})E^2$ etiam majus est quam DF — CG + BH — AI + K, si æquationis radices sint omnes reales.

SCHOLIUM.

Hæc prima fuit generalis propositio, quæ sequendo methodum meam mihi occurrebat. Cum enim primo observarem, quod, si l exprimat numerum quarumvis quantitatum, quadratum illarum summæ ductum in $\frac{l-1}{2l}$ semper majus esset summa productorum quæ fiunt multiplicando binas quascunque ex illis inter se, & quod excessus esset æqualis summæ quadratorum differentiarum harum quantitatum divisæ per $2l$, facile inde patebat, quod si in æquatione

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} \text{ \&c.} = 0,$$

ubi B est summa productorum quæ oriuntur ex multiplicatione binarum radicum inter se, si l exprimat numerum radicum in æquatione, $(\frac{l-1}{2l})A^2$ semper esse majus quam B; atque hæc est una pars Prop. V. Deinde comparavi summam productorum ex binis partibus ipsius B, cum producto AC, illamque summam inveni æqualem non ipsi AC, sed AC — D; unde collegi quod, si l exprimat numerum partium ipsius B, tunc $(\frac{l-1}{l2})B^2$ semper est majus quam AC — D, hæcque facile me duxerunt ad hanc generalem Propositionem.

PROPOSITIO VIII.

Exprimat r *dimensiones coefficientis* C, & s *differentiam dimensionum coefficientium* C & G, *sint* B & H *coefficientes adjacentes ipsis* C & G, *erit semper* (n — r — s) r. C G' *majus quam* (s + 1) (s + 2) B H', *si omnes æquationis radices sint quantitates reales, eodem signo affectæ.*

Nam sumendo differentias omnium harum partium ipsius C, quæ habent omnes

omnes radices communes præter unam, ut abc, abh, abi, &c. & multiplicando quadrata harum differentiarum per illas partes coefficientis D, quæ sunt dissimiles utrique parti sumtæ differentiæ, (requiritur ut coefficiens D sit dimensionum s), summa omnium horum quadratorum ita multiplicatorum consistet ex terminis ipsius C′G′ positive sumtis, & ex terminis ipsius B′H′ negative sumtis. Multiplicando hoc modo

$$(abc - abh)^2 + (abc - abi)^2 + (abc - abk)^2 \ \&c.$$
$$+ (abc - ach)^2 + (abc - aci)^2 + (abc - ack)^2 \ \&c.$$
$$+ (abc - bch)^2 + (abc - bci)^2 + (abc - bck)^2 \ \&c.$$

per $defg$, (terminum ipsius D, qui est dissimilis omnibus hisce partibus ipsius C,) patebit quod $a^2b^2c^2defg$ dabitur in summa productorum vicibus $r\ (n - r - s)$; hæc enim producta possunt etiam sic exprimi

$$defga^2b^2\ ((c - h)^2 + (c - i)^2 + (c - k)^2 + \&c.)$$
$$+ defga^2c^2\ ((b - h)^2 + (b - i)^2 + (b - k)^2 + \&c.)$$
$$+ defgb^2c^2\ ((a - h)^2 + (a - i)^2 + (a - k)^2 + \&c.)$$

ubi numerus differentiarum $c - h$, $c - i$, $c - k$, &c. quarum quadrata ducuntur in $defga^2b^2$, manifeste æqualis est numero radicum æquationis, quæ non dantur in $a^2b^2c^2defg$, vel in $abcdefg$, id est, æqualis excessui numeri radicum æquationis, supra dimensiones ipsius $abcdefg$, qui est terminus ipsius G, ideft tandem æqualis $n - r - s$. Sed colligendo in unam summam omnia illa producta, terminus $(n - r - s)\, a^2b^2c^2defg$ toties dabitur, quoties unitas datur in r; quia termini, qui subtrahuntur ex abc, possunt ab illo differre vel per defectum radicis c, ut abh, abi, abk, &c, vel per defectum radicis b, ut ach, aci, ack &c., vel per defectum radicis a, ut bch, bci, bck &c. ideft terminus $(n - r - s)\ a^2b^2c^2defg$ tot vicibus debet oriri, quot dantur dimensiones in abc, uno ex terminis ipsius C, vel quot dantur unitates in numero r, qui exprimit dimensiones ipsius C; ideoque terminus $a^2b^2c^2defg$ dabitur in summa dictorum productorum vicibus $r\ (n - r - s)$.

Pars negativa consistet ex terminis ipsius B′H′ duplicatis, quorum unusquisque, ut $a^2b^2cdefgh$, tot oriri debet vicibus, quot dari possunt differentiæ $c - d$, $c - e$, $c - f$, $c - g$, $d - e$ &c. inter terminos c, d, e, f, g &c., quorum numerus est æqualis $s + 2$; id est, terminus $2a^2b^2cdefgh$ dari debet vicibus $(s + 2)\ (\frac{s + 1}{2})$; ideoque $a^2b^2cdefgh$, vel quivis alius ipsius B′H′ terminus dari debet in parte negativa $(s + 1)\ (s + 2)$; cum autem tota summa sit positiva, sequitur quod $(n - r - s)\ r$ C′G′ semper majus est quam $(s + 1)\ (s + 2)$ B′H′.

COROLLARIUM I.

Sit comparandum E'E', summa quadratorum partium ipsius E, cum D'F' summa productorum ex partibus similibus ipsorum D & F; in hoc casu *s* evanescit, & $(n - r)\, r$ E'E' debet esse majus quam 2D'F'. Sit $(n - r)\, r = m$, erit

$$(n - r - 1)\,(r - 1) = m - n + 1;$$

&

$$(n - r - 2)\,(r - 2) = m - 2n + 4;$$

&

$$(n - r - 3)\,(r - 3) = m - 3n + 9;$$

&

$$(n - r - 4)\,(r - 4) = m - 4n + 16;$$

patet enim in genere, quod

$$(n - r - q)\,(r - q) = (n - r)\,r - qn + qq = m - qn + qq.$$

Tunc, per hanc propositionem, supponendo

$$\begin{array}{rl} mE'E' - 2D'F' &= a' \\ (m - n + 1)\ D'F' - 12C'G' &= b' \\ (m - 2n + 4)\ C'G' - 30B'H' &= c' \\ (m - 3n + 9)\ B'H' - 56A'I' &= d' \\ (m - 4n + 16)\ A'I' - 90K' &= e' \end{array}$$

Quantitates a', b', c', d', e', semper debent esse positivæ, ubi omnes æquationis radices sunt quantitates reales eodem signo affectæ; coefficientes partibus negativis præfixi sunt numeri 2, 12, 30, 56, quarum differentiæ crescunt per 8 in progressione arithmetica.

COROLLARIUM II.

Ponendo ut supra $(n - r)\, r = m$, ut etiam $m(m - n + 1) = m'$, $m'(m - 2n + 4) = m''$, $m''(m - 3n + 9) = m'''$, potest demonstrari eodem modo, quo hæc Propositio demonstrata fuit, quod si sit

$$\begin{array}{l} m\ E'E' - 2D'F' = a' \\ m'\ E'E' - 2 \cdot 12C'G' = a'' \\ m''\ E'E' - 2 \cdot 12 \cdot 30B'H' = a''' \\ m'''\ E'E' - 2 \cdot 12 \cdot 30 \cdot 56A'I' = a'''' \ \&c. \end{array}$$

Erunt

Erunt a', a'', a''', a''''; &c. semper positiva, si radices æquationis sint reales, sive iisdem signis afficiantur sive diversis. Coefficientes negativi fiunt ducendo coefficientes 2, 12, 30, 56, 90, Cor. præcedentis in se invicem.

PROPOSITIO IX.

Exprimant a', b', c', d', e', *&* m *easdem quantitates ac in Corollariis ultimæ Propositionis, & erit* $\mathrm{mE}^2 - (\mathrm{m}+\mathrm{n}+1)\,\mathrm{DF} = \mathrm{a}' + \mathrm{b}' + \mathrm{c}' + 5\mathrm{d}' + 14\mathrm{e}'$.

Nam per Cor. 2. Prop. VI.

$$E^2 = E'E' + 2D'F' + 6C'G' + 20B'H' + 70A'I' + 252K,$$

& per idem Cor.

$$DF = \cdot\cdot\cdot D'F' + 4C'G' + 15B'H' + 56A'I' + 210K;$$

Ergo

$mE^2 - (m+n+1)\,DF = mE'E' + (m-n-1)\,D'F' + (m-2n-2)\,2C'G' + (m-3n-3)\,5B'H' + (m-4n-4)\,14A'I' + (m-5n-5)\,42K =$ (substituendo successive pro $mE'E'$, $(m-n+1)\,D'F'$, $(m-2n+4)\,C'G'$, $(m-3n+9)\,B'H'$, $(m-4n+16)\,A'I'$, ipsorum valores deductos ex primo Corol. Propositionis præcedentis) $a'+b'+2c'+5a'+14e'$, ubi coefficientes præfixi ipsius a', b', c', d', e', sunt differentiæ coefficientium ipsorum $E'E'$, $D'F'$, $C'G'$, $B'H'$, $A'I'$, & K in valoribus ipsorum E^2 & DF desumtis ex Corol. 2. Prop. VI. suntque $1-0$, $2-1$, $6-4$, $20-15$, $70-56$, & $252-210$.

COROLLARIUM.

Cum sit $m = (n-r)\,r$, ideoque $m+n+1 = (n-r+1)\,(r+1)$, sequitur, quod $\left(\frac{r}{r+1}\right)\left(\frac{n-r}{n-r+1}\right)E^2$ semper debet esse majus quam DF, productum ex coefficientibus adjacentibus ipsi E; atque inde deducuntur fractiones, quæ in NEWTONI regula scribuntur supra terminos æquationis, & quæ multiplicatæ per quadrata terminorum, quibus supereminent, semper debent efficere productum majus producto ex terminis adjacentibus; si radices æquationis si reales. Manifestum enim est, quod fractio scribenda super terminum Ex^{n-r} est quotus divisionis ipsius $\frac{n-r}{r+1}$ per $\frac{n-r+1}{r}$.

COROLLARIUM I.

Sit comparandum $E'E'$, summa quadratorum partium ipsius E, cum $D'F'$ summa productorum ex partibus similibus ipsorum D & F; in hoc casu s evanescit, & $(n - r)\, r\, E'E'$ debet esse majus quam $2D'F'$. Sit $(n - r)\, r = m$, erit

$$(n - r - 1)(r - 1) = m - n + 1;$$

&

$$(n - r - 2)(r - 2) = m - 2n + 4;$$

&

$$(n - r - 3)(r - 3) = m - 3n + 9;$$

&

$$(n - r - 4)(r - 4) = m - 4n + 16;$$

patet enim in genere, quod

$$(n - r - q)(r - q) = (n - r)\, r - qn + qq = m - qn + qq.$$

Tunc, per hanc propositionem, supponendo

$$\begin{array}{rlcl}
 & mE'E' & - & 2D'F' = a' \\
(m - n + 1) & D'F' & - & 12C'G' = b' \\
(m - 2n + 4) & C'G' & - & 30B'H' = c' \\
(m - 3n + 9) & B'H' & - & 56A'I' = d' \\
(m - 4n + 16) & A'I' & - & 90K' = e'
\end{array}$$

Quantitates a', b', c', d', e', semper debent esse positivæ, ubi omnes æquationis radices sunt quantitates reales eodem signo affectæ; coefficientes partibus negativis præfixi sunt numeri 2, 12, 30, 56, quarum differentiæ crescunt per 8 in progressione arithmetica.

COROLLARIUM II.

Ponendo ut supra $(n - r)\, r = m$, ut etiam $m(m - n + 1) = m'$, $m'(m - 2n + 4) = m''$, $m''(m - 3n + 9) = m'''$, potest demonstrari eodem modo, quo hæc Propositio demonstrata fuit, quod si sit

$$\begin{array}{l}
m\, E'E' - 2D'F' = a' \\
m'\, E'E' - 2 \,.\, 12C'G' = a'' \\
m''\, E'E' - 2 \,.\, 12 \,.\, 30B'H' = a''' \\
m'''\, E'E' - 2 \,.\, 12 \,.\, 30 \,.\, 56A'I' = a'''' \text{ \&c.}
\end{array}$$

Erunt

Erunt a', a'', a''', a''''; &c. semper positiva, si radices æquationis sint reales, sive iisdem signis afficiantur sive diversis. Coefficientes negativi fiunt ducendo coefficientes 2, 12, 30, 56, 90, Cor. præcedentis in se invicem.

PROPOSITIO IX.

Exprimant a', b', c', d', e', *&* m *easdem quantitates ac in Corollariis ultimæ Propositionis, & erit* $mE^2 - (m + n + 1)\,DF = a' + b' + c' + 5d' + 14e'$.

Nam per Cor. 2. Prop. VI.

$$E^2 = E'E' + 2D'F' + 6C'G' + 20B'H' + 70A'I' + 252K,$$

& per idem Cor.

$$DF = \cdots D'F' + 4C'G' + 15B'H' + 56A'I' + 210K;$$

Ergo

$mE^2 - (m + n + 1)\,DF = mE'E' + (m - n - 1)\,D'F' + (m - 2n - 2)\,2C'G' + (m - 3n - 3)\,5B'H' + (m - 4n - 4)\,14A'I' + (m - 5n - 5)\,42K =$ (substituendo successive pro $mE'E'$, $(m - n + 1)\,D'F'$, $(m - 2n + 4)\,C'G'$, $(m - 3n + 9)\,B'H'$, $(m - 4n + 16)\,A'I'$, ipsorum valores deductos ex primo Corol. Propositionis præcedentis) $a' + b' + 2c' + 5d' + 14e'$, ubi coefficientes præfixi ipsius a', b', c', d', e', sunt differentiæ coefficientium ipsorum $E'E'$, $D'F'$, $C'G'$, $B'H'$, $A'I'$, & K in valoribus ipsorum E^2 & DF desumtis ex Corol. 2. Prop. VI. suntque $1 - 0$, $2 - 1$, $6 - 4$, $20 - 15$, $70 - 56$, & $252 - 210$.

COROLLARIUM.

Cum sit $m = (n - r)\,r$, ideoque $m + n + 1 = (n - r + 1)\,(r + 1)$, sequitur, quod $\left(\frac{r}{r + 1}\right)\left(\frac{n - r}{n - r + 1}\right) E^2$ semper debet esse majus quam DF, productum ex coefficientibus adjacentibus ipsi E; atque inde deducuntur fractiones, quæ in NEWTONI regula scribuntur supra terminos æquationis, & quæ multiplicatæ per quadrata terminorum, quibus supereminent, semper debent efficere productum majus producto ex terminis adjacentibus; si radices æquationis si reales. Manifestum enim est, quod fractio scribenda super terminum Ex^{n-r} est quotus divisionis ipsius $\frac{n - r}{r + 1}$ per $\frac{n - r + 1}{r}$.

PRO-

PROPOSITIO X.

Iisdem notis servatis ac in Propositionibus præcedentibus, eodem modo invenietur, quod, ut

$$
\begin{aligned}
mE^2 - (m+n+1)\,DF &= a'+b'+2c'+5d'+14e', \text{ ita} \\
(m-n+1)\,DF - (m+2n+4)\,CG &= b'+3c'+9d'+28e', \\
(m-2n+4)\,CG - (m+3n+9)\,BH &= c'+5d'+20e', \\
(m-3n+9)\,BH - (m+4n+16)\,AI &= d'+7e', \\
(m-4n+16)\,AI - (m+5n+25)\,K &= e'.
\end{aligned}
$$

Hæc theoremata facile deducuntur ex iis, quæ habentur in Cor. 2. Prop. VI. & in Cor. 1. Prop. VIII. & coefficientes præfixi ipsis a', b', c', d', e', sunt differentiæ coefficientium terminorum respondentium in valoribus ipsorum E^2, DF, CG, BH, AI, & K, in Corol. 2. Prop. VI.

COROLLARIUM.

Inde producta duorum quorumvis coefficientium inter se possunt conferri, ut DF & AI, si summa dimensionum ipsorum D & F sit æqualis summæ dimensionum ipsorum A & I. Sint dimensiones ipsorum A & F respective æquales ipsis s, & m, sitque $p = (\frac{n-s}{s+1})\ (\frac{n-s-1}{s+2})\ (\frac{n-s-2}{s+3})$ &c. tot sumendo fractiones, in eadem progressione, quot dantur unitates in differentia dimensionum ipsorum D & A. Sit $q = (\frac{n-m}{m+1})\ (\frac{n-m-1}{m+2})\ (\frac{n-m-2}{m+3})$ &c., tot sumendo fractiones, quot sumtæ fuerunt in valore ipsius p. Erit semper $\frac{q}{p}$ in DF majus quam AI si omnes radices æquationis sint quantitates reales, eodem signo affectæ. Hæc regula etiam locum habet, licet radices diversis afficiantur signis, si modo coefficientes D & F sint æquales.

PROPOSITIO XI.

Iisdem positis ac in Propositionibus præcedentibus;

erit

$$
\begin{aligned}
&1.\ \left.\begin{aligned} &mE^2 - (m+1)\,2DF + (m+4)\,2CG - (m+9)\,2BH \\ &+ (m+16)\,2AI - (m+25)\,2K \end{aligned}\right\} = a'. \\
&2.\ \left.\begin{aligned} &(m-n+1)\,DF - (m-n+4)\,4CG + (m-n+9)BH \\ &- (m-n+16)\,16AI + (m-n+25)\,25K \end{aligned}\right\} = b'. \\
&3.\ \left.\begin{aligned} &(m-2n+4)\,CG - (m-2n+9)\,6BH + (m-2n+16) \\ &.\,20AI - (m-2n+25)\,50K \end{aligned}\right\} = c'. \\
&4\ (m-3n+9)\,BH - (m-3n+16)\,8AI + (m-3n+25)\,35K = d'. \\
&5.\ (m-4n+16)\,AI - (m-4n+25)\,10K = e'.
\end{aligned}
$$

Hæc

Hæc theoremata facile deducuntur ex Cor. 3. Prop. VI. Primum clare patet hoc modo, $a' = mE'E' - 2D'F' =$ (per dictum Corollarium)

$$\left.\begin{matrix} mE^2 - 2mDF + 2mCG - 2mBH + 2mAI - 2mK \\ - 2DF + 8CG - 18BH + 32AI - 50K \end{matrix}\right\} = mE^2 -$$
$$(m+1)\,2DF + (m+4)\,2CG - (m+9)\,2BH + (m+16)\,2AI - (m+25)\,2K.$$

Reliqua theoremata deducuntur ex eodem Corollario collato cum Cor. 1. Prop. VIII.

PROPOSITIO XII.

Iisdem positis ac in Cor. 2. Prop. VIII. erit

$$1.\ \left.\begin{matrix} m\,E^2 - (m+1)\,2DF + (m+4)\,2CG - (m+9)\,2BH + (m+16) \\ \cdot\,2AI - (m+25)\,2K \end{matrix}\right\} = a.$$

$$2.\ \left.\begin{matrix} m'\,E^2 - 2m'\,DF + (m'-12)\,2CG - (m'-72)\,2BH + \\ (m'-240)\,2AI - (m'-600)\,2K \end{matrix}\right\} = a'.$$

$$3.\ \left.\begin{matrix} m''\,E^2 - 2m''\,DF + 2m''\,CG - (m''+360)\,2BH - \\ (m''+360)\,8.2AI - (m''+360)\,35.2K \end{matrix}\right\} = a''.$$

$$4.\ \left.\begin{matrix} m'''(E^2 - 2DF + 2CG - 2BH) + (m''' - 750.28) \\ 2AI - (m''' - 7200.28)\,2K \end{matrix}\right\} = a'''.$$

Hæc theoremata fluunt ex Cor. 3. Prop. VI. collato cum Corol. 2. Prop. VIII. Primum idem est ac primum in Propositione præcedente. Secundum demonstratur substituendo in $mE'E' - 24\,C'G' = a'$ valores ipsorum $E'E$ & $C'G'$ ex Corol. 3. Prop. VI. Tertium invenitur substituendo in $m''E'E' - 720\,B'H' = a''$ valores ipsorum $E'E'$ & $B'H'$; atque simili substitutione continuari possunt hæc theoremata.

COROLLARIUM GENERALE.

Ex hisce Propositionibus, magna deducitur varietas regularum, quibus inveniri potest, num æquatio aliqua habeat radices imaginarias, nec ne; Fundamentum regulæ NEWTONIANÆ demonstratur Prop. IX. & ipsius Corollariis. Septima Propositio ostendit, quod si $\left(\frac{l-1}{2l}\right) E^2$ non sit majus quam $DF - CG + BH - AI + K$, quædam æquationis radices debent esse imaginariæ; atque hæc regula aliquando deteget radices imaginarias, quæ per NEWTONI regulam non apparent. Huc usque nulla regula præter hasce duas publicata fuerat. Sed regulæ, quæ ex theorematibus propositionum XI. & XII. deducuntur, utrique præcedenti sunt

k 3 præ-

præferendæ; quia quæ radices imaginariæ possunt cognosci propositionibus VII. & IX., hæ semper patebunt per propositiones XI. & XII, & sæpe per has propositiones deteguntur radices impossibiles, quæ non apparent, si æquationes per propositiones VII. & IX. tantum examinentur. Utilitas, quam habent regulæ ex prop. XI. deductæ, præ illis, quæ ex præcedentibus deducuntur, plane patebit, si consideretur, quod per prop. XI. habemus valores quantitatum a', b', c', d', e' separatim, cum per propositiones præcedentes habeamus tantum valores quarundam summarum earundem quantitatum eodem signo unitarum. Jam facile patet, quod si hæ quantitates separatim sumtæ inveniantur positivæ, aggregatum quodcunque quarumvis illarum quantitatum debet etiam esse positivum; sed illud aggregatum potest esse positivum, licet quædam ex hisce quantitatibus, a', b', c', d', e' sint negativæ. Unde sequitur si radices æquationis afficiantur omnes eodem signo, nullaque appareat per prop. XI. radix impossibilis, nullam quoque apparere per propositiones præcedentes; quasdam vero radices imaginarias per XI. detegi posse ubi nullæ per propositiones, quæ hanc præcedunt, apparent. Si quædam æquationis radices sint positivæ, & quædam negativæ, (quod facile patebit considerando signa terminorum) tunc in multis casibus XII. propositio utilior erit ad detegendas radices imaginarias, quam quævis ex præcedentibus.

Regula, quæ sequitur ex primo theoremate prop. XII. locum habet, sive radices æquationis diversis afficiantur signis, sive eodem. Multiplicetur numerus, qui exprimit, quot termini in æquatione datum terminum, ut Ex^{n-r}, præcedunt, per numerum terminorum qui sequuntur in eadem æquatione, dicaturque productum illud m; sintque $+D$, $-C$, $+B$, $-A$, $+1$ coefficientes terminorum, qui præcedunt ipsum Ex^{n-r}, sintque $+F$, $-G$, $+H$, $-I$, $+K$, coefficientes terminorum sequentium; si $\frac{1}{2} m E^2$ non sit majus quam

$$(m+1)\,DF-(m-4)\,CG+(m-9)\;BH-(m+16)\,AI+(m+25)\,K,$$

æquatio habebit aliquas radices imaginarias; coefficientes $m+1$, $m+4$, $m+9$, &c. oriuntur addendo ipsi m quadrata numerorum 1, 2, 3, 4, &c., qui denotant distantias coefficientium, a coefficiente E. Secundum theorema prop. XII. ostendit, quod si $\frac{1}{2} m' E^2$ non sit majus quam

$$m'\,DF-(m'-12)\,CG+(m'-72)\,BH-(m'-240)\,AI+(m'-600)\,K$$

æquatio habebit aliquas radices imaginarias. Exempli gratia

Si quatuor radices æquationis quadrato quadraticæ, ut

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$$

sint

sint quantitates reales, deduci potest ex quavis propositionum V, VII, IX, & XI, quod $\frac{3}{8}A^2$ debet esse majus quam B, & $\frac{3}{8}C^2$ majus quam BD. Prop. VII. ulterius ostendit, quod $\frac{5}{12}B^2$ debet esse majus quam AC—D; nona demonstrat, quod $\frac{4}{9}B^2$ debet excedere AC; sed regula nostra, deducta ex prop. XI. ostendit quod $2B^2$ debet excedere $5AC - 8D$, cum excessus sit $\frac{1}{2}a'$, & regula deducta ex secundo theoremate prop. XII. ostendit, quod B^2 debet semper esse majus quam $2AC + 4D$, cum excessus sit $\frac{1}{4}a''$. Patet ex plurimis præcedentibus propositionibus, quod si radices æquationis habeant omnes idem signum, AC debet esse majus quam 16D. Sint dicti excessus $5B^2 - 12AC + 12D = p$, $4B^2 - 9AC = q$, $AC - 16D = s$. patet, quod a' $(= 4B^2 - 10AC + 16D) = q - s = \frac{2}{5}.(2p - s)$, & quod $a'' = q + s = \frac{2}{5}.2p + 4s$. Ponamus nunc,

1. Quod s est positivum, & patebit, quod si sit vel p, vel q negativum, a' debet etiam esse negativum; per consequens ubi VII. vel IX. propositio ostendit radices aliquas esse imaginarias, prop. XI. easdem quoque detegit; sed quia $a' = q - s = \frac{2}{5}(2p - s)$, potest inveniri negativum, ubi tamen p & q est utrumque positivum, sequitur, quod regula, ex prop. XI. deducta, possumus in data æquatione detegere radices imaginarias, quæ per propositiones præcedentes non apparent; sic si per NEWTONI regulam, vel per prop. VII. examinemus hac æquationem,

$$x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 7x + 1 = 0,$$

nulla apparebit radix imaginaria; sed cum $2B^2 - 5AC + 8D$ $(= \frac{1}{2}a') = 200 - 210 + 8 = -2$, fiat in hac æquatione negativum, patet duas hic dari radices imaginarias. Ponamus

2. Quod s sit negativum, & quod pateat ex signis æquationis aliquas radices esse positivas, aliquas negativas; in hoc casu, ut sciamus an æquatio habeat radices imaginarias, utilissima est regula quam deduximus ex 2 theor. prop. XII; scilicet, quod, si B^2 non sit majus quam $2AC+4D$, quædam æquationis radices debent esse imaginariæ; cum enim excessus ipsius B^2 supra $2AC+4D$ sit $= \frac{1}{4}a'' = \frac{1}{4}(q + s = \frac{1}{10}(2p + 4s)$, atque s sit negativum, manifestum est, quod si q vel p sit negativum, $\frac{1}{4}a''$ debet esse negativum; potest etiam $\frac{1}{4}a''$

esse

esse negativum, licet utrumque p & q sit positivum. Hæc itaque regula semper deteget, quasdam dari radices imaginarias, si quædam detegantur per Prop. VII. vel IX.; & sæpe ubi per hasce Propos. nullæ tales deteguntur radices, quædam tamen deteguntur per dictam regulam. Exemp. gr. Si examinetur hæc æquatio

$$x^4 + 5x^3 + 6x^2 - x - 12 = 0$$

nullæ deteguntur radices imaginariæ per Prop. VII. vel IX, & licet AC — 16D ($= s$) sit negativum, non tamen inde sequitur dari in æquatione radices impossibiles, quia patet ex signis terminorum radices hujus æquationis diversis affici signis; sed quia $B^2 - 2AC + 4D$ ($= 36 + 10 - 48 = -2$) est negativum, patet per nostram regulam hanc æquationem habere aliquas radices imaginarias.

Possem ostendere præterea, quomodo ope regularum ex propositionibus XI. & XII. deductarum detegi possit, num æquatio habeat plus quam duas radices impossibiles, & in genere, quomodo hisce regulis determinetur numerus radicum impossibilium; sed ut hoc strictè demonstretur, longa nimis explicatione, & quibusdam Lemmatibus indigerem: hoc tantum observandum, quod hæ propositiones XI. & XII. utilissimæ invenientur inter omnes, quas in hunc usum explicavi; Ex. gr. si æquatio hæc

$$\begin{matrix} x^4 & - 4ax^3 & + 6a^2x^2 & - 4ab^2x & + b^4 = 0 \\ + & - & + & - & + \end{matrix}$$

examinetur per regulam NEWTONI, invenietur habere quatuor radices impossibiles, si a sit majus quam b; licet enim quadratum secundi termini ductum in fractionem $\frac{3}{8}$ sit æquale producto ex primo & tertio termino, in hoc casu tamen signum — ponendum est sub secundum terminum. Idem dicendum de quarti termini quadrato.

Regula deducta ex Prop. VII. ostendit quatuor dari radices imaginarias, si a sit majus quam b, vel si b^2 sit majus quam $15a^2$. Sed regula deducta ex Prop. XI. ostendit quatuor radices esse semper imaginarias, ubi a est majus quam b, vel b^2 majus quam $9a^2$; unde patet regulæ hujus excellentia præ duabus hisce aliis. Tam multa dixi de æquationibus quadrato-quadraticis, ut observationes, quæ in æquationes plurium dimensionum fieri possunt, iis relinquere cogar, qui hoc sibi pensum inponere volent.

Dum præcedentes Propositiones investigarem, supputationes tam intricatas mihi fuit ineundum, ut sæpe conatus fuerim faciliorem detegere methodum hanc tractandi materiam. Hæc, quæ sequitur, multum mihi profuit, nec tibi forte injucunda videbitur; per hanc *maxima* quædam investigo facillima via, quæ vulgari methodo non ita commode possent demonstrari.

LEM-

LEMMA V.

Data linea AB in duas partes ad libitum secta ut in P, dico rectangulum ex partibus AP & PB fore *maximum*, si hæ partes sint æquales. Patet ex Elementis *Euclidis*. TAB. XIII. Fig. 4.

LEMMA VI.

Si linea AB dividatur in partes quotcunque AC, CD, DE, EB, productum ex omnibus hisce partibus erit *maximum*, ubi hæ partes sunt æquales inter se. TAB. XIII. Fig. 5.

Sit enim punctum D ubi placeat, manifestum est, quod si DB secetur in duas partes æquales in E, productum AC . CD . DE . EB majus erit, quam AC . CD . D*e* . *e*B, quia per Lemma præcedens DE . EB majus est quam D*e* . *e*B. Eandem ob rationem AD & CE debent æqualiter secari in C & D, per consequens necesse est ut omnes partes AC, CD, DE, EB sint æquales, ut productum ex iis omnibus sit *maximum*.

LEMMA VII.

Summa productorum, quæ fieri possunt ex binis partibus ipsius AB est *maxima*, ubi hæ partes sunt æquales. Summa horum productorum est AC . CB + CD . DB + DE . EB. Jam ut DE . EB sit *maximum*, DB debet æqualiter secari in E, per Lem. V. Eandem ob causam AD & CE debent æqualiter secari in C & D, idest omnes partes AC, CD, DE, EB debent esse æquales, ut summa omnium horum productorum sit *maxima*.

LEMMA VIII.

Summa productorum ex ternis partibus lineæ AB est *maxima*, ubi omnes partes sunt æquales. Hæc summa est AC . CD . DE + EB (AC . CD + AC . DE + CD . DE). Sit punctum E datum, manifestum est, quod AE debet æqualiter secari in C & D ut AC . CD . DE sit *maximum* per Lem. VI. & ut AC . CD + AC . DE + CD . DE sit *maximum* per Lem. VII. Unde sequitur, quod omnes hæ partes AC, CD, DE, EB debent esse æquales, ut summa productorum ex ternis illis sit maxima.

LEMMA IX.

Manifestum est hanc ratiocinandi methodum esse generalem, &, quod si summa quarumvis quantitatum sit data, summa omnium productorum, quæ fieri possunt multiplicando datum illarum numerum inter se, debet esse *maxima*, ubi hæ quantitates sunt æquales; sed summa quadratorum, cuborum, vel in genere, singularum harum quantitatum ad quamvis potentiam elevatarum, est *minima* ubi hæ quantitates sunt æquales.

THEOREMA.

Ponamus $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - Ex^{n-5} + \&c. = 0$ *esse æquationem cujus omnes radices non sunt æquales: exprimat* r *dimensionem alicujus coefficientis, ut ipsius* D; *sitque* $l = n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)$ *&c. tot sumendo factores, quot dantur unitates in* r. *erit semper* $\frac{1}{n^r}.A^r$ *majus quam* D, *si radices æquationis sint quantitates reales, eodem signo affectæ.*

Hoc potest demonstrari per Prop. præcedentes; sed ut demonstremus per postrema Lemmata, sumamus æquationem, cujus omnes radices sint æquales, illarumque radicum summa $= A$, summæ radicum æquationis propositæ, æquatio assumta erit $(x - \frac{1}{n}A)^n = 0$,

vel

$$x^n - Ax^{n-1} + n\left(\frac{n-1}{2}\right)\frac{A^2}{n^2}x^{n-2} - n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\frac{A^3}{n^3}x^{n-3} \ \&c. = 0;$$

& si r exprimat dimensionem coefficientes alicujus termini hujus æquationis (idest numerum terminorum, qui illum coefficientem præcedunt) manifestum est quod ipse terminus erit $l.\frac{A^r}{n^r}.x^{n-r}$; sed per suppositionem Dx^{n-r} est terminus correspondens in æquatione proposita, & D debet esse summa omnium productorum, quæ fieri possunt multiplicando tot radices æquationis inter se, quot dantur unitates in r. & $\frac{lA^r}{n^r}$ debet esse summa similium productorum, ex radicibus æquationis assumtæ, quæ ultima summa maxima est, per Lem: præcedens, quia æquationis assumtæ radices sunt omnes æquales, earumque summa æqualis summæ radicum æquationis propositæ, & summa ejusmodi productorum est maxima, ubi quantitates sunt æquales inter se.

Sequendo eandem methodum potest demonstrari, quod $\left(\frac{2B.}{n(n-1)}\right)^{\frac{r}{2}} l$ semper majus esse debet quam coefficiens termini x^{n-r} in æquatione, cujus radices sunt quantitates reales, eodem signo affectæ, dummodo r sit numerus major quam 2. Eodem modo $\left(\frac{2.3C}{n(n-1)(n-2)}\right)^{\frac{r}{3}}.l$ debet esse

majus

majus dicto coefficente, si r sit numerus major quam 3. Hæc theoremata facile possunt continuari.

Tertia methodus, de qua initio hujus epistolæ mentionem feci, deducitur ex consideratione limitum radicum æquationis, & licet, quod ad hos limites adtinet, jam ab aliis auctoribus fuerit explicatum, quia tamen illud diversa via demonstro, atque huic materiæ applico, breviter hujus methodi dabo rationem.

LEMMA X.

Si transformetur æquatio quadrato-quadratica

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0,$$

in aliam quæ habeat omnes suas radices respective minores valoribus ipsius x, data quantitate e, ponendo $y = x - e$, vel $y + e = x$, æquatio transformata, inverso terminorum ordine, hanc induet formam.

$$\begin{array}{lllll} e^4 & + 4e^3y & + 6e^2y^2 & + 4ey^3 & + y^4 = 0. \\ - Ae^3 & - 3Ae^2y & - 3Aey^2 & - A & \\ + Be^2 & + 2Bey & + By & & \\ - Ce & - Cy & & & \\ + D & & & & \end{array}$$

Ubi manifestum est

1°. Quod primus terminus $e^4 - Ae^3 + Be^2 - Ce + D$, est quantitas, quæ oritur substituendo e pro x in æquatione proposita,

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D.$$

2°. Quod coefficiens secundi termini

$$4e^3 - 3Ae^2 + 2Be - C$$

est quantitas, quæ oritur multiplicando unamquamque partem primæ

$$e^4 - Ae^3 + Be^2 - Ce + D$$

per indicem ipsius e in illa parte, & dividendo productum per e.

3°. Coefficiens tertii termini $6e^2 - 3Ae + B$ oritur ex præcedente,

$$4e^3 - 3Ae^2 + 2Be - C$$

multiplicando unamquamque partem per indicem ipsius e, & dividendo productum per $2e$.

4. Coefficiens quarti termini oritur eodem modo ex præcedente, ubi productum dividendum est per $3e$. Et in genere coefficiens cujusvis ter-

mini deduci poteſt ex coefficiente termini præcedentis, multiplicando unamquamque partem per indicem ipſius e, & dividendo productum per e, & per indicem ipſius y in termino, qui quæritur.

LEMMA XI.

Si quævis æquatio transformetur eodem modo, ut

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \&c. = 0,$$

ſupponendo $y = x - e$, vel $x = e + y$, & per conſequens $x^n = (e+y)^n$, $Ax^{n-1} = A\,(e+y)^{n-1}$, $Bx^{n-2} = B\,(e+y)^{n-2}$ &c. æquatio transformata, inverſo terminorum ordine hanc induet formam.

$$\begin{array}{llll} e^n & + \; n \,.\, e^{n-1} y & + \; n \,.\, \frac{n-1}{2} e^{n-2} y^2 & \&c. \\ - Ae^{n-1} & - (n-1)\, Ae^{n-2} y & - (n-1)(\frac{n-2}{2})\, Ae^{n-3} y^2 & \&c. \\ + Be^{n-2} & + (n-2)\, Be^{n-3} y & + (n-2)(\frac{n-3}{2})\, Be^{n-4} y^2 & \&c. \\ - Ce^{n-3} & - (n-3)\, Ce^{n-4} y & - (n-3)(\frac{n-4}{2})\, Ce^{n-5} y^2 & \&c. \\ \&c. & \&c. & \&c. & \end{array}$$

Ubi patet

1°. Quod primus terminus $e^n - Ae^{n-1} + Be^{n-2} - Ce^{n-3}$ &c. eſt quantitas, quæ oritur ſubſtituendo e loco ipſius x in æquatione

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} \;\&c.$$

2°. Quod coefficiens ſecundi termini

$$ne^{n-1} - (n-1)\,Ae^{n-2} + (n-2)\,Be^{n-3} - (n-3)Ce^{n-4} \;\&c.$$

deducitur ex præcedente, multiplicando quasvis ejus partes per indicem ipſius e in illa parte, & dividendo productum per e,

3°. Quod coefficiens tertii termini deducitur ex coefficiente ſecundi, multiplicando eodem modo quamvis ejus partem per indicem ipſius e in illa parte, & dividendo per $2e$. In genere, coefficiens cujusvis termini, ut y^r, deducitur

citur ex coefficiente termini præcedentis, videlicet y^{r-1}, multiplicando quamvis partem hujus coefficientis, per indicem ipsius e in illa parte, & dividendo productum per re, id est per e ductum in indicem ipsius y.

LEMMA XII.

Si substituantur per vices duæ quælibet quantitates K & L loco ipsius x in æquatione

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = o,$$

& quantitates, quæ ex hisce substitutionibus oriuntur, sint affectæ diversis signis, erunt K & L limites unius vel plurium radicum realium æquationis propositæ; ideft una harum quantitatum debet esse major, altera minor, quam una aut plures radices reales hujus æquationis.

Si enim supponas a, b, c, d esse radices hujus æquationis, patet, ex æquationum genesi, quod

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = (x-a)\ (x-b)\ (x-c)\ (x-d);$$

ideoque si substituatur K & L pro x, in

$$(x-a)\ (x-b)\ (x-c)\ (x-d)$$

& productum sit in uno casu positivum, & in altero negativum, sequitur quod unus ex dictis factoribus, si K pro x substituatur, debet habere signum diversum ab eo, quod habet, si L pro x substituatur. Ponamus illum factorem esse $x-b$, cum $K-b$, & $L-b$ sint quantitates, quarum una est positiva, & altera negativa, sequitur quod b, una e radicibus æquationis, debet esse minor quam una, & major quam altera harum quantitatum K & L. Ideft K & L erunt limites hujus radicis.

Dico porro, quod radix cujus K & L sunt limites, debet esse radix realis propositæ æquationis. Producti enim ex factoribus, qui radices impossibiles continent in æquatione nunquam potest signum mutari, quævis quantitas realis substituatur pro x, quia numerus ejusmodi radicum semper est par; & productum e duabus talibus radicibus, ut $(x-m-\sqrt{-n^2})$ $(x-m+\sqrt{-n^2})$ est $(x-m)^2+n^2$, quod semper est positivum, quæcunque quantitas pro x substituatur, dum n^2 manet positivum, id est, dum hæ duæ radices manent impossibiles.

LEMMA XIII.

Si substituantur K & L per vices pro x in æquatione $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2}$ &c, & quantitates, quæ inde oriuntur, diversis afficiantur signis, erunt K & L limites unius vel plurium radicum æquationis propositæ: hoc Lemma eodem modo ac præcedens potest demonstrari.

 THEO-

THEOREMA I.

Si a, b, c, d sint radices æquationis

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0,$$

erunt hæ limites æquationis

$$4x^3 - 3Ax^2 + 2Bx - C = 0.$$

Ponamus a esse minimam e radicibus æquationis quadrato-quadraticæ

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0.$$

b secundam, c tertiam, d quartam; erunt valores ipsius y in æquatione Lemmatis X, $a - e$, $b - e$, $c - e$, $d - e$; deinde substituendo successive a, b, c, d pro e in dicta æquatione ipsius y, unus e valoribus hujus evanescet in una quaque substitutione; & primo termino æquationis ipsius y, videlicet $e^4 - Ae^3 + Be^2 - Ce + D$, evanescente, æquatio reducetur ad cubicam hujus formæ,

$$\begin{array}{l} 4e^3 + 6e^2y + 4ey^2 + y^3 = 0. \\ -3Ae^2 - 3Aey - Ay^2 \\ +2Be + B \\ -C \end{array}$$

Per consequens $4e^3 - 3Ae^2 + 2Be - C$ debet esse productum ex reliquis tribus radicibus ipsius y, mutato signo; id est hoc productum debet esse æquale

$$-(b-a)\ (c-a)\ (d-a),$$

quando e supponitur æquale a; debet esse

$$-(a-b)\ (c-b)\ (d-b),$$

quando $e = b$; debet esse

$$-(a-c)\ (b-c)\ (d-c)$$

quando $e = c$; tandem debet esse

$$-(a-d)\ (b-d)\ (c-d)$$

quando $e = d$. Jam patet, quod hæc producta

$(b-a)\ (c-d)\ (d-a)$; $(a-b)\ (c-b)\ (d-b)$; $a-c)\ (b-c)\ (d-c)$; $(a-d)\ (b-d)\ (c-d)$; debent affici respective signis $+$, $-$, $+$, $-$; cum pri-

primum ſit productum ex tribus quantitatibus poſitivis; ſecundum, ex una negativa & duabus poſitivis; tertium ex duabus negativis & una poſitiva; quartum ex tribus negativis: ideo, cum ſubſtituendo a, b, c, d, per vices pro e in quantitate $4e^3 - 3Ae^2 + 2Be - C$, hæc quantitas alternatim fiat poſitiva & negativa, ſequitur ex ultimo Lemmate, a, b, c, d eſſe limites æquationis $4e^3 - 3Ae^2 + 2Be - C = o$, vel $4x^3 - 3Ax^2 + 2Bx - C = o$.

COROLLARIUM.

Sequitur ex hoc theoremate, quod ſi a', b', c' ſint radices æquationis $4e^3 - 3Ae^2 + 2Be - C = o$, debent eædem eſſe limites radicum a, b, c, d radices æquationis quadrato-quadraticæ $x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = o$; ſi enim a, b, c, d ſint limites radicum a', b', c', debent reciproce hæ eſſe limites inter a, b, c, & d.

THEOREMA II.

Multiplicentur termini æquationis cujusvis quadrato-quadraticæ, ut $x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = o$, per arithmeticam ſeriem quantitatum $l + 4m$, $l + 3m$, $l + 2m$, $l + m$, l, erunt radices æquationis propoſitæ limites radicum æquationis, quæ ex dicta multiplicatione oritur, ideſt hujus æquationis

$$\begin{array}{l} lx^4 - lAx^3 + lBx^2 - lCx + lD = o. \\ + 4mx^4 - 3mAx^3 + 2mBx^2 - mCx \end{array}$$

ponamus enim, quod ſubſtituendo a, b, c, d, radices æquationis datæ $x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = o$, ſucceſſive pro x in $4x^3 - 3Ax^2 + Bx - C$, quantitates quæ inde oriuntur, ſint $-R$, $+S$, $-T$, $+Z$; ſi eædem ſubſtituantur in æquatione

$$\begin{array}{l} lx^4 - lAx^3 + lBx^2 - lCx + lD = o, \\ + 4mx^4 - 3mAx^3 + 2mBx^2 - mCx \end{array}$$

cum evaneſcat, in quavis ſubſtitutione, $lx^4 - lAx^3 + lBx^2 - lCx + lD$, patet evidenter, quod reliquum evadet ſucceſſive æquale $-mRx$, $+mSx$, $-mTx$, $+mZx$; ubi, cum ſigna harum quantitatum ſint alternatim negativa & poſitiva, patet a, b, c, d eſſe limites ultimæ æquationis, per Lem. XII.

COROLLARIUM.

Hinc ſequitur a, b, c, & d eſſe limites æquationis cubicæ

$$Ax^3 - 2Bx^2 + 3Cx - 4D = o.$$

&

& converſim radices hujus cubicæ eſſe limites radicum æquationis quadrato-quadraticæ

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = o;$$

nam multiplicando hanc quadrato-quadraticam æquationem per progreſſionem arithmeticam, o, — 1, — 2, — 3, — 4, oritur hæc cubica

$$Ax^3 - 2Bx^2 - 3Cx + D = o.$$

THEOREMA III.

In genere, radices æquationis

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \&c. = o,$$

ſunt limites radicum æquationis

$$nx^{n-1} - (n-1)\ Ax^{n-2} + (n-2)\ Bx^{n-3}\ \&c = o,$$

vel cujusvis æquationis, quæ deducitur ex prima, multiplicando ipſius terminos per quamvis arithmeticam progreſſionem, ut $(l+d)$, $(l+2d)$, $(l+3d)$, &c; & converſim radices hujus novæ æquationis erunt limites radicum æquationis propoſitæ,

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - \&c. = o.$$

Hujus Theorematis demonſtratio deducitur ex Lemmatibus XI. & XIII, eodem modo, quo præcedentia Theoremata deducta fuere ex Lemmatibus X, & XII. atque per hæc Theoremata facile pervenitur ad ea, quæ ſuper hac materia tractantur ab algebraicis ſcriptoribus.

THEOREMA IV.

Æquatio

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \& = o;$$

tot habebit radices imaginarias, quot dantur in æquatione

$$nx^{n-1} - (n-1)\ A^{n-2} + (n-2)\ Bx^{n-3}\ \&c. = o,$$

vel in æquatione

$$Ax^{n-1} - 2Bx^{n-2} + 3Cx^{n-3} - \&c. = o.$$

Ponas aliquam radicem æquationis

BX

$$nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} \&c. = 0,$$

ut p, fieri imaginariam; duæ radices æquationis $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \&c. = 0$, quæ hujus p sunt limites, non possunt ambæ esse quantitates reales; patet enim ex demonstratione Theorematis I, si hæ radices sint quantitates reales, & substituantur pro x in

$$nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} \&c,$$

quantitates, quæ inde orientur, contrariis debere affici signis, & per consequens radix p, cujus illæ sunt limites, debet esse radix realis, contra suppositionem; idem locum habet, si agatur de æquatione

$$Ax^{n-1} - 2Bx^{n-2} + 3Cx^{n-3} - \&c. = 0,$$

eandem ob rationem.

COROLLARIUM I.

Æquatio quadrato-quadratica,

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$$

duas habebit radices imaginarias, si duæ dentur tales in æquatione

$$4x^3 - 3Ax^2 + 2Bx - C = 0;$$

vel in æquatione

$$Ax^3 - 2Bx^2 + 3Cx - 4D = 0.$$

Sed duæ radices æquationis

$$4x^3 - 3Ax^2 + 2Bx - C = 0,$$

sunt imaginariæ, si sint imaginariæ ambæ radices æquationis quadraticæ

$$6x^2 - 3Ax + B = 0,$$

vel æquationis

$$3Ax^2 - 4Bx + 3C = 0,$$

quia radices harum æquationum quadraticarum sunt limites illius cubicæ æquationis, per Theor. III. Eandem ob causam duæ radices æquationis

$$Ax^3 - 2Bx^2 + 3Cx - 4D = 0$$

 erunt

erunt imaginariæ si sint impossibiles radices quadraticæ

$$3Ax^2 - 4Bx + 3C = \text{, vel hujus } Bx^2 - 3Cx + 6D = o.$$

Ideo duæ ex radicibus æquationis

$$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = o$$

erunt imaginariæ, quando radices harum quadraticarum

$$6x^2 - 3Ax + B = o, \; 3Ax^2 - 4Bx + 3C = o, \; Bx^2 - 3Cx + 6D = o$$

evadunt impossibiles, id est, per Prop. I. quando $\frac{2}{3}A^2$ minus est quam B, vel $\frac{4}{9}B^2$, minus quam AC, vel $\frac{3}{8}C^2$ minus quam BD.

COROLLARIUM II.

Procedendo eodem modo ex quavis æquatione, ut

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} \text{ \&c.} = o,$$

tot possunt deduci æquationes quadraticæ, quot dantur termini in æquatione proposita, primo & ultimo exceptis: & omnium harum æquationum quadraticarum radices debent esse reales, si proposita nullas habeat imaginarias. Quadratica deducta ex tribus primis terminis, $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2}$, habebit hanc formam,

$$n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3) \text{ \&c. } x^2 -$$
$$(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4) \text{ \&c. } Ax -$$
$$(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,(n-5) \text{ \&c. . } B,$$

continuando seriem factorum donec tot dantur quot dantur unitates in $n-2$: deinde dividendo æquationem per factores $n-2$, $n-3$, &c. qui in quovis coefficiente apparent, æquatio evadet ejusmodi,

$$n(n-1).x^2 - (n-1).2Ax + 2.1.B = o;$$

Cujus radices erunt imaginariæ, per Prop. I, quando $n\,(n-1)\,2\,.\,4B$ majus est quam $(n-1)^2.4A^2$, vel quando B majus est quam $\frac{n-1}{2n}A^2$, ita ut proposita æquatio debeat habere aliquas radices imaginarias, si sit

B majus quam $\frac{n-1}{2n}$ A^2, ut demonstratum fuit alio modo in Prop. VII.

Quadratica æquatio eodem modo deducta ex tribus primis terminis æquationis

$$Ax^{n-1} - 2Bx^{n-2} + 3Cx^{n-3} \ \&c = 0;$$

hanc induet formam $(n-1)\,(n-2)\,(n-3)$ &c. . $Ax^2 - (n-2)\,(n-3)\,(n-4)$ &c. . $2Bx + (n-3)\,(n-4)\,(n-5)$ &c. . $3C = 0$; quæ, dividendo per factores communes cuivis termino, reducitur ad hanc

$$(n-1)\,(n-2)\,Ax^2 - (n-2)\,.\,4Bx + 6C = 0;$$

cujus radices erunt imaginariæ, quando $\frac{2}{3}\,.\,\frac{n-2}{n-1}\,.\,B^2$ minus est quam AC; ideoque in hoc casu, quædam e radicibus æquationis propositæ erunt etiam imaginariæ.

COROLLARIUM III.

In genere sint

$$Dx^{n-r-1} - Ex^{n-r} + Fx^{n-r-i}$$

utcunque tres termini æquationis

$$x^n - Ax^{n-1} + {}^{n-2} \ \&c. = 0,$$

se mutuo sequentes; multiplicentur hujus æquationis termini primo per progressionem n, $n-1$, $n-2$ &c. deinde per $n-1$, $n-2$, $n-3$ &c, tum per $n-2$, $n-3$, $n-4$ &c, donec multiplicaveris per tot progressiones, quot dantur unitates in $n-r-1$. Porro termini, qui ex primis multiplicationibus oriuntur, multiplicentur toties per progressionem 0, 1, 2, 3 &c, quoties unitas datur in $r-1$ & pervenietur tandem ad quadraticam æquationem hujus formæ

$$(n-r+1)(n-r)(n-r-1)(n-r-2)\&c.\,(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)\ \&c.\,.\,Dx^2 - (n-r)(n-r-1)(n-r-2)(n-r-3)\&c.\,.\,r\,(r-1)\,(r-2)\,(r-3)\ \&c.\,.\,Ex + (n-r-1)\,(n-r-2)\,(n-r-3)(n-r-4)\&c.\,.\,(r+1)\,(r(r-1)\,(r-2)\ \&c.\,.\,F = 0.$$

& dividendo per factores $n-r-1$, $n-r-2$ &c. & $r-1$, $r-2$ &c. qui in quovis coefficiente dantur, æquatio ad hanc formam reducetur,

$$(n-r+1)\,(n-r)\,2\,.\,1\,.\,Dx^2 - (n-r)\,2\,.\,r\,.\,2Ex + 2\,.\,1\,.\,(r+1)\,rF = 0,$$

cujus radices erunt imaginariæ (per Prop. I.) quando $(\frac{n-r}{n-r+1})\ (\frac{r}{r+1})E^2$ minus est quam DF.

Unde patet si quivis terminus hujus seriei fractionum

$$\frac{n}{1},\ \frac{n-1}{2},\ \frac{n-2}{3},\ \frac{n-3}{4}\ \&c.\ \frac{n-r+1}{r},\ \frac{n-r}{r+1},\ \frac{n-r-1}{r+2},$$

&c. dividatur per terminum proxime antecedentem, & quotientes ponantur super terminos æquationis

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2}\ Cx^{n-3}\ \&c. = o,$$

incipiendo a secundo termino, si hoc peracto, quadratum cujusvis termini ductum in fractionem supereminentem inveniatur minus quam productum ex terminis adjacentibus, quasdam hujus æquationis radices esse imaginarias.

Plura possent addi super hanc materiam, sed vereor ne putes me jam ea dixisse, quæ sufficiunt, ideo addam tantum demonstrationem quarundam regularum algebraicarum, & quorundam Theorematum, quæ facillime ex Lemmate XI. deducuntur.

I. Regula, qua cognoscitur, num duæ vel plures radices æquationis sint æquales, immediate sequitur ex dicto Lemmate. Pone duas radices æquationis

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3}\ \&c. = o,$$

esse æquales, erunt etiam æquales duo valores ipsius y, (quod semper est æquale $x - e$). Ponamus e esse æquale uni ex duobus valoribus æqualibus ipsius x, & evanescent duo valores ipsius y; ideoque primus & secundus terminus æquationis ipsius y in Lem. XI. debent evanescere; quia y^2 debet dari in quovis termino: erunt ergo

$$e^n - Ae^{n-1} + Be^{n-2} - Ce^{n-3}\ \&c. = o,$$

&

$$ne^{n-1} - (n-1) . Ae^{n-2} + (n-2)\ Be^{n-3}\ \&c. = o;$$

per consequens duæ hæ æquationes habebunt unam radicem communem, quæ debet esse una ex radicibus ipsius x, quæ æquales supponebantur. Est ergo manifestum, quod ubi duo valores ipsius x sunt æquales in æquatione

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2}\ \&c. = o,$$

illorum unus debet esse radix æquationis

nx

$$nx^{n-1} - (n-1)\,Ax^{n-2} + (-2)\,Bx^{n-3} \text{ \&c.} = o.$$

Si tres valores ipsius x supponantur æquales, inter se & ipsi e, tres valores ipsius y, $(= x - e)$ evanescent, & tres primi termini æquationis ipsius y in Lem. XI. evanescunt; ideoque erit

$$n\ (n-1)\,.\,e^{n-2} - (n-1)\ (n-2)\ .\ Ae^{n-3} + (n-2)$$

$$.\ (n-3)\ .\ Be^{n-4} \text{ \&c.} = o;$$

& unus ex æqualibus valoribus ipsius x erit una ex radicibus hujus ultimæ æquationis; & duo horum valorum æqualium erunt inter radices æquationis

$$nx^{n-1} - (n-1)\,.\,Ax^{n-2} + (n-2)\ Bx^{n-3} \text{ \&c.} = o.$$

In genere si æquatio

$$x^{n} - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \text{ \&c.} = o$$

tot habeat radices æquales, quot dantur unitates in S, tot ex hisce radicibus dabuntur in æquatione

$$nx^{n-1} - (n-1)\ .\ Ax^{n-2} + (n-2)\,.\,Bx^{n-3} \text{ \&c,} = o,$$

quot dantur unitates in S $-$ 1. Eodem modo tot erunt ex valoribus æqualibus in æquatione

$$n\,(n-1)\,.\,x^{n-2} - (n-1)\ (n-2)\,Ax^{n-3} + (n-2)\,(n-3)\,Bx^{n-4} \text{ \&c.} = o,$$

quot dantut unitates in S $-$ 2, & sic deinceps.

II. Generalis regula, quam dedit NEWTONUS in *Articulo de limitibus æquationum*, qua invenitur limes major quovis ex valoribus ipsius x, immediate deducitur ex Lem. XI. Patet enim, quod si e talis sit quantitas, ut posita in omnibus coefficientibus ipsius y, videlicet in

$$e^{n} - Ae^{n-1} + Be^{n-2} \text{ \&c. } ne^{n-1} - (n-1)\,.\,Ae^{n-2} + (-2)\,Be^{n-3} \text{ \&c,}$$

$$n\,(\frac{n-1}{2})e^{n-2} - (n-1)(\frac{n-2}{2})\,Ae^{n-3} + (n-2)\,(\frac{n-3}{2})\ Be^{n-4} \text{ \&c,}$$

det omnes quantitates, quæ inde oriuntur, positivas, in hoc casu, cum nulla sit mutatio signorum in æquatione ipsius y, sequitur omnes ipsius y valores esse negativos; & cum sit semper $y = x - e$, patet e esse quanti-

titatem majorem quovis valore ipsius x, id est e debet esse majus quavis radice æquationis

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} \text{ \&c.} = o.$$

III. Ex eodem Lem. XI. Theoremata quædam utilissima circa methodum Serierum & Fluxionum, & resolutionem æquationum facillime deducuntur. Patet enim, quod coefficiens secundi termini in æquatione ipsius y in dicto Lemmate est fluxio primi termini divisa per fluxionem ipsius e; coefficiens tertii termini est secunda fluxio primi divisa per $2\dot{e}^2$; ponendo e fluere uniformiter; termini tertii coefficiens est tertia fluxio primi divisa per $2 . 3\dot{e}^3$, & sic deinceps: ideoque supponendo $e^n - Ae^{n-1} + Be^{n-3}$ &c. $= c$, æquatio qua y determinari debet, erit

$$c + \frac{\dot{c}}{\dot{e}} y + \frac{\ddot{c}}{1 . 2\dot{e}^2} y^2 + \frac{\dddot{c}}{1 . 2 . \dot{e}^3} y^3 \text{ \&c.} = o.$$

atque inde, quando e est propemodum valor ipsius x, Theoremata deduci possunt, quibus approximare possumus ad y, ac proinde ad x, quod supponitur æquale $y + e$.

Tab. XIII. Fig. 5. IV. Si AP ($= x$) abscissa, PM ($= z$) ordinata cujusvis curvæ BLM; & ponamus aliam quamcunque abscissam AK $= e$, & ordinatam KL $= c$, erit

$$z\ (= \text{PM}) = c \mp \frac{\dot{c}}{\dot{e}} y \mp \frac{\ddot{c}}{2\dot{e}^2} y^2 \mp \frac{\dddot{c}}{2 . 3\dot{e}^3} y^3 \mp \frac{\ddddot{c}}{2 . 3 . 3\dot{e}^4} y^4 \text{ \&c.}$$

Ponatur enim z æquale cuicunque seriei, quæ consistat ex datis quantitatibus, & potentiis ipsius x, ut $Ax^n + Bx^r + Cx^s$ &c. & substituendo $e \mp y$ loco ipsius x habebimus eodem modo ac in Lem. XI.

$$z = Ae^n \mp nAe^{n-1} y + n \left(\frac{n-1}{2}\right) Ae^{n-2} y^2 \text{ \&c.}$$

$$+ Be^r \mp rBe^{r-1} y + r \left(\frac{r-1}{2}\right) Be^{r-2} y^2 \text{ \&c.}$$

$$+ Ce^s \mp sCe^{s-1} y + s \left(\frac{s-1}{2}\right) Ce^{s-2} y^2 \text{ \&c.}$$

&c. &c. &c.

Sed ubi $x = e$, tunc

$z =$

$$x = e = Ae^n + Be^r + Ce^s \text{ \&c.}$$

&

$$\dot{e} = nAe^{n-1}\dot{e} + rBe^{r-1}\dot{e} + s\, Ce^{s-1}\dot{e} \text{ \&c.}$$

$$\ddot{e} = n\,(n-1)\, Ae^{n-2}\dot{e}^2 + r\,(r-1)\, Be^{r-2}\dot{e}^2 + s\,(s-1)\, Ce^{s-2}\dot{e}^2 \text{ \&c.}$$

ideoque

$$x = e \pm \frac{\dot{e}}{\dot{e}}\, y + \frac{\ddot{e}}{2\dot{e}^2}\, y^2 \mp \frac{\dddot{e}}{2\,.\,3\dot{e}^3}\, y^3 \text{ \&c.}$$

Eodem modo invenies

$$e = x \mp \frac{\dot{x}}{\dot{x}}\, y + \frac{\ddot{x}}{2\dot{x}^2}\, y^2 \pm \frac{\dddot{x}}{2\,.\,3\dot{x}^3}\, y^3 + \text{\&c.}$$

nam

$$e = Ae^n + Be^r + Ce^s = A(x \pm y)^n + B\,(x \pm y)^r + C\,(x \pm y)^s \text{ \&c.}$$

$$= x \pm \frac{\dot{x}}{\dot{x}}\, y + \frac{\ddot{x}}{2\dot{x}^2}\, y^2 \pm \text{\&c.}$$

Area KLMP æqualis eſt fluenti ipſius $x\dot{y}$, vel $e\dot{y}$. Sed

$$e\dot{y} = x\dot{y} \pm \frac{\dot{x}}{\dot{x}}\, y\dot{y} + \frac{\ddot{x}}{2\dot{x}^2}\, y^2\dot{y} \pm \frac{\dddot{x}}{2\,.\,3\dot{x}^3}\, y^3\dot{y} \text{ \&c.}$$

&

$$x\dot{y} = e\dot{y} \mp \frac{\dot{e}}{\dot{e}}\, y\dot{y} + \frac{\ddot{e}}{2\dot{e}^2}\, y^2\dot{y} \mp \frac{\dddot{e}}{2\,.\,3\dot{e}^3}\, y^3\dot{y} \text{ \&c.}$$

Per conſequens, ſumendo fluentes,

$$\text{KLMP} = ey \mp \frac{\dot{e}}{2\dot{e}}\, y^2 + \frac{\ddot{e}}{2\,.\,3\dot{e}^2}\, y^3 \mp \frac{\dddot{e}}{2.3.4\dot{e}^3}\, y^4 \text{ \&c.}$$

vel

vel

$$KLMP = zy + \frac{\dot{z}}{2\dot{x}} y^2 + \frac{\ddot{z}}{2\,.\,3\dot{x}^2} y^3 \pm \frac{\dddot{z}}{2.3.4\dot{x}^3} y^4 \text{ \&c.}$$

Hoc ultimum Theorema illud eſt, quod Doctiſſimus Dominus *Bernoulli* in lucem dedit in Actis Lipſienſibus Anni MDCXCIV; ſed jam tempus eſt longæ huic epiſtolæ finem imponendi, &c.

ME-

METHODUS DETERMINANDI

numerum radicum impossibilium in aequationibus affectis.

Auctore GEORGIO CAMPBELL.

LEMMA I.

IN omni affecta aequatione quadratica, $ax^2 - Bx + A = 0$, cujus radices sunt reales, quarta pars quadrati coefficientis secundi termini major est rectangulo ex coefficiente primi termini & numero absoluto. Id-est $\frac{1}{4}B^2$ majus est quam $a.A$; & vice versa si sit $\frac{1}{4}B^2$ majus quam $a.A$, radices aequationis erunt reales; sed si sit $\frac{1}{4}B^2$ minus quam $a.A$, radices erunt impossibiles; sunt enim radices aequationis

$$\frac{\frac{1}{2}B + \sqrt{(\frac{1}{4}B^2 - a.A)}}{a} \ \& \ \frac{\frac{1}{2}B - \sqrt{(\frac{1}{4}B^2 - a.A)}}{a}.$$

LEMMA II.

Quicunque sit numerus radicum impossibilium in aequatione

$$x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + \&c. \pm dx^3 \mp cx^2 \pm bx \mp A = 0,$$

tot exacte erunt radices impossibiles in aequatione

$$Ax^n - bx^{n-1} + cx^{n-2} - dx^{n-3} + \&c. \pm Dx^3 \mp Cx^2 \pm Bx \mp 1 = 0.$$

Radices enim posterioris aequationis reciprocae sunt radicum prioris, ut patet ex vulgari Algebra. Sint radices aequationis quadrato-quadraticae

$$x^4 - Bx^3 + Cx^2 - Dx + A = 0,$$

a, b, c, d, e quibus sint c, & d impossibiles, radices aequationis

$$Ax^4 - Dx^3 + Cx^2 - Bx + 1 = 0$$

erunt $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$; ideoque harum duæ $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$, etiam impossibiles.

LEMMA III.

In omni æquatione, ut

$$x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + Ex^{n-4} \text{ \&c.}$$
$$\pm ex^4 \mp dx^3 \pm cx^2 \mp bx \pm A = 0;$$

cujus omnes radices sunt reales, si unusquisque terminus multiplicetur per indicem ipsius x, productumque dividatur per x; æquatio, quæ inde orietur,

$$nx^{n-1} - (n-1)Bx^{n-2} + (n-2)Cx^{n-3} - (n-3)Dx^{n-4} + (n-4)$$
$$Ex^{n-5} \text{ \&c.} \pm 4ex^3 \mp 3dx^2 \pm 2cx \mp b = 0,$$

habebit etiam omnes radices suas reales. Sic si omnes radices æquationis

$$x^4 - Bx^3 + Cx^2 - Dx + A = 0.$$

sint reales, erunt etiam reales radices æquationis

$$4x^3 - 3Bx^2 + 2Cx - D = 0.$$

Lemma hoc conversionem non patitur, innumeri enim dantur casus ubi radices æquationis

$$nx^{n-1} - (n-1)Bx^{n-2} + (n-2)Cx^{n-3} - (n-3)Dx^{n-4} + \text{\&c.}$$
$$\pm 3dx^2 \mp 2cx \pm b = 0$$

sunt reales, cum tamen æquatio

$$x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + \text{\&c.} \pm dx^3 \mp cx^2 \pm bx \mp A = 0$$

habeat vel aliquas, vel quandoque omnes radices impossibiles. Sed quicunque sit numerus radicum impossibilium in æquatione

$$nx^{n-1} - (n-1)Bx^{n-2} + (n-2)Cx^{n-3} - \text{\&c.} \pm 2cx \mp b = 0,$$

tot

tot ad minimum erunt radices impossibiles in æquatione

$$x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - \&c. \pm bx \mp A = o.$$

Sic omnes radices æquationis

$$4x^3 - 3Bx^2 + 2Cx - D = o$$

possunt esse reales, & tamen duæ vel forte omnes radices æquationis

$$x^4 - Bx^3 + Cx^2 - Dx + A = o$$

erunt impossibiles; sed si duæ radices æquationis

$$4x^3 - 3Bx^2 + 2Cx - D = o$$

sint impossibiles, duæ etiam ad minimum erunt impossibiles in æquatione

$$x^4 - Bx^3 + Cx^2 - Dx + A = o.$$

Hæc omnia fuere demonstrata ab algebraicis scriptoribus, speciatim a Domino *Reyneau* in suo Gallico Tractatu cui Titulus est *L'Analyse Demontrée*, & facile apparent per Methodum *de Maximis & Minimis.*

COROLLARIUM.

Sint omnes radices æquationis

$$x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + Ex^{n-4} - Fx^{n-5} + \&c.$$

$$\pm fx^5 \mp ex^4 + dx^3 \mp cx^2 \pm bx \mp A = o$$

reales, erunt etiam, per hoc Lemma, reales omnes radices æquationis

$$nx^{n-1} - (n-1)Bx^{n-2} + (n-2)Cx^{n-3} - (n-3)Dx^{n-4} + (n-4)$$

$$Ex^{n-5} - (n-5)Fx^{n-6} + \&c. \pm 5fx^4 \mp 4ex^3 \pm 3dx^2 \mp 2cx \pm b = o,$$

idcirco, per idem Lemma, reales erunt omnes radices æquationis

$$n(n-1)x^{n-2} - (n-1)(n-2)Bx^{n-3} + (n-2)(n-3)Cx^{n-4}$$

$$-(n-3)(n-4)Dx^{n-5} + (n-4)(n-5)Ex^{n-6} - (n-5)(n-6)Fx^{n-7}$$

$$+ \&c. \pm 20fx^3 \mp 12ex^2 \pm 6dx \mp 2c = o,$$

vel (dividendo per 2)

n 2 vel

$$x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + Ex^{n-4} - \&c. \pm A = 0.$$

sintque L & N coefficientes ipsi M adjacentes; sitque m exponens coefficientis M, (per exponens coefficientis intelligo numerum, qui denotat locum, quem coefficiens aliquod occupat inter alia, sic si M repræsentet coefficiens E ideoque L = D, & N = F, erit $m = 4$.) facile patebit, quod inter præcedentes æquationes ascendentes, illa cujus numerus absolutus est N hanc obtinebit formam

$$n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\&c.\left(\frac{n-m}{m+1}\right)x^{m+1} - (n-1)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right)\&c.\left(\frac{n-m}{m}\right)$$

$$Bx^m + (n-2)\left(\frac{n-2}{3}\right)\&c.\left(\frac{n-m}{m-1}\right)Cx^{m-1} - \&c. \pm (n-m+1)\left(\frac{n-m}{2}\right)$$

$$Lx^2 \mp (n-m).Mx \pm N = 0.$$

Cujus omnes radices erunt reales, si sint reales radices æquationis

$$x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - \&c. \pm A = 0.$$

Sit N = F, erit M = E, L = D, & $m = 4$.

Et æquatio, cujus numerus absolutus est F, erit

$$n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{5}\right)x^5 - (n-1)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right)\left(\frac{n-4}{4}\right)$$

$$Bx^4 + (n-2)\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-4}{3}\right)Cx^3 - (n-3)\left(\frac{n-4}{2}\right)Dx^2 + (n-4)Ex - F = 0.$$

PROPOSITIO I.

Sit

$$x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + Ex^{n-4} - \&c. \pm ex^4 \mp dx^3 \pm cx^2 \mp bx \pm A = 0$$

æquatio cujuscunque dimensionis, cujus omnes radices sint reales; sit M aliquis coefficiens hujus æquationis; L & N coefficientes adjacientes; m exponens ipsius M. Erit quadratum coefficientis M ductum in fractionem $\frac{m\,(n-m)}{(m+1)\,(n-m+1)}$ semper majus L . N, rectangulo ex coefficientibus adjacentibus; sic in æquatione

$$x^4 - Bx^3 + Cx^2 - Dx + E = 0,$$

 ubi

ubi $n = 4$, faciendo $M = C$, ideoque $L = B$, $N = D$, & $m = 2$, erit $\frac{2\ (4 - 2)}{(2 + 1)\ (4 - 2 + 1)}$ C^2, vel $\frac{4}{9}$ C^2 majus quam $B . D$, dummodo omnes radices æquationis sint reales.

Quia (per Lem. III.) radices æquationis quadraticæ

$$n\ (\frac{n - 1}{2})\ x^2 - (n - 1)\ Bx + C = 0$$

sunt reales, erit (per Lem. I.) $\frac{1}{4}\ (n - 1)^2 . B^2$ majus quam $n\ (\frac{n - 1}{2})\ C$, & dividendo utrumque per $\frac{n\ (n - 1)}{2}$, erit $(\frac{n - 1}{2n})\ B^2$ majus quam $1 . C$; ideoque in æquatione

$$x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + \&c. \pm A = 0,$$

dimensionum n, & cujus omnes radices sunt reales, quadratum ipsius B coefficientis secundi termini, ductum in fractionem $\frac{n - 1}{2n}$ majus est quam $1 . C$ rectangulum ex coefficientibus adjacentibus. Sed (per Lem. II.) omnes radices æquationis

$$Ax^n - bx^{n-1} + cx^{n-2} - \&c. \pm Cx^2 \mp Bx \pm 1 = 0,$$

vel, dividendo per A, radices æquationis

$$x^n - \frac{b}{A}x^{n-1} + \frac{c}{A}x^{n-2} - \&c. \pm \frac{C}{A}\ x^2 \mp \frac{B}{A}\ x \pm \frac{1}{A} = 0,$$

sunt reales, ideoque (ex iis quæ modo diximus) $(\frac{n - 1}{2n})\ \frac{b^2}{A^2}$ majus esse debet quam $1 . \frac{c}{A}$, & per consequens $(\frac{n - 1}{2})\ b^2$ majus est quam $c . A$; idcirco in æquatione

$$x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - \&c. \pm cx^2 - bx + A = 0,$$

dimensionum n, & cujus omnes radices sunt reales, quadratum coefficientis x ductum in fractionem $\frac{n - 1}{2}$, majus est rectangulo ex coefficiente termini x^2, & numero absoluto; sed, (per Cor. Lem. III.) omnes radices æquationis

n

$$n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right) \text{\&c.} \left(\frac{n-m}{m+1}\right) x^{m+1} - (n-1)\left(\frac{n-2}{2}\right) \text{\&c.} \left(\frac{n-m}{m}\right)$$

$$Bx^{m} + (n-2)\left(\frac{n-3}{2}\right) \text{\&c.} \left(\frac{n-m}{m-1}\right) Cx^{m-1} \text{ \&c.} \pm (n-m+1)\left(\frac{n-m}{2}\right)$$

$$Lx^{2} \mp (n-m)\, Mx \pm N = 0,$$

ſunt reales; ideoque, cum hæc æquatio ſit dimenſionum $(m+1)$, quadratum $(n-m)$ M ductum in fractionem $\frac{(m+1)-1}{2(m+1)}$ majus erit quam rectangulum ex $(n-m+1)\left(\frac{n-m}{2}\right)$ L & N; id eſt $\frac{m}{2(m+1)}(n-m)^{2}M^{2}$ majus erit quam $(n-m+1)\left(\frac{n-m}{2}\right)$ L.N. ideoque dividendo utrumque per $(n-m+1)\left(\frac{n-m}{2}\right)$, erit $\frac{m(n-m)}{(m+1)(n-m+1)}$. M^{2} majus L.N. Q. E. D.

COROLLARIUM.

Fiat ſeries fractionum $\frac{n}{1}$, $\frac{n-1}{2}$, $\frac{n-2}{3}$, $\frac{n-3}{4}$ &c. uſque ad $\frac{1}{n}$, quarum denominatores ſint numeri in progreſſione arithmetica, 1,2,3,4, &c, uſque ad numerum n, qui indicat dimenſiones æquationis

$$x^{n} - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - \text{\&c.} \pm A = 0;$$

numeratores ſint in eadem progreſſione ſed inverſa; dividatur ſecunda harum fractionum per primam, tertia per ſecundam, & ſic deinceps, & ponantur fractiones, quæ ex hiſce diviſionibus oriuntur, ſupra medios terminos æquationis, hoc modo.

$$\frac{n-1}{2n},\ \frac{2(n-2)}{3(n-1)},\ \frac{3(n-3)}{4(n-2)},\ \frac{4(n-4)}{5(n-3)} \text{ \&c.}$$

$$x^{n} - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + Ex^{n-4} - \text{\&c.} \pm A = 0.$$

Tunc ſi omnes radices æquationis ſunt reales, quadratum cujusvis coefficientis, ductum in fractionem, quæ ſupereminet, majus erit rectangulo ex coefficientibus adjacentibus. Hoc corollarium converti non poteſt, innumeræ enim dantur æquationes, in quibus quadratum coefficientis cujuſcunque, ductum in fractionem ſupereminentem majus eſſe poteſt producto ex coefficientibus adjacentibus, & tamen aliquæ vel forte omnes radices poſſunt eſſe imagina-

nariæ. Idcirco, ubi quadratum coefficientis ductum in fractionem supereminentem majus est producto ex coefficientibus adjacentibus, nihil inde potest concludi, quoad possibilitatem radicum æquationis; sed ubi tale quadratum ita multiplicatum, minus est ejusmodi producto, id certum est indicium duas dari radices impossibiles.

Ex dictis, immediate deducitur demonstratio regulæ, quam dedit illustrissimus NEWTONUS, qua determinatur numerus radicum impossibilium, in quavis data æquatione.

SCHOLIUM.

Æquationis

$$x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + Ex^{n-4} - Fx^{n-5} + \&c. \pm A = o$$

radices designentur litteris a, b, c, d, e, f, g, &c. erit (ut notum est) B summa omnium radicum

$$= a + b + c + d + e + f + g \ \&c.$$

C summa productorum ex binis radicibus

$$= ab + ac + ad + ae + af + ag + \&c.$$

D summa productorum ex ternis radicibus

$$= abc + abe + abf + abg + \&c.$$

$$E = abcd + abcf + abcg + \&c.$$

$$F = abcde + abcdf + abcdg + bcdef + \&c,$$

& ita deinceps. Representet, ut in Propositione, M aliquod ex coefficientibus, L & N coefficientes adjacentes; sit m exponens ipsius M; sit Z summa quadratorum omnium differentiarum, quæ dari possunt inter terminos coefficientis M; sit α summa ex omnibus dictis quadratis quorum termini differunt una littera, β summa illorum quadratorum, quorum termini duabus differunt litteris; γ summa illorum, quorum termini tribus differunt litteris; δ summa illorum, quorum termini quatuor differunt litteris, & de ceteris. Si M sit æquale

$$F = abcde + abcdf + abcdg + \&c.$$

erit

$$Z = (abcde - abcdf)^2 + (abcde - abcdg)^2 + (abcde - abefg)^2$$
$$+ (bcdef - abfgh)^2 + \&c.$$

$\alpha =$

$$\alpha = (abcde - abcdf)^2 + (abcde - abcdg)^2 + (abcde - abcdh)^2 + (bcdef - bcdeg)^2 + \&c.$$

$$\beta = (abcde - abcfg)^2 + (abcde - abcfh)^2 + (bcdef - bcdgh)^2 + \&c.$$

$$\gamma = (abcde - abfgh)^2 + (abcdf - abegh)^2 + \&c.$$

$$\delta = (abcde - afghk)^2 + (acdfg - abehk)^2 + \&c.$$

Hisce positis, dico, quod quadratum cujusvis coefficientis, ut M, ductum in fractionem $\frac{m(n-m)}{(m+1)(n-m+1)}$ excedit rectangulum ex coefficientibus adjacentibus L.N, quantitate

$$\frac{(n+1)\,Z}{(m+1)(n-m+1)} - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{3}\beta - \frac{1}{4}\gamma - \frac{1}{5}\delta - \&c.$$

Series $-\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{3}\beta - \frac{1}{4}\gamma - \frac{1}{5}\delta$ &c. tot debet habere terminos, quot dantur unitates in m.

Sit æquatio

$$x^5 - Bx^4 + Cx^3 - Dx^2 + Ex - F = 0,$$

cujus radices sint a, b, c, d, e; in quo casu $n = 5$. Sit $M = B = a+b+c+d+e$; erit $L = 1$, $N = C$, $m = 1$.

$$Z = (a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (a-e)^2 + (b-c)^2 + \&c. = \alpha.$$

Idcirco $\frac{1\,(5-1)}{(1+1)(5-1+1)}$. B^2 vel $\frac{2}{5}B^2$ excedet $1 . C$ quantitate $\frac{(5+1)\,Z}{(1+1)(5-1+1)} - \frac{1}{2}\alpha = \frac{3}{5}Z - \frac{1}{2}\alpha =$ (quia $Z = \alpha$) $\frac{1}{10}Z = \frac{1}{10}(a-b)^2 + \frac{1}{10}(a-c)^2 + \frac{1}{10}(a-d)^2 +$ &c. qui semper est numerus positivus, cum radices a, b, c, d, e sunt reales, sive sint positivæ, sive negativæ.

Si $M = C = ab + ac + ad + ae + bc +$ &c,

erit $L = B$, $N = D$, $m = 2$,

$$Z = (ab-ac)^2 + (ab-ad)^2 + (ab-cd)^2 + (ab-de)^2 + \&c.$$

$$\alpha = (ab-ac)^2 + (ab-ad)^2 + (ab-ae)^2 + \&c.$$

$\beta =$

nariæ. Idcirco, ubi quadratum coefficientis ductum in fractionem supereminentem majus est producto ex coefficientibus adjacentibus, nihil inde potest concludi, quoad possibilitatem radicum æquationis; sed ubi tale quadratum ita multiplicatum, minus est ejusmodi producto, id certum est indicium duas dari radices impossibiles.

Ex dictis, immediate deducitur demonstratio regulæ, quam dedit illustrissimus NEWTONUS, qua determinatur numerus radicum impossibilium, in quavis data æquatione.

SCHOLIUM.

Æquationis

$$x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + Ex^{n-4} - Fx^{n-5} + \&c. \pm A = 0$$

radices designentur litteris a, b, c, d, e, f, g, &c. erit (ut notum est) B summa omnium radicum

$$= a + b + c + d + e + f + g \ \&c.$$

C summa productorum ex binis radicibus

$$= ab + ac + ad + ae + af + ag + \&c.$$

D summa productorum ex ternis radicibus

$$= abc + abe + abf + abg + \&c.$$

$$E = abcd + abcf + abcg + \&c.$$

$$F = abcde + abcdf + abcdg + bcdef + \&c,$$

& ita deinceps. Repræsentet, ut in Propositione, M aliquod ex coefficientibus, L & N coefficientes adjacentes; sit m exponens ipsius M; sit Z summa quadratorum omnium differentiarum, quæ dari possunt inter terminos coefficientis M; sit α summa ex omnibus dictis quadratis quorum termini differunt una littera, β summa illorum quadratorum, quorum termini duabus differunt litteris; γ summa illorum, quorum termini tribus differunt litteris; δ summa illorum, quorum termini quatuor differunt litteris, & de ceteris. Si M sit æquale

$$F = abcde + abcdf + abcdg + \&c.$$

erit

$$Z = (abcde - abcdf)^2 + (abcde - abcdg)^2 + (abcde - abcfg)^2$$
$$+ (bcdef - abfgh)^2 + \&c.$$

$\alpha =$

$$\alpha = (abcde - abcdf)^2 + (abcde - abcdg)^2 + (abcde - abcdh)^2 + (bcdef - bcdeg)^2 + \&c.$$

$$\beta = (abcde - abcfg)^2 + (abcde - abcfh)^2 + (bcdef - bcdgh)^2 + \&c.$$

$$\gamma = (abcde - abfgh)^2 + (abcdf - abegh)^2 + \&c.$$

$$\delta = (abcde - afghk)^2 + (acdfg - abehk)^2 + \&c.$$

Hisce positis, dico, quod quadratum cujusvis coefficientis, ut M, ductum in fractionem $\frac{m(n-m)}{(m+1)(n-m+1)}$ excedit rectangulum ex coefficientibus adjacentibus L.N, quantitate

$$\frac{(n+1)\,Z}{(m+1)\,(n-m+1)} - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{3}\beta - \frac{1}{4}\gamma - \frac{1}{5}\delta - \&c.$$

Series $-\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{3}\beta - \frac{1}{4}\gamma - \frac{1}{5}\delta$ &c. tot debet habere terminos, quot dantur unitates in m.

Sit æquatio

$$x^5 - Bx^4 + Cx^3 - Dx^2 + Ex - F = 0,$$

cujus radices sint a, b, c, d, e; in quo casu $n = 5$. Sit $M = B = a+b+c+d+e$; erit $L = 1$, $N = C$, $m = 1$.

$$Z = (a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (a-e)^2 + (b-c)^2 + \&c. = \alpha.$$

Idcirco $\frac{1\,(5-1)}{(1+1)\,(5-1+1)}\,.\,B^2$ vel $\frac{2}{5}B^2$ excedet $1\,.\,C$ quantitate $\frac{(5+1)\,Z}{(1+1)\,(5-1+1)} - \frac{1}{2}\alpha = \frac{3}{5}Z - \frac{1}{2}\alpha =$ (quia $Z = \alpha$) $\frac{1}{10}Z = \frac{1}{10}(a-b)^2 + \frac{1}{10}(a-c)^2 + \frac{1}{10}(a-d)^2 +$ &c. qui semper est numerus positivus, cum radices a, b, c, d, e sunt reales, sive sint positivæ, sive negativæ.

Si $M = C = ab + ac + ad + ae + bc +$ &c,

erit $L = B$, $N = D$, $m = 2$,

$$Z = (ab-ac)^2 + (ab-ad)^2 + (ab-cd)^2 + (ab-de)^2 + \&c.$$

$$\alpha = (ab-ac)^2 + (ab-ad)^2 + (ab-ae)^2 + \&c.$$

 $\beta =$

$$\beta = (ab-cd)^2 + (ab-ce)^2 + (ab-de)^2 + \&c.$$

ideo $\frac{2\,(5-2)}{(2+1)\,(5-2+1)}$. C^2 vel $\frac{1}{2}$ C^2 excedet B.D quantitate $\frac{(5+1)\,Z}{(2+1)\,(5-2+1)} - \frac{1}{2}\,\alpha - \frac{1}{3}\,\beta =$ (quia $Z = \alpha + \beta$).

$$\frac{1}{6}\,\beta = \frac{1}{6}\,(ab-cd)^2 + \frac{1}{6}\,(ab-ce)^2 + \frac{1}{6}\,(ab-de)^2 + \&c.$$

qui semper est numerus positivus, cum radices a, b, c, d, e, sunt reales, sive sint positivæ, sive negativæ.

Sit $M = D = abc + abd + abe + acd + ace + \&c.$

erit $L = C$, $N = E$, $m = 3$.

$$Z = (abc-abd)^2 + (abc-abe)^2 + (abc-ade)^2 + \&c.$$

$$\alpha = (abc-abd)^2 + (abc-abe)^2 + (abc-acd)^2 + \&c.$$

$$\beta = (abc-ade)^2 + (abc-cde)^2 + (abc-bde)^2 + \&c.$$

$\gamma = o$. Ideo $\frac{3\,(5-3)}{(3+1)\,(5-3+1)}$ D^2, vel $\frac{1}{2}$ D^2 excedet C. quantitate $\frac{(5+1)\,Z}{(3+1)\,(5-3+1)} - \frac{1}{2}\,\alpha - \frac{1}{3}\,\beta =$ (quia $Z = \alpha + \beta$) $\frac{1}{6}\,\beta = \frac{1}{6}\,(abc-ade)^2 + \frac{1}{6}\,.\,(abc-bde)^2 + \&c$, qui semper est numerus positivus, ubi radices sunt reales.

Sit $M = E = abcd + abce + abde + bcde + \&c.$

erit $L = D$, $N = A$, $m = 4$,

$Z = (abcd-abce)^2 + (abcd-abde)^2 + (abcd-bcde)^2 + \&c. = \alpha$; $\beta = o = \gamma = \delta$. Ideo $\frac{4\,(5-4)}{(4+1)\,(5-4+1)}$ E^2, vel $\frac{2}{5}$ E^2 excedet D.A quantitate $\frac{(5+1)\,Z}{(4+1)\,(5-4+1)} - \frac{1}{2}\,\alpha = \frac{3}{5}\,Z - \frac{1}{2}\,\alpha, = \frac{1}{10}\,Z = \frac{1}{10}$. $(abcd-abce)^2 + \frac{1}{10}\,(abcd-bcde)^2 + \&c$. qui numerus est semper positivus, si radices sint numeri reales.

PRO-

PROPOSITIO II.

Sit

$$x^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} - Dx^{n-3} + Ex^{n-4} - \&c. \pm A = 0$$

æquatio cujuscunque dimensionis, cujus radices cum ipsarum signis exprimantur litteris $a, b, c, d, e, f,$ &c. Sit M coefficiens quicunque hujus æquationis, sint L & N coefficientes adjacentes ipsi M; K, O, coefficientes adjacentes ipsis L & N; I, P adjacentes ipsis K, & O; H, Q, ipsis I & P, & sic deinceps. Sit m exponens coefficientis M; & Z, ut in Scholio, = summæ omnium quadratorum, quæ fieri possunt ex differentiis terminorum ipsius M. Quadratum cujuscunque coefficientis, ut M, ductum in hanc fractionem $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\&c.)\left(\frac{n-m-1}{m}\right)}\right)$ excedit $L.N - K.O + I.P - H.Q + \&c.$ quantitate

$$\frac{\frac{1}{2}Z}{n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\&c\left(\frac{n-m-1}{m}\right)},$$

quæ quantitas semper est numerus positivus, cum radices $a, b, c, d,$ &c. sunt reales, sive positivæ, sive negativæ.

Sit æquatio septem dimensionum, ut

$$x^7 - Bx^6 + Cx^5 - Dx^4 + Ex^3 - Fx^2 + Gx - A = 0.$$

cujus radices sint $a, b, c, d, e, f, g.$ in hoc casu $n = 7.$ Sit

$$M = E = abcd + abce + abcf + abcg + bcde + \&c.$$

erit $m = 4,$ $L = -D,$ $N = -F,$ $K = C,$ $O = G,$ $I = -B,$ $P = -A;$

$$Z = (abcd - abce)^2 + (abcd - abcf)^2 + (abcd - abcg)^2 + \&c.$$

Idcirco $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{7 \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{4}}\right) E^2$ vel $\frac{17}{35} E^2$ excedet $D.F - C.G + B.A$, quantitate $\frac{\frac{1}{2}Z}{7 \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{4}}$ vel $\frac{Z}{70} = \frac{1}{70}(abcd - abce)^2 + \frac{1}{70}(abcd - abcf)^2 + \&c.$

Ex hac propositione deducitur sequens regula determinandi numerum radicum impossibilium in data æquatione.

E binomio elevato ad potentiam, cujus index exprimit dimensiones æquationis propositæ, sumantur unciæ terminorum mediorum, unitate depressæ; quævis uncia sic deminuta, dividatur per respondentem unciam duplicatam, & fractiones, quæ inde oriuntur, ponantur supra medios terminos correspondentes in data æquatione: & si quadratum cujusvis termini ductum in fractionem supereminentem majus sit quam rectangulum e terminis immediate adjacentibus, minus rectangulo ex proxime utrinque jacentibus, plus rectangulo ex utrinque sequentibus, minus &c, tunc signum + ponatur sub ipsum terminum, cujus quadratum fuit multiplicatum per fractionem supereminentem; sin minus, ponatur signum negativum, atque sub primum & ultimum terminum ponatur signum +. Tot ad minimum erunt radices impossibiles, quot dantur mutationes in serie signorum a signo + ad signum —, vel a —, ad +.

Ex. gr. determinandæ sint radices impossibiles in æquatione hac,

$$x^7 - 5x^6 + 15x^5 - 23x^4 + 18x^3 + 10x^2 - 28x + 24 = 0.$$

Unciæ terminorum intermediorum in septima potentia cujusvis binomii sunt 7, 21, 35, 35, 21, 7. ex quibus subtrahendo unitatem, & dividendo reliquum per ipsam unciam duplicatam, quotientis erunt

$$\frac{6}{14},\ \frac{20}{42},\ \frac{34}{70},\ \frac{34}{70},\ \frac{20}{42},\ \frac{6}{14}.\ \text{vel}\ \frac{3}{7},\ \frac{10}{21},\ \frac{17}{35},\ \frac{17}{35},\ \frac{10}{21},\ \frac{3}{7};$$

quæ fractiones ponendæ sunt supra medios terminos datæ æquationis hoc modo.

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} & & \frac{3}{7} & & \frac{10}{21} & & \frac{17}{35} & & \frac{17}{35} & & \frac{10}{21} & & \frac{3}{7} & & & \\ x^7 & - & 5x^6 & + & 15x^5 & - & 23x^4 & + & 18x^3 & + & 10x^2 & - & 28x & + & 24 & = 0. \\ + & & - & & + & & - & & + & & - & & + & & + & \end{array}$$

Deinde, quia quadratum ipsius $5x^6$ ductum in fractionem supereminentem $\frac{3}{7}$, ideſt $\frac{75}{7}x^{12}$ minus eſt quam $x^7 . 15x^5$, ideſt quam $15x^{12}$, pono signum — sub terminum $5x^6$. Porro, quia quadratum ipsius $15x^5$ ductum in fractionem superiminentem $\frac{10}{21}$, id eſt $\frac{750}{7}x^{10}$ majus eſt quam $(-5x^6 . -23x^4) - (x^7 . 18x^3) = 97x^{10}$, pono signum + sub terminum $15x^5$. Video etiam quod $\frac{8993}{35}x^8$ (quadratum termini $23x^4$ ductum in fractionem $\frac{17}{35}$) minus eſt, quam $(15x^5 . 18x^3) - (5x^6 . 10x^2) + (x^7 . -28x)$

=

$= 292x^8$, pono ſignum — ſub terminum $23x^4$. Deinde quia $(18x^3)^2 . \frac{17}{35}$, id eſt $\frac{5508}{35}x^6$, majus quam $(-23x^4 . 10x^2)(-15x^5 . -28x) - (5x^6 . 24) = 70x^6$, pono ſignum + ſub terminum $18x^3$. Porro, cum $(10x^2)^2 . \frac{10}{21}$, vel $\frac{1000}{21}x^4$, minus ſit quam

$$(18x^3 . -28x) - (23x^4 . 24) = 48x^4,$$

pono ſignum —, ſub terminum $10x^2$. Tandem, quia $(28x)^2 . \frac{3}{7}$, vel $336x^2$, majus eſt quam $10x^2 . 24 = 240x^2$, pono ſub $28x$ ſignum +; &, ut dixi, ſub primum atque ultimum terminum ſcribo +. Cum autem ſint ſex mutationes in ſignis, video ſex dari radices impoſſibiles.

Si radices impoſſibiles fuiſſent inveniendæ per regulam NEWTONIANAM, ſic fuiſſet operandum.

$$\begin{array}{cccccccc} & \frac{3}{7} & \frac{5}{9} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{5}{9} & \frac{3}{7} & \\ x^7 & -5x^6 & +15x^5 & -23x^4 & +18x^3 & +10x^2 & -28x & +24 = 0. \\ + & - & + & + & + & + & + & + \end{array}$$

per quam regulam duæ tantum radices impoſſibiles inveniuntur, cum dentur ſex, ſcilicet $1+\sqrt{-3}$, $1-\sqrt{-3}$, $1+\sqrt{-2}$, $1-\sqrt{-2}$, $1+\sqrt{-1}$, $1-\sqrt{-1}$, ſeptima radix eſt -1.

DEMONSTRATIO

Theorematis de Potentiis radicum &c.

AUCTORE GEORGIO FRIDER. BAERMANNO

L. A. M. & Math. Prof. Vitembergæ.

IN excellenti Opere Isaaci Newtoni, quod *Arithmetica Universalis* inscriptum est, extat inter bene multa eximia inventa, quibus incomparabilis ille mathematicus Algebræ fines prorogavit, perelegans quoddam theorema, quo ille in loco de limitibus radicum æquationum usus est. Legitur id hisce verbis enuntiatum. „ Ponamus cognitas quantitates terminorum æquationis sub signis mutatis esse p, q, r, s, t, v, &c. eam nempe secundi p, tertii q, quarti r, quinti s, & sic deinceps; & signis terminorum probe observatis, fiat $p = a$, $pa + 2q = b$, $pb + qa + 3r = c$, $pc + qb + ra + 4s = d$, $pd + qc + rb + sa + 5t = e$, $pe + qd + rc + sb + ta + 6v = f$, & sic in infinitum, observata serie progressionis. Et erit a summa radicum, b summa quadratorum ex singulis radicibus, c summa cuborum, d summa quadrato-quadratorum, e summa quadrato-cuborum, f summa cubo-cuborum, & sic in reliquis." Cujus regulæ cum aliquoties magnum usum, non solum in theoria de limitibus æquationum, sed & in aliis quæstionibus tractandis, expertus essem; non contentus ejus per inductionem probatione, perfectam demonstrationem habere exoptabam. Sed ut ipse hujus theorematis inventor id sine omni demonstratione vel analysi exposuit; ita nec ab aliis mathematicis, quorum scripta evolvere mihi licuit, ejus aliquam demonstrationem traditam reperi. Ego vero demonstrationem hujus regulæ aliquoties pertentans, quoniam ex theoria formationis potestatum eam ducendam esse falso persuasus eram, semper in inductionem valde incompletam, & jam in casu quintarum potestatum nimis intricatam, rejectus, scopum meum haud eram assecutus. Nuper autem cum Joannis Bernoullii Opera evolvens, forte incidissem in locum, in quo illustris ille Geometra se *Newtoniani* istius theorematis, quod elegantissimum appellat, demonstrationem invenisse dicit, (*) eamque iisdem operibus frustra quæsivissem: incitabatur animus, ut rem denuo aggrederer; & aliam nunc viam ingressus ad veram ejus regulæ demonstrationem perve-

(*) Vide Operum Tom. IV. p. 22.

veniſſe mihi videor. Quam ergo inveni laudati theorematis demonſtrationem, eam nunc, hac ſcriptione analytice exponere conſtitui.

§. I. Sint ſeries ſequentes.

I.	II.	III.	IV.	V.
a	o	o	o	o
b	ab	o	o	o
c	ac, bc	abc	o	o
d	$ad, bd, cd,$	abd, acd, bcd	$abcd$	o
e	ae, be, ce, de	$abe, ace, bce; ade, bde, cde$	$abce, abde, acde, bcde$	$abcde$
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

Termini ſeriei primitivæ a, b, c &c. ſunt quælibet quantitates ſub ſignis ſuis + vel —. In qualibet autem ſecundarum ſerierum terminus ordinis n (initio numerandi facto a cyphris) formatus eſt ex $n-1$ terminis ſeriei proximæ præcedentis, multiplicando ſingulos per terminum n^{tum} in ſerie I. Commata, quibus uniuſcujuſque termini partes diſtinctæ ſunt, ſigna + vel — denotant, quæ iis partibus ex lege multiplicationis conveniunt.

§. II. Sit ſumma n terminorum ſub ſignis ſuis in ſerie I. $= \alpha$, ſumma n terminorum ſub ſignis ſuis in ſerie II. $= \beta$, ſumma n terminorum in ſerie III. $= \gamma$, in ſerie IV. $= \delta$, in ſerie V. $= \epsilon$, & ſic deinceps. Evidens ergo eſt fore.

$\beta =$ ſummæ productorum ex ſingulis binis inter n terminos ſeriei I.

$\gamma =$ ſummæ productorum ex ſingulis ternis n terminos ejuſdem ſeriei

$\delta =$ ſummæ productorum ex ſingulis quaternis

$\epsilon =$ ſummæ productorum ex ſingulis quinis &c. &c.

§. III. Quoniam, ſi numerus terminorum n in ſerie I. unitate creſcere ponitur, terminus ordinis $n+1$ fit incrementum ſummæ α, vocabimus terminum $d\alpha$. Si e. gr. $n=4$, eſt $d\alpha = e$, ſin $n=3$, eſt $d\alpha = d$. Similiter, quia, ſi n tranſit in $n+1$, β creſcit termino $(n+1)^{to}$ ſeriei II: appellabimus hunc terminum $d\beta$. Sic, ſi iterum fuerit $n=4$, erit $d\beta = ae$, be, ce, de. Eadem ratione terminus ordinis $n+1$ in ſerie III dicatur $= d\gamma$; terminus ordinis $n+1$ in ſerie IV $= d\delta$; in ſerie V $= d\epsilon$, & ſic porro. Ex his & lege formandarum illarum ſerierum (§. 1.) apparet, eſſe

$$\begin{aligned} d\beta &= \alpha d\alpha \\ d\gamma &= \beta d\alpha \\ d\delta &= \gamma d\alpha \\ d\epsilon &= \delta d\alpha \\ &\text{\&c.} \quad \text{\&c.} \end{aligned}$$

Et

Et generaliter: ſi in ſerie §. 2. α, β, γ &c. ſit quantitas v ordinis m, & terminus τ ordinis $m - 1$, fore $dv = \tau d\alpha$.

§. IV. Si porro ſumma n terminorum ſeriei I. $(= \alpha) = A$, ſumma quadratorum ex totidem terminis ſeriei I. $= B$, ſumma cuborum ex totidem terminis ſeriei I. ſub ſignis ſuis $= C$, ſumma biquadratorum $= D$, ſumma quintarum poteſtatum ſub ſignis ſuis $= E$, &c. Manifeſtum inde eſt, ſi iterum littera d incrementum deſignemus, quod ſumma poteſtatum ex n terminis ſeriei primae capit, dum n unitate creſcit, fore:

$$\begin{aligned} dA &= d\alpha \\ dB &= d\alpha^2 \\ dC &= d\alpha^3 \\ dD &= d\alpha^4 \\ dE &= d\alpha^5 \end{aligned}$$

Et generatim: Si V ſit ſumma poteſtatum gradus m ex ſingulis n terminis ſeriei primitivæ, fore $dV = d\alpha^m$. Nam e. gr. dC notat incrementum, quod accipit ſumma cuborum ex n terminis primitivæ ſeriei, dum n tranſit in $n + 1$. C ergo creſcit cubo termini ordinis $n + 1$ in eadem ſerie; qui terminus cum ſit $d\alpha$ (§. 3). neceſſe eſt ut ſic $dC = d\alpha^3$.

§. V. Ex his autem & iis, quæ §. 3. dicta ſunt, ſequitur eſſe.

$d\alpha dB$	$=$	dC	$d\beta dB$	$=$	αdC	$d\gamma dB$	$=$	βdC	&c.
$d\alpha dC$	$=$	dD	$d\beta dC$	$=$	αdD	$d\gamma dC$	$=$	βdD	&c.
$d\alpha dD$	$=$	dE	$d\beta dD$	$=$	αdE	$d\gamma dD$	$=$	βdE	&c.
&c.		&c.	&c.		&c.	&c.		&c.	

Et generaliter: Si π, ϱ ſint duo termini in ſerie §. 2. continui, atque T, V duo termini in ſerie § 4. ſe invicem, nullo interpoſito, excipientes, erit $d\varrho dT = \pi dV$. Etenim (§. 3) $d\varrho = \pi d\alpha$, & poſito $dT = d\alpha^{m-1}$, erit $dV = d\alpha^m$. Ergo $d\varrho dT = \pi d\alpha^m = \pi dV$.

§. VI. Jam primo, ut inveniam relationem inter A, B, α & β, intueor æquationem (§. 3.) $d\beta = \alpha d\alpha$, & diſpicio, quænam, per methodum incrementorum, addi debeant ſecundo membro, ut id quantitas incrementalis completa fiat. Deinde, his ad poſterius membrum additis, & iiſdem (vel totidem aliis, ſed illis ſigillatim æqualibus) quantitatibus priori membro adjectis, ut æqualitas utrinque conſervetur, redeo ad ſummas terminorum, quæ relationem quæſitam inter A, B, α & β oſtendent. Itaque cum quantitati $\alpha d\alpha$ addendæ ſint $\alpha d\alpha + d\alpha^2$, ut quantitas incrementalis completa habeatur (*); ſit autem $d\alpha^2 = dB$: ad æquationem $d\beta = \alpha d\alpha$

addo æquationem $d\beta + dB = \alpha d\alpha + d\alpha^2$; fit $2d\beta + dB = d. \alpha\alpha$.

Hinc

(*) Si hujus demonſtrationem deſideras, vide §. 12.

Hinc redeundo ad ſummas invenitur

$$2\beta + B = \alpha\alpha = A\alpha.$$

§. 7. Secundo inveſtigaturus relationem inter A, B, C, α, β, & γ, ſumo ſequentem æquationem §. 3. $d\gamma = \beta d\alpha$. Cujus poſteriori membro, ut id completa incrementalis fiat, addere oportet $\alpha d\beta + d\beta d\alpha$. Eſt autem $\alpha d\beta = A\alpha d\alpha$ (§. 3. 4.), & $d\beta d\alpha = \alpha d\alpha^2$ (§. 3.) $= \alpha dB$ (§. 4). Ergo ad æquationem $d\gamma = \beta d\alpha$

addita æquatione $A\alpha d\alpha + \alpha dB = \alpha d\beta + d\beta d\alpha$, fit

$$d\gamma + A\alpha d\alpha + \alpha dB = d.\ A\beta$$

Nunc ex §. 6. ſubſtituatur valor quantitatis $A\alpha$; & prodibit ſequens æquatio

$$\begin{aligned} d\gamma + 2\beta d\alpha &+ Bd\alpha = d.\ A\beta, \\ &+ \alpha dB \end{aligned}$$

quæ, cum ſit $\beta d\alpha = d\gamma$, huic æquipollet

$$\begin{aligned} 3d\gamma &+ Bd\alpha = d.\ A\beta. \\ &+ \alpha dB \end{aligned}$$

Denique, ut compleatur quantitas incrementalis in ſecundo termino obvia, addatur æquatio $d\alpha dB - dC = 0$ (§. 5); & habebimus

$$\begin{aligned} 3d\gamma &+ Bd\alpha - dC = d.\ A\beta. \\ &+ \alpha dB \\ &+ d\alpha dB \end{aligned}$$

Unde, capiendo ſummas ſingulorum terminorum, invenitur

$$3\gamma + B\alpha - C = A\beta.$$

§. 8. Similiter, ut definiatur relatio inter A, B, C, D, α, β, γ & δ, conſideremus æquationem §. 3. $d\delta = \gamma d\alpha$.

Hujus ſecundo membro, ut id ſummabile fiat, addi debent quantitates $\alpha d\gamma + d\gamma d\alpha$. Atqui eſt $\alpha d\gamma = A\beta d\alpha$ (§. 3. & 4), atque $d\gamma d\alpha = \beta d\alpha^2 = \beta dB$ (§. 4). Ergo, ad æqualia æqualibus adjectis, fit

$$d\delta + A\beta d\alpha + \beta dB = d.\ A\gamma.$$

Et in locum quantitatis $A\beta$ ſubſtituto ipſius valore ex æquatione ultima §. 7. fit.

 $d\delta$

$$d\delta + 3\gamma d\alpha + B\alpha d\alpha - C d\alpha + \beta dB = d.\ A\gamma;$$

seu, quia $3\gamma d\alpha = 3d\delta$, & $\alpha d\alpha = d\beta$ (§. 3),

$$4d\delta + Bd\beta - Cd\alpha = d.\ A\gamma.$$
$$+ \beta dB$$

Quare, addita æquatione $d\beta dB - \alpha dC - d\alpha dC + dD = 0$ (§. 5), habemus

$$4d\delta + Cd\beta - Cd\alpha + dD = d.\ A\gamma.$$
$$+ \beta dC - \alpha dC$$
$$+ d\beta dC - d\alpha dC$$

Ex qua æquatione, summas singulorum terminorum capiendo, elicitur hæc

$$4\delta + B\beta - C\alpha + D = A\gamma.$$

§. 9. Eadem via relationem inter A, B, C, D, E, α, β, γ, δ, & ϵ invenire, & continue ad altiora progressum facere licet. Sed ut, quæ ad perfectam *Newtoniani* theorematis demonstrationem adhuc requiri videntur, generatim & universe persequamur, sequens theorema ostendere lubet.

Sint in serie quantitatum A, B, C, &c. §. 4. expositarum tres quævis S, T, V, se invicem ordine excipientes, & postrema quidem V sit summa potestatum gradus $m + 1$ ex quotvis singulis terminis seriei primæ §. 1. præcedens autem T summa potestatum gradus m ex totidem terminis; sint porro σ, π, ϱ, σ, τ, υ in serie quantitatum α, β, γ, &c. §. 2. expositarum sese ordinatim excipientes, sic ut ultima quidem υ sit summa productorum ex singulis $(m + 1)^{enis}$ terminis seriei primæ §. 1. præcedens vero τ summa productorum ex singulis m^{nis} terminis ejusdem seriei, &c: Dico, si fuerit

$$m\tau + B\varrho - C\pi + D\sigma \ldots S\alpha \pm T = A\sigma$$

signis litterarum B, C, D, ... alternantibus, fore

$$(m + 1)\upsilon + B\sigma - C\varrho + D\pi \ldots T\alpha \mp V = A\tau.$$

Nam inter æquationes §. 3. sumta illa, quæ est ordinis m, scilicet $d\sigma = \tau d\alpha$, ut secundum ejus membrum quantitas incrementalis completa reddatur, addere illi oportet $\alpha d\tau + d\tau d\alpha$. Sed (§. 3.) $\alpha d\tau = A\sigma d\alpha$, & $d\tau d\alpha = \sigma d\alpha = \sigma dB$ (§. 4). Ergo generatim habemus

1) $d\upsilon + \sigma dB + A\sigma d\alpha = d.\ A\tau.$

Jam substituto hic pro $A\sigma$ ipsius valore, erit

2)

$$2)\ dv + \varepsilon dB + m\tau d\alpha + B_i d\alpha - C\pi d\alpha + D\sigma d\alpha \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots S\alpha d\alpha \pm T d\alpha = d.\ A\tau.$$

Atqui per æquationem initio sumtam est $m\tau d\alpha = m dv$, ideoque $dv + m\tau d\alpha = (m+1)\ dv$; & cum ϱ, σ sint quantitates in serie §. 2. continuæ, evidens est ex §. 3. fore $\varrho d\alpha = d\sigma$. Eadem ratione patet, esse $\pi d\alpha = d\varrho$, $\sigma d\alpha = d\pi$ &c. Itaque, substitutione rite facta, habetur

$$3)\ (m+1)\ dv + \varepsilon dB = C d\varrho + D d\pi \ldots \pm T d\alpha = d.\ A\tau.$$

Cujus æquationis priori membro addatur $\mp dV$, & suppleantur in singulis ejusdem membri terminis eæ quantitates, quæ accedere debent, ut ex quolibet termino quantitas integralis seu summa erui possit. Quibus factis præcedens æquatio sub nova tantum specie redibit

$$4)\ (m+1)\ dv + \varepsilon dB - C d\varrho + D d\pi \ldots \pm T d\alpha \mp dV = d.\ A\tau.$$
$$+ C d\sigma - \varrho dC + \pi dD \pm \alpha dT$$
$$+ d\sigma dB - d\varrho dC + d\pi dD \pm d\alpha dT$$

Etenim vi §. 5. $d\sigma dB - \varrho dC = 0$, & $- d\varrho dC + \pi dD = 0$ &c. Ergo cujusque terminorum, qui secundum terminum sequuntur, pars media, & pars ima termini præcedentis, se mutuo destruunt. Denique esse quoque $\pm d\alpha dT \pm dV = 0$, ex §. 5. apparet. Ergo æquationem 3) salva membrorum æqualitate in 4) transmutari posse, certum est. Quod cum ita sit, eliciendo ex singulis terminis æquationis 4) quantitates integrales,

$$(m+1)\ v + B\sigma - C\varrho + D\pi \ldots T\alpha \mp V = A\tau.$$

§. 10. Hocce theorema legem progressus æquationum, quibus relationes inter quotvis ex quantitatibus A, B, C, D, &c. & totidem ex quantitatibus α, β, γ, δ &c. definiuntur, in se continet. Nimirum, quia invenimus (§. 6. 7. 8.)

$$2\ \beta + B = A\alpha$$
$$3\ \gamma + B\alpha - C = A\beta$$
$$4\ \delta + B\beta - C\alpha + D = A\gamma \text{: erit vi theor. §. 9.}$$
$$5\ \varepsilon + B\gamma - C\beta + D\alpha - E = A\delta$$
$$6\ \zeta + B\delta - C\gamma + D\beta - E\alpha + F = A\varepsilon$$
&c. &c.

Verum, ut clarior fiat illa progressionis lex, & verbis possit distinctius exprimi, terminos harum æquationum, alio ordine positos, hic infra exhibebo.

$$B = A\alpha - 2\beta.$$
$$C = B\alpha - A\beta + 3\gamma.$$
$$D = C\alpha - B\beta + A\gamma - 4\delta.$$
$$E = D\alpha - C\beta + B\gamma - A\delta + 5\varepsilon.$$
$$F = E\alpha - D\beta + C\gamma - B\delta + A\varepsilon - 6\zeta.$$
&c. &c.

Manifestum igitur est, ad inveniendum valorem quantitatis, litteræ aliqua majuscula in serie §. 4. expressæ, scribendas esse omnes majusculas illam antecedentes, secundum alphabeti ordinem, inchoando ab ea quæ illi proxima est; deinde singulas majusculas ducendas esse in litteras alphabeti græci, ordine succedentes, sic ut prima majuscula in α, sequens in β, & sic porro, ducatur; ultimo autem horum productorum jungendum factum ex sequenti littera græca in numerum, qui ejus in alphabeto locum indicat; tandem seriei sic formatæ terminis præfigenda esse signa + & — alternatim, incipiendo a signo +.

§. 11. Et hæ quidem, quas postremo loco recensui æquationes, eæ ipsæ sunt, quæ in theoremate *Newtoniano*, quod demonstrandum mihi sumseram, traduntur. Constat enim, cognitam quantitatem secundi termini in omni æquatione, signo ejus mutato, esse summæ omnium radicum æquationis æqualem. Hinc, si series prima §. 1. sit series radicum alicujus æquationis: erit nostrum A vel $\alpha = a$ vel p in formulis NEWTONI. Coefficiens cognita tertii termini æquationis, quæ NEWTONO est $-q$, æqualis est aggregato productorum ex singulis binis radicibus sub signis suis, quod nobis erat $= \beta$. Cognita quantitas quarti termini æquationis, signo ipsius mutato, quam NEWTONUS dixit r, est summa factorum ex singulis ternis radicibus, quam nos posuimus $= \gamma$. Cognita quantitas quinti, signo ejus manente, & quæ ergo ex NEWTONI denominatione erit $= -s$, est summa productorum ex singulis quaternis radicibus, quam nos vocavimus δ. Coefficiens termini sexti sub signo contrario, quæ NEWTONO est $= t$, quia æquatur aggregato productorum ex singulis quinis radicibus, in nostra nomenclatura est $= \epsilon$; & sic deinceps. Ergo pro $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ &c. in posterioribus formulis §. 10. scriptis $p, - q, r, - s, t$ &c. respective, & pro A, B, C, D &c. substitutis litteris NEWTONI a, b, c, d &c. fit.

$$\begin{array}{ll} \text{Summa quadratorum} & b = ap + 2q \\ \text{cuborum} & c = bq + aq + 3r \\ \text{biquadratorum} & d = cp + bq + ar + 4s \\ \text{quadrato-cubor.} & e = dp + cq + br + as + 5t \\ & \quad \&c. \qquad \&c. \end{array}$$

§. 12. Quæ in superioribus de incrementis quantitatum variabilium, & de inventione æquationis integralis ex æquatione incrementali, sine demonstratione assumsi, ne filum analyseos rumperem, ea in gratiam eorum lectorum, quibus forte methodus incrementorum nota vel familiaris non est, hoc loco, quoniam id breviter fieri potest, demonstrabo.

Intelligantur duæ quantitates variabiles A, B, & dum altera earum A crescit quantitate α, altera B ponatur crescere quantitate β. Dico producti ex utraque AB incrementum simultaneum esse $B\alpha + A\beta + \alpha\beta$. Nam quia A, B crescendo factæ sunt $A + \alpha$, $B + \beta$: necesse est ut productum ex iis nunc factum sit $(A + \alpha)(B + \beta) = AB + B\alpha + A\beta + \alpha\beta$. Verum in

in primo earum quantitatum ſtatu erat productum ex ipſis AB. Evidens itaque eſt, incrementum hujus producti eſſe $B\alpha + A\beta + \alpha\beta$. Cui conſequens eſt, incrementum, quod capit AA, dum A creſcendo fit $A + \alpha$, eſſe $2A\alpha + \alpha\alpha$. E converſo igitur, ſi $B\alpha + A\beta + \alpha\beta$ ſpectari poteſt ut quantitas incrementialis (poteſt autem ut talis ſpectari, ſi conſtet, α eſſe incrementum variabilis A, & β, ſimultaneum incrementum variabilis B): quantitas integralis, ſeu ſumma, ad quam iſtud incrementum pertinet, erit AB.

Porro, ſint plures A, B, C, &c. quarum relatio generaliter & perpetuo definiatur æquatione e. gr. hac, $A - B = C$. Sint earum valores præſentes ſimultanei a, b, c reſpective, & incrementa, quæ mox, cum mutabuntur, accipient, α, β, γ reſpective. Ergo in ſtatu præſenti illarum variabilium obtinet hæc æquatio $a - b = c$; & in ſtatu mox futuro locum habebit hæc, $a + \alpha - b - \beta = c + \gamma$. Igitur, præcedente æquatione huic ſubtracta, neceſſe eſt, ut ſit etiam $\alpha - \beta = \gamma$. Quare, e converſo, obſcurum eſſe nequit, ex æquatione incrementali completa, velut $\alpha - \beta = \gamma$. recte colligi æquationem integralem $A - B = C$, quæ variabilium conſtantem ad ſe mutuo relationem definiat. Atque hæc quidem eorum, quæ in ſuperioribus ſumta fuere, illuſtrationi ſufficiunt.

 ABRA-

ABRAHAMI GOTTELPHI KÆSTNER

PROFESSORIS GOTTINGENSIS

DEMONSTRATIO

Theorematis Harriotti.

PROPOSITIO I.

In æquatione quadratica tot ſunt permutationes quot radices poſitivæ, & adeo tot ſucceſſiones quot negativæ. Pono autem hic & ſemper in ſequentibus, niſi contrarium moneatur, omnes radices eſſe reales.

Dem. Sit. (1) $x^2 + px + q = 0$, (2) $x^2 - px + q = 0$ (3) $x^2 + px - q = 0$ (4) $x^2 - px - q = 0$, erit pro duobus prioribus caſibus $x = \dot{.}\ \frac{1}{2}p \pm \surd(\frac{1}{4}p^2 - q)$ & pro poſterioribus $x = \dot{.}\ \frac{1}{2}p \pm \surd(\frac{1}{4}p^2 + q)$, notante puncto ſignum ipſius p ſigno in æquatione oppoſitum. Jam, erit caſibus primis $\surd(\frac{1}{4}p^2 - q)$ minor $\frac{1}{2}p$ & adeo caſu 1. utraque radix negativa, ſunt vero & duæ ſucceſſiones, caſu 2. altera poſitiva altera negativa, adeſt vero ſucceſſio & permutatio. Deinde caſibus poſtremis eſt $\surd(\frac{1}{4}p^2 + q)$ major $\frac{1}{2}p$ unde tam caſu 3 quam 4, erit una radix poſitiva altera negativa, adeſt vero etiam utroque caſu una ſucceſſio & una permutatio. Q. E. D.

PROP. II. LEMMA.

Series ſignorum + & —, utcunque permixtorum, habet permutationes numero *pari*, ſi finiat per +, *impari* ſi finiat per —

Dem. Ponatur ſeries aliquot ejuſmodi ſignorum augeri accedente uno, ita tamen ut & in ſerie aucta, primum ſignum ſit + & ultimum adhuc + vel — prout erat antea: Dico permutationum numerum vel non augeri

geri, vel augeri binario. Inferatur enim novum signum utcunque in mediam seriem, & ponetur vel inter duo similia (puta + inter duo +, aut − inter duo −) tumque permutatio nulla accedit, vel inter duo dissimilia, acceduntque permutationes duæ, vel inter simile & dissimile, destruiturque permutatio quæ ante erat inter hæc duo, accedit vero alia permutatio loco ejus, atque nova etiam successio. Si vero accedens signum debet addi ante primum vel post ultimum, oportet ut ei simile sit, adeoque addat successionem, non permutationem. Omnibus ergo his casibus vel non augentur permutationes, vel augentur binario. Quibus intellectis perspicitur, si in una aliqua serie signis quam paucissimis constante propositio vera sit, veram etiam fore in alia quavis plura signa habente. Sed serierum, quæ a signo + incipientes per + finiunt, atque permutationes habent, paucissimis terminis constans, est + — + in qua sunt permutationes numero pari, quare si augeatur in ea signorum multitudo ita tamen ut extrema maneant +, vel non crescet permutationum numerus vel crescet binario, manebitque adeo semper par.

Inter eas vero series quæ finiunt per —, paucissimis terminis constat hæc + — habens permutationem unicam. Igitur permutationum numerus, vel non crescens vel crescens binario, semper manet impar. Q.E.D.

PROP. III.

Curva quam æquatio $x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} \ldots + tx + u = y$ definit, intellecto per m numero positivo integro, duobus cruribus divergit in infinitum, ad easdem axis partes si fuerit m par, ad diversas si m impar, potest vero axem secare m vicibus & quavis intersectione transit y in oppositum.*

Dem. sit $AP = x$, $PM = y$, cadant vero abscissæ positivæ ad dextram puncti A, ordinatæ positivæ supra axem. Jam ad $x = \infty$ est $y = x^m$ infinitum, positivum quidem si m sit par, qualecunque signum habeat x, sed negativum pro x negativo si sit m impar. Porro æquatio determinata quæ prodit ponendo $y = o$ habet radices m, unde potest y evanescere m vicibus, si eæ radices omnes sint reales. Denique ad quamvis intersectionem, puta ad E, curva axem transit, & proinde y etiam transit in oppositum, nisi forte coeuntibus duabus intersectionibus curva axem tangat. Q.E.D.

Cor. I. cogitetur alia curva, pro qua sit $mx^{m-1} + (m-1)px^{m-2} + (m-2)qx^{m-3} \ldots\ldots + t = Z$; erunt Z ut dy, posita $dx = 1$. Hæc igitur curva potest præcedentis differentialis vocari. Et sic pergi potest, formando hujus fluxionalis fluxionalem, atque opus urgendo donec deveniatur ad lineam rectam, quæ erit curvæ prop. differentialis gradus $m-1$.

Cor. II. ad ea x ad quæ est $Z = o$, est quoque $dy = o$, & adeo y maximum aut minimum, vel, si utrumque communi vocabulo complecti velis, *limes*. Sic si GH sit ordinata, negativarum inter C & D, maxima, erit

AG

* Vide fig. ad hanc pag.

AG abſciſſa, ad quam differentialis curvæ propoſitæ axem ſuum ſecat. Vel ſi KI ($= AG$ adeoque ad x idem,) HI ordinata minima poſitivarum quæ cadunt inter C & D in novum axem.

Cor. III. secet curva axem m vicibus, & ſit F ultima interſectio verſus dextram, erit curva ad dextram puncti F perpetuo ſupra axem, & adeo ad ſiniſtram infra. Unde ordinatæ inter F & interſectionem proxime præcedentem E ſunt negativæ, & VW limes inter eos, eſt maximum negativum. Inter E & D vero limes PM eſt maximum poſitivum, & inter D, C rurſus eſt GH maximum negativum, atque ſic porro omnes limites ſunt maxima, ſignis ſuis alternantia ab ultimo negativo; a quavis enim interſectione ad proxime præcedentem ordinatæ creſcere atque rurſum decreſcere debent.

Cor. IV. proinde ſi ad x aliquod ubi eſt $dy = 0$, ſit y non maximum ſed minimum, pereunt ibi duæ interſectiones & fiunt in æquatione *Prop.*, poſito $y = 0$, duæ radices impoſſibiles. Sic ſi curva *in fig.* referatur ad axem per K tranſeuntem, ſpectabit ad æquationem quinti gradus cujus quatuor radices ſunt impoſſibiles, duæ propter minimum HI, duæ propter minimum WX. Nam ſi y fiat minimum, neceſſe eſt ut antea decreverit & poſt rurſus creſcat; & proinde ſi tale y non ſit ultimus ex limitibus, ſed ex intermediis ut HI, ordinatæ, nec ante ex infinito decreverunt, nec poſt in infinitum creſcunt, ſed cadunt utrinque duo maxima ST, MQ, ejuſdem cum minimo HI ſigni; patetque perire duas interſectiones C & D quæ contigiſſent ſi loco HI minimi, fuiſſet GH maximum maximis duobus RS, PM oppoſitum, curva relata ad axem AF, ubi ſpectaſſet ad æquationem quinque dimenſionum, habentem omnes radices reales. Non diſſimili ratiocinio oſtenditur perire duas interſectiones ultimas, E, F, ſi limes ultimus ad V non ſit maximum negativum ut VW, ſed minimum poſitivum ut WX, nec non perire duas interſectiones maxime verſus ſiniſtram ſitas B, C, ſi ad abſciſſam maximam negativam, ad quam eſt $dy = 0$ (vel minimam poſitivam, ſi tales negativæ non adſint) limes eſt poſitivus in caſu m paris, negativus in caſu m imparis. Hæc autem latius perſequi hic nihil attinet.

Cor. V. spectet curva ad æquationem cujus radices omnes ſunt reales, hoc eſt contingant interſectiones m, ſint vero abſciſſæ poſitivæ a 1 quas cadunt limites, numero n, & erunt limites omnes maxima, ſignis ſuis alternantia, ita quidem ut ſi ultimus verſus dextram, ſcilicet VW, dicatur n^{tus} & reliqui MP, $n-1$. ac GH, $n-2$ &c. ſit

n^{tus}	*negativus*	$n-1^{tus}$	*poſitivus*
$n-2$	- - - - -	$n-3$	- - - -
$n-4$	- - - - -	$n-5$	- - - -
$n-2k$	- - - - -	$n-2k-1$.	- - -

Proinde, ſi quæratur qualis ſit primus ad abſciſſam AG, ſitque n impar, patet eſſe debere $n-2k = 1$ ſeu eſſe eum negativum, ut GH in fig. ubi

ubi $n = 3$; si vero sit n par, erit $n - 2k - 1 = 1$, & limes maximum positivum.

COR. VI. IN HYPOTHESI *Cor. præc.* cadent semper non pauciores quam n intersectiones ad abscissas positivas. Nam inter quævis duo maxima proxime se sequentia, cum sint opposita (*Cor.* 3.), cadit intersectio, & adeo inter maxima n cadunt intersectiones $n - 1$. Porro cum ultimum maximum sit negativum (*Cor.* 3.); dabitur adhuc n^{ta} intersectio F, accedens prioribus $n - 1$, puta duabus E, D, quæ cadunt inter tria maxima VW, PM, GH.

COR. VII. SIT AG abscissa ad quam spectat maximum primum GH ex præfatis n, atque sit n impar, erit GH negativum, (*Cor.* 5.): sit æquationis *Prop.* ultimus terminus u positivus, seu sit $+u$, & ad $x = o$, seu ad A, est curva supra axem. Unde debet axem inter G & A transire vel semel, vel ter, vel quinquies &c., numero impari. Sed cum inter quosvis duos transitus cadat maximum, darentur maxima adhuc inter G & A, adeoque ad abscissas positivas, *contra hyp.* Ergo transit axem saltem semel, ut in C. Si vero sit $-u$, est ad A infra axem, cumque adeo inter G & A vel non transit, vel transit bis, quater, &c, numero pari, quod rursus fieri nequit, ne plura quam n maxima oriantur. Ergo non transit. Proinde si sit n impar, erunt intersectiones ad abscissas positivas, numero $n + 1$ si sit $+u$, & n si sit $-u$. Nam n semper sunt, etiam si nulla sit inter G & A (*Cor. præc.*)

COR. VIII. SI SIT n par, erit limes primus positivus (*Cor.* 5.) Unde similiter, ut ante, deducitur fore intersectiones numero $n + 1$ si sit $-u$, & n si sit $+u$.

PROP. IV.

AEQUATIO determinata quæ prodit ponendo $Z = o$ in *Cor.* 1. *præc*, habeat tot radices positivas quot habet permutationes; & numerus utrasque indicans sit n: dico & æquationem quæ prodit Prop. III., facto $y = o$, habere tot radices positivas, quot ipsa habet permutationes.

DEM. PER HYP. æquatio pro $Z = o$ habet tot permutationes, quot habet formula $x^m . px^m . qx^{m-2}$ - - - - . tx. Sit *primo* n par, & *per Lemma* erit $+tx$. Ergo in æquatione *Prop. III.* vel est $+tx+u$ vel $+tx-u$. Sunt vero intersectiones curvæ cum axe ad abscissas positivas, (hoc est radices positivæ æquationis quæ prodit posito $y = o$) *casu* 1. numero n & *casu* 2. numero $n+1$. At manifestum etiam est permutationibus n quæ erant in $x^m . px^{m-1} . qx^{m-2}$ - - - $+ tx$, accedere nullam si sit $+u$, unicam si sit $-u$.

DEINDE si sit n impar, erit vel $-tx+u$ vel $-tx-u$ (*per Lemma*) & *casu* 1. erunt radices positivæ $n+1$, *casu* 2. saltem n (*Cor.* 7. *præc.*) rursusque patet tot esse radices positivas quot sunt permutationes. Q. E. D.

PROP. V.

In omni æquatione tot sunt radices positivæ quot sunt permutationes, sub conditione *Prop I.*

Dem. valet enim hoc de quadratica *Prop. I.* Ergo per *Prop. IV.* de cubica, cujus differentialis est quadratica, ergo de ea cujus fluxionalis est cubica, hoc est de biquadratica, & sic in infinitum, cum quævis æquatio sit differentialis ejus, cujus gradus est proxime superior. Q. E. D.

Cor. cum æquatio gradus m habeat terminos & signa numero $m+1$, sequitur ut si habeat permutationes numero n, successiones sint numero $m-n$. Sed si radices positivæ sint numero n, erunt negativæ numero $m-n$, adeoque tot negativæ quot successiones. Casus si $n=0$ tum in his continetur: tum etiam ex genesi æquationum perspicitur, cum in oculos incurrat, si omnes radices sint negativæ, meras dari successiones.

Schol. cur regula non possit applicari si æquatio radices imaginarias contineat, patet ex *Cor.* 4. *Pr. III.*; pereuntibus enim intersectionibus, hoc est ingredientibus æquationem radicibus imaginariis, cessat hypothesis cui innititur *Cor.* 5. 6. 7. 8. *Pr. III.* & adeo tota hæc theoria. Ceterum ex harum curvarum consideratione perspicitur etiam, duobus modis inesse posse imaginarias. *Vel* enim differentialis æquationis radices quædam sunt imaginariæ; *vel* hæ quidem omnes reales sunt, efficiunt vero quosdam limites minima, quæ maxima efficere debebant. Postremum genus pendet a conditione termini ultimi in æquatione, adeoque eo mutato tollitur. Ita parabolois in fig. exhibita, si referatur ad KQ axem, spectabit ad æquationem gradus 5. habentem 4. imaginarias ob unicam intersectionem T. Jam sit applicata quævis $MQ = w$ & $AK = b$, & ejusdem curvæ ad AP axem relatæ applicata quævis $MP = y$ eritque $y = w - b$; & si ante fuerit $x^5 . px^4 - - - . tx . u = w$, erit jam $x^5 . px^4 - - - . tx . u - b = y$, solaque mutatione ultimi termini ex u in $u-b$, abiit æquatio in talem cujus omnes radices sunt reales. Quando vero differentialis æquationis radices fiunt imaginariæ, limites plane fiunt impossibiles atque y continuo crescunt. Tunc autem principalis æquationis imaginarias ab ejus coefficientibus pendere manifestum est. Sit $x^3 * . px . r = y$ & $3x^2 * . q = Z$, ubi $Z = 0$ ad $x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}q}$, patet si q in æquatione sit numerus positivus, fore ambas æquationis differentialis, & adeo duas cubicæ, radices imaginarias, & in genere in quacunque æquatione cujus secundus terminus deest, fore imaginarias, si tertii termini, seu ipsius x^{m-2}, coefficiens fuerit positivus, quod evincitur formando differentiales usque ad eam quæ sit quadratica (*Cor.* 1. *Pr. III.*) Porro, si in cubica ante adducta sit $x^3 - qx$, & adeo $\sqrt{\frac{1}{3}q}$ quantitas possibilis, requiretur tamen, quo omnes cubicæ radices reales sint, ut adhibito ante dicto ipsius x valore cum signo inferiore, prodeat in cubica y positivum, & signo superiore y negativum (Cor. 4. Pr.

Pr. III.), hoc eſt ut caſu priore ſit $- \frac{1}{3} q \surd + \frac{1}{3} q + q \surd + \frac{1}{3} q + r$ quantitas poſitiva unde habetur $\frac{1}{27} q^3$ major $\frac{1}{4} r^2$, quod idem etiam ſequitur ex altera hypotheſi. His in vulgus notis, illuſtratur duplex modus, quo impoſſibiles æquationi ineſſe poſſunt. Inde etiam intelligitur quousque ſe extendant regulæ variæ a compluribus traditæ, pro impoſſibilibus cognoſcendis.. Quatenus enim inde pendent, ut datæ æquationis differentiales formentur, uſque ad eas quæ fiunt quadraticæ, colligaturque ſi hæ habent imaginarias, habituram etiam principalem, utique non poſſunt id imaginariarum genus detegere quod a ſolius ultimi termini conditionibus pendet. Equidem quomodo ſubſtituendo radices æquationis differentialis in principalem, poſſint hujus imaginariæ detegi perſpicietur ex *Cor.* 4. *Pr. III.*; ſed quæ applicationem hujus methodi valde incommodam reddant quivis facile animadvertet.

P. ROGERII JOSEPHI BOSCOVICH

S. I. Publici Matheseos Professoris in Collegio Romano.

OBSERVATIO

IN PROBLEMA LVI.

IN Arithmetica Universali NEWTONI habetur problema 56. hujusmodi: *Cometæ motu uniformi rectilineo per Cælum trajicientis locis quatuor observatis, distantiam a terra, motusque determinationem in hypothesi Copernicea colligere.* Hoc problema, ut hic a NEWTONO solvitur, congruit cum illo, quod habet Princ. lib. 1. prop. 26. corol. 1. ubi id ad simplices geometrices terminos reducitur; sic autem ibi habet: *recta duci potest, cujus partes rectis quatuor positione datis dato ordine interjectæ datam habebunt proportionem ad invicem.* Nam ex quatuor observationibus cometæ visi e quatuor diversis Terræ locis redactis ad eclipticam, determinantur quatuor rectæ positione datæ, quæ nimirum tendunt a quatuor locis veris Terræ ad quatuor loca visa cometæ, & recta, quæ duci debet, est ipsa orbita cometæ redacta ad eclipticam, cujus partes, illis quatuor rectis positione datis interceptæ, sunt in hypothesi motus rectilinei, in ratione intervallorum temporis inter illas quatuor observationes, quæ ratio datur ex datis observationum momentis. Profert autem ibi tres ejus problematis constructiones, & innuit alias a Wrenno, & Wallisio ante ipsum excogitatas.

Cometæ distantiam a Terra is inquirit lib. 3. lem. 4. quod consequitur Prop. 39., ac utitur hypothesi motus cometæ rectilinei & uniformis, negligendo nimirum inæqualitates, quæ habentur in orbe cometæ, qui orbis nec revera rectilineus est, nec motu uniformi percurritur. Solutio, quam ibi profert, reducitur itidem ad solutionem ejusdem problematis, & ejus ope illud ipsum problema geometricum libri 1. resolvi facile posset reductione idonea adhibita, quæ aliam ejusdem solutionem exhiberet.

Addit ibidem NEWTONUS illud: *hic autem* (locus cometæ in plano eclipticæ) *orbe Jovis inferior esse solet.* Verum satis vereor, ne ipse numeros ad ejusmodi investigationem e selectis observationibus adhibere omiserit; quod si præstitisset, ego quidem arbitror, ipsum fuisse perspecturum, quam inepta sit ea methodus ad determinandam etiam crasso modo cometæ distantiam. Id ego casu comperi, & demonstravi in mea dissertatione de cometis edita anno 1744. Et quidem Eustachius Zanottus, Bononiensis Academiæ Astronomus, doctissimus sane, & tam geometriæ,

quam

quam astronomiæ peritissimus, cum ad solutionem ejus problematis a NEWTONO traditam in Arithmetica Universali numeros applicuisset, usus observationibus Cometæ, quas censebat admodum accuratas, quæ vero a se invicem distarent per binos circiter dies, invenit distantiam prorsus absurdam, orbitam nimirum cometæ, qui apparuerat ad partes solis, invenit jacentem ad partes prorsus oppositas, sive, si quorundam Geometrarum vocabulis uti licet, distantiam invenit plusquam infinitam, quæ nimirum per infinitum traducta in negativam abierit e positiva, errore plusquam infinito. Et is quidem tum censuit errorem provenisse ex eo, quod observationes assumsisset non satis proximas ad negligendam inæqualitatem motus cometæ, attributo errore non satis magnæ observationum propinquitati, qui ab ipsius methodi vitio pendet, ut ibidem ostendi.

Vitium autem methodi in eo consistit, quod problema determinans positionem rectæ a quatuor rectis positione datis sectæ dato ordine in ratione data, habet casum, in quo evadit indeterminatum, infinitas numero solutiones admittens, ita ut per quodvis punctum cujuspiam e quatuor rectis positione datis duci possit recta quæ ab iis eo dato ordine secetur in ea data ratione: & is ipse casus occurrit, si & motus cometæ & motus Terræ assumantur pro rectilineis & uniformibus. Nimirum inveni illud, si assumantur utcumque binæ rectæ, & in singulis tria segmenta eodem ordine jacentia versus plagam utramlibet, quæ sint ad se invicem in aliqua ratione data, ac per bina quævis homologa segmentorum extrema, ducantur rectæ, quæ erunt quatuor rectæ positione datæ; posse duci alias numero infinitas, nimirum aliam in quavis distantia ad arbitrium assumta, quæ ab illis quatuor rectis secetur in illa eadem ratione data illo eodem ordine. Quamobrem si motus & Terræ & cometæ esset revera rectilineus, & uniformis, derminatio evaderet frustranea, ut in ejusmodi casibus accidit, in quibus problemata, quæ generaliter sunt determinata, evadunt indeterminata in quopiam casu particulari: & quoniam, quo magis ad rectilineum, & æquabilem accedit motus cometæ, quod non fit, nisi assumendo intervalla inter observationes minora, eo magis & motus Terræ accedit ad rectilineum & uniformem; idcirco, quo magis inter se proximæ assumantur observationes, eo magis ad indeterminationem problematis acceditur.

Determinatio igitur problematis oritur ab iis quantitatibus, quibus ii bini motus recedunt a rectilineis & uniformibus, & quibus observationes aberrant a veris positionibus rectarum jungentium vera loca Terræ, & loca cometæ redacta ad eclipticam; semper enim committuntur in observationibus erroruculi, utut exigui. Si motus cometæ parum ab ea hypothesi recederet, motus autem Terræ recederet, ita ut is recessus esset multo major quam recessus ille, & quam exigui observationum errores; tum determinatio haberetur veræ proxima. Sed quoniam recessus motus Terræ ab ea hypothesi est minor, quam recessus motus cometæ; determinatio oritur a quantitatibus, quæ aberrant a positionibus pro ipsa determinatione faciendis; & si præterea exigua sunt temporum intervalla, uterque

recessus est exiguus etiam respectu errorum admissorum in observationibus; unde fit ut determinatio ipsa provenire possit utcumque remota a vera, nec nisi casu quodam, quo se errores omnes compensent, ad veram possit accedere; quam ob causam illud suspicor, NEWTONUM, cum aliunde nosset, cometas, ubi sub aspectum cadunt, infra Jovem descendere, methodi autem, quam proponebat, vitium nequaquam animadvertisset, illud affirmasse, distantiam ea methodo inveniri plerumque minorem distantia orbitæ Jovis. Id autem nihil omnino minuit æternum decus, quod sibi, ut ceteris tam multis & geometricis & astronomicis compertis, ita & hoc ex capite immortalis suæ cometarum theoriæ comparavit, quorum orbitæ qua ratione definiri debeant non in falsa hypothesi motus rectilinei, & uniformis, sed in vera motus facti in ellipsi, quæ ad parabolam accedat plurimum, comperit primus, & in eodem Principiorum lib. 3. exposuit, ac demonstravit.

Ut ea, quæ ad hanc problematis indeterminationem pertinent, demonstrentur omnia, proponam analysim geometricam problematis rectæ ducendæ inter quatuor rectas positione datas, ex qua orietur constructio fere prorsus congruens cum ea, quam admodum simplicem proposuit Simpsonus in suis Geometriæ elementis, quam tantummodo reddet paullo simpliciorem: ex ea vero casus hic indeterminatus sponte fluet.

Quatuor rectæ positione datæ sint in fig. 1.* AB, AC, DE, FG, inter quas oporteat ducere rectam HL ita, ut ejus segmenta HI, IK, KL, iis intercepta, sint in ratione datarum TV, VX, XY.

Sit factum, & occursus primæ e rectis datis cum quarta sit in F, secundæ cum prima, & quarta, in A, & Q; ac tertiæ cum iisdem in D, & P; concipiantur autem per K, & I, rectæ parallelæ primæ, & quartæ, quæ sibi invicem occurrant in N, ac prior quartæ in O, posterior primæ in M: concipiatur præterea recta per A, N, occurrens quartæ in S, & recta per P, N, occurrens primæ in R: patet, fore similia triangula IMH, INK, LOK a lateribus parallelis constituta; ac rectas parallelas MN, FG a rectis FM, QI, SN, transeuntibus per idem punctum A secari debere in eadem ratione, ut & ON, FR, a rectis FO, DK, RN, transeuntibus per idem punctum P itidem in ratione communi utrique. Hinc habebuntur hujusmodi proportiones

$$FQ . QS :: MI . IN :: HI . IK :: TV . VX$$
$$FD . DR :: OK . KN :: LK . KI :: XY . VX$$

Datur igitur ratio datarum FQ, FD ad rectas QS, DR, adeoque dantur & hæ rectæ, proinde etiam puncta S, R, adeoque & rectæ AS, RP, ex quarum concursu N ductæ rectæ NO, NM, parallelæ rectæ primæ & quartæ, per suos concursus cum tertia in K, & secunda in I, determinabunt positionem IK rectæ quæsitæ HL, adeoque ipsam rectam. Q.E.F.

Ex hac analysi sponte consequitur hujusmodi constructio. Fiat QS ad FQ,

* Illarum, quæ ad hanc commentationem pertinent, quod & de reliquis intelligendum est.

FQ, ut VX ad VT, & DR ad FD, ut VX ad XY. Per A, S, & R, P, ducantur rectæ, ex quarum concursa N ducantur NK, NI parallelæ, illa primæ, hæc quartæ e rectis datis, & occurrentes illa tertiæ in K, hæc secundæ in I, ducaturque per I, & K, recta occurrens primæ in H, quartæ in L; & dico, rectam HL fore sectam in I, & K in eadem ratione, in qua recta TY secatur in V, X.

Productis enim rectis NI, NK, donec occurrant primæ, & quartæ in M, O, erunt similia triangula IMH, INK, LOK, a lateribus parallelis constituta, & rectæ parallelæ MN, FS, a rectis FM, QI, SN, transeuntibus per idem punctum A, secabuntur in eadem ratione; ac ON, FR, a rectis FO, DK, RN, transeuntibus per idem punctum P itidem in eadem ratione. Quamobrem habebuntur hujusmodi proportiones

HI . IK :: MI . IN :: FQ . QS :: TV . VX
IK . KL :: NK . KO :: RD . DF :: VX . XY

Sunt igitur tres rectæ HI, IK, KL inter se, ut TV, VX, XY inter se. Q. E. F.

In hac generali constructione concursus rectarum AS, RP, in N problema determinat, quod unicam solutionem habet determinatam, si illæ binæ rectæ in unicam non coalescunt; at iis coalescentibus in unicam rectam, problema evadit indeterminatum. Si nimirum punctum S abeat in P, & R in A; rectæ AS, RP, congruent, & in ea unica recta assumi poterit punctum N quodcumque, quod solutionem exhibebit. Tum autem casus redibit ad sequentem positionem, atque constructionem.

Sint in fig. 2. eædem rectæ AB, AC, DE, FG, quæ in prima, ac sit FQ . QP :: TV . VX, & FD . DA :: XY . VX; dico solutiones problematis fore numero infinitas. Ducta enim per A, & P, recta, assumatur in ipsa quodcumque punctum N, & per ipsum ducantur rectæ NKO, NIM parallelæ primæ, & quartæ e rectis datis, & recta HL ducta per I, & K problema solvet. Erit enim, ut in solutione generali

HI . IK :: MI . IN :: FQ . QP :: TV . VX
IK . KL :: NK . KO :: AD . DF :: VX . XY

Problema igitur in hoc casu evadit indeterminatum. Potest autem duci recta quæsita in quacumque distantia. Assumpto enim in recta AC, vel DE quovis puncto I, vel K, duci potest IN parallela FG, vel KN parallela AB, quæ in recta AP determinabit punctum N, & per ipsum ducta NK, vel NI, habebuntur puncta, I, K, & tota recta HL.

Quoniam autem licet considerare quovis ordine rectas datas, appellando primam, secundam, &c. quam libuerit, & semper dabitur ratio segmentorum rectæ ducendæ interceptorum iis consideratis eo ordine; potest per quodvis punctum cujusvis ex rectis datis duci recta quæsita; efficiendo nimirum, ut ea recta data consideretur tanquam secunda, vel tertia e datis quatuor.

Sint

Sint jam in fig. 3. binæ rectæ HL, HL' sectæ in I, K, & I', K' in eadem ratione, & per puncta H, H'; I, I'; K, K'; L, L'; transeant quatuor rectæ AB, AC, DE, FG; oportet ostendere, hunc esse casum indeterminationis problematis, ita ut inter hujusmodi rectas infinitæ aliæ duci possint, quæ in eadem illa ratione secentur ab iisdem quatuor rectis, ac in data quavis distantia duci possit ejusmodi recta.

Ducantur per I, & I', rectæ parallelæ FG occurrentes AB in M, M'; tum per K, K', rectæ parallelæ AB occurrentes rectæ FG in O, O', & rectis, MI, M'I', in N, N'. Erit MI . IN :: HI . IK :: HI'. I'K' :: M'I' . I'N'. Quare tres rectæ M'M, I'I, N'N convergant ad punctum commune, adeoque ad punctum P. Est igitur APNN' unica recta, & idcirco est FQ . QP :: MI . IN :: HI . IK, & DF . DA :: OK . KN :: LK . KI. Sunt igitur FQ ad QP, & FD ad DA in ea ratione, quam debent habere extrema e tribus segmentis rectæ ducendæ ad medium, quod indeterminationem expositam inducit.

Patent igitur omnia, quæ fuerant proposita, nimirum haberi casum in hoc problemate, in quo id evadat indeterminatum, & hanc ipsum esse casum, quo motus Terræ, & cometæ accipiantur pro uniformibus, & rectilineis, quo nimirum quatuor rectæ positione datæ transeant per puncta binarum rectarum sectarum in eadem quapiam ratione, quo nimirum casu infinitæ aliæ duci possunt eodem modo sectæ, ita ut in quavis distantia possit duci aliqua; unde consequitur, ex datis positione ejusmodi quatuor rectis, & ea ratione segmentorum rectæ inter eas interjacentis, non posse determinari hujus distantiam.

Præter hunc casum indeterminatum hujusce problematis, sunt & alii ex generali constructione evolvendi, in quorum quibusdam oportet ipsam etiam constructionem generalem nonnihil immutare.

In primis si in fig. 1. binæ rectæ AS, RP evadant parallelæ, punctum N abit in infinitum, ita ut nusquam jam sit. Tum & recta quæsita in infinitum ita abit, ut nusquam jam sit; ac problema haberi potest pro impossibili. Nimirum eo casu nulla recta ita duci potest, ut a rectis positione datis secetur in illa ratione data. Is casus habetur, ubi sit FS . FP :: FA . FR. Facile autem eruetur determinatio ejusdem casus per rectas FQ, FP, FD, FA, datas, & per segmenta datæ rectæ TY. Nam ex proportione posita erit FS . FR = FP . FA. Porro cum sit FQ . QS :: TV . VX, erit TV . TX :: FQ . FS $= \frac{TX . FQ}{TV}$, & eodem pacto $FR = \frac{VY . FD}{XY}$. Hinc FS ad FR $= \frac{TX . VY}{TV}$ ad $\frac{FQ . FD}{XY}$. Cum igitur is valor debeat æquari FP.FA, erit TV . XY ad TX . VY :: FQ . FD ad FP . FA, quæ ratio si habeatur, problema nullam solutionem admittet.

Quod si in fig. 1. evanesceret FD vel FE, tribus rectis transeuntibus per idem punctum; oporteret in eo casu assumere ad arbitrium in prima recta punctum *f*, vel in quarta *f'*, & ducere rectam *fs* parallelam quartæ e qua-

quatuor rectis datis, vel *fr* parallelam primæ, donec occurrat illa secundæ in *i*, vel hæc tertiæ in *d*, ac in iisdem assumere *is* ad *if*, vel *dr* ad *df* in ratione VX ad TV, vel ad XY, & occursus rectarum transeuntium per A*s*, & P*r* exhiberet illud idem punctum M, quod eodem modo problema solveret. Esset enim.

HI . IK :: MI . IN :: *fi* . *is* :: TV . VX.
IK . KL :: NK . KO :: *rd* . *df* :: VX . XY.

Si autem evanescerent & FD, & FQ; tunc omnes quatuor datæ rectæ transirent per idem punctum F, in quod idcirco abirent omnia quatuor puncta A, D, Q, P. Eo casu rectæ A*s*, P*r* transirent itidem per punctum F, & vel nusquam alibi sibi invicem occurrerent, abeunte & N eodem, vel abirent in unicam rectam, congruentes simul. Priorem casum exprimit figura 4., ubi quatuor rectis FB, FC, FE, FG transeuntibus per idem punctum F, ac assumptis F*f*, F*a* ad arbitrium, & factis, ut prius TV . VX :: *fi* . *is*, ac XY . VX :: *ad* . *dr*, binæ rectæ F*s*, F*r* nusquam concurrunt, nisi in F; posterior autem casus habetur in fig. 5., ubi eadem constructione facta, rectæ F*r*, F*s* in unicam coalescunt. In primo casu solutio nulla haberi potest cum nullum occurrat punctum N, quod in utraque e rectis F*r*, F*s* simul positum, possit exhibere simul illas duas rationes TV . VX, & VX . XY: in secundo casu problema est indeterminatum infinitas numero solutiones admittens. Assumpto enim ubicumque puncto N in recta F*rs*, & reliqua constructione peracta, ut in solutione generali, habebitur.

HI . IK :: MI . IN :: *fi* . *is* :: TV . VX.
IK . KL :: NK . KO :: *rd* . *da* :: VX . XY.

Hic posterior casus pertinet ad illud ipsum problema indeterminatum, quod in fig. 2. exhibuerant rectæ AS, RP figuræ primæ, coalescentes in unicam AP ipsius figuræ 2.

Quod si prima, & secunda, vel tertia, & quarta e rectis datis essent inter se parallelæ; abiret punctum A, vel P in infinitum; & tunc in fig. 1. per S, vel *s* ducenda esset recta parallela primæ, & secundæ, vel per R, vel *r* ducenda esset recta parallela tertiæ, & quartæ, quorum concursus in N cum RP, vel P*r*, vel cum AS, vel A*s* solutionem exhiberet, congruente in primo casu, SN cum ON, & in secundo PN cum MN. Primum casum exhibet figura 6., in qua secunda recta QC existente parallela primæ FB, & factis TV . VX :: FQ . QS ducenda est recta SKN parallela rectis QC, FB, cujus concursus in N cum recta RP determinata eodem pacto, quo in figura 1., exhibet constructionem, ducta itidem NIM parallela GF, & per I, K quæsita recta HIKL. Ex eo autem casu patet etiam secundus.

Quod si tres e rectis datis, vel omnes quatuor, forent inter se parallelæ; problema aut esset impossibile, aut haberet solutiones numero infini-

 tas;

tas: verum eo casu generalis illa constructio locum non haberet, sed longiore ambitu alia inde derivari deberet, quæ in sequentem admodum expeditam desineret.

Sint in fig. 7. tres rectæ datæ inter se parallelæ AB, AC, DE, quas secet in F, Q, P quarta FG. Si FQ, QP non sunt, ut TV, VX; patet problema fore impossibile; quia ducta quavis HIKL, erunt HI, IK, ut FQ, QP. Si autem hæ sunt in illa ratione; assumpta PL ad PQ, uti est XY ad XV, quævis recta LH ducta per L, & nulla alia, solvet problema. Patet primum, quia HI, IK, KL erunt ut FQ, QP, PL, sive ut TV, VX, XY. Patet secundum, quia quævis alia, quæ occurrat ipsi FG alicubi in *l*, habebit *lk* ad *ki*, ut *l*P ad PQ, adeoque non ut LP ad PQ, & proinde nec ut XY ad XV.

Sed si & quarta sit itidem parallela, ut G'F', & ducta quavis FQPL, ipsa non fuerit secta ut TVXY; nulla alia *bik*L' erit ita secta, cum debeant ejus segmenta esse, ut segmenta rectæ FQPL.

Si autem FQPL fuerit ita secta, quævis alia *bik*L' ducta in quacumque distantia, & in quacumque directione erit itidem secta in eadem ratione. Cum autem & distantia puncti L' per quod recta ducatur, & ejus inclinatio variari possint utcumque; patet, tum solutiones fore infinities infinitas, & problema indeterminatum indeterminatione secundi ordinis.

Hi sunt casus præcipui hujus problematis, quod, ut plerumque generalia problemata, casus habet plurimos, qui evolutionem particularem exigant singuli suam, & occurrunt casus, in quibus evadit impossibile, ac casus, in quibus evadit indeterminatum. In hoc problemate illud est dolendum maxime, quod unus ex casibus indeterminatis ibi potissimum accidat, ubi ipsum problema maxime usum habere posset, & pro quo in primis fuerat consideratum.

MONITUM EDITORIS.

Quamquam pro viribus laboraverim, ut opellam hanc tibi approbarem, benigne LECTOR; tamen nonnulla mutanda & explicanda video, doctus ab Amico harum rerum peritissimo; nonnulla explanda & addenda ipse intelligo.

Quoniam in Dictionario eruditi MARCHAND, articulo S' GRAVESANDE; edita est epistola a me ad illustrem hunc virum scripta ipsis Kal. Juliis anni 1740. quæ continet totam hujus commentarii delineationem, quam probavit vir summus, dicere debeo cur multa deleverim, & aliam faciem commentario induxerim.

Primo, brevitati consulens, omisi nonnullas demonstrationes, quæ aliis in libris impressæ leguntur. Hujusmodi est demonstratio theorematum, quæ pro *inventione Divisorum* tradidit noster, excogitata tum a s'GRAVESANDE tum a *Nic.* BERNOULLIO. Hujusmodi pariter est *Geometria* CURVARUM, quam post hunc commentarium inceptum plures docti viri pertractarunt, inter quos eminent *Gabriel* CRAMMERUS & *Leonardus* EULERUS. Præterea non prorsus hanc tractationem flagitabat institutum nostrum. Hujusmodi pariter sunt Physices, Astronomiæ &c. principia, quæ necessaria sunt ut intelligantur nonnulla problemata a NEWTONO soluta, & quæ ideo pollicitus fueram, ne tiro ad alios libros confugere cogeretur. Tunc scilicet, quæ est Juvenum confidentia, sperabam me conscribere posse librum, quem tiro sine duce posset intelligere; nunc autem viginti annorum in docendo consumptorum experientia doctus, fateor me rem tunc aggressum esse, quam nec ego, nec nemo, puto, perficere potest. Quis enim afferre potest notiones prorsus omnes, quæ insunt in argumento quodam? Sed ex notionibus, quæ omittuntur, has facile supplet hic, ille difficile, alter ne difficile quidem. Hinc fit ut idem liber pro Lectorum ingenio, videatur perspicuus huic, illi obscurus. Præceptore opus est, qui intelligat quas notiones auditor supplere nequit, & illas ipsas enucleandas suscipiat, reliquas negligens, quæ discipulo sponte se sistunt.

Ceterum in Tomo I. longior videri potest demonstratio theorematis *binomialis*, quæ est pag. 25..34. N^{is} 94...133. Sed excusatum, obsecro, me habeat Lector rem a primis principiis deducere satagentem, & quatuor diversa theoremata demonstrantem. Nam a N°. 94. ad totum 110. trado *regulam pro multiplicandis binomiis quibuslibet*, quæ in Algebra fortasse non inutilis comperietur. A N°. 111. ad 114. *regulam pro multiplicandis binomiis unum Factorem communem habentibus*, quæ pariter sæpe usuverit, præsertim in evolvendis æquationum proprietatibus. Ipsum *theorema binomiale*, quando nempe integer est exponens, traditur a N°. 115. ad 122. Reliqui complectuntur theorema pertinens ad *infinitinomium*.

Pag. 104. & 105. Docet NEWTONUS quomodo eliminetur quantitas multarum dimensionum. Has regulas inexplicatas reliqui, tum quia habentur explanatæ a *Gabriele* CRAMERO ad calcem *Geometriæ curvarum*, tum

quia sine multis ambagibus res explicari non poterat; & cum hæ regulæ minus utiles sint ad intelligendum totum librum NEWTONI, Lector, quando iis opus habebit, ad CRAMERUM confugere potest, vel ad ea quæ alio loco tradam a me de hac re excogitata ante hos aliquot annos.

Pag. 113. col. 1., ut ostendam quantitatem imaginariam esse $\sqrt{-7}$, provoco ad Sect. I. N°. 80. Eo loco est ostensum quadratum esse positivum, seu radix sit positiva, seu negativa. Ergo quadratum negativum radicem neque positivam neque negativum habet, id est vere quadratum non est, quod ipsum exponit vox *imaginarium*.

Eadem pag. 113. col. 2. ex

$$x+z=30;\ \&\ x.y::y.z;\ \text{ac}\ y+z=36,\ \text{fit}\ y=6+x$$

quod multo facilius confici poterat. Quia enim

$$x+z=30,\ \&\ y+z=36;\ \text{erit}\ y+z-x-z=y-x=36-30=6.$$

Nunc pauca ad Tomum II. Siquis contentus non sit demonstrationibus, quibus confirmatur theorema enunciatum pag. 19 N°. 45. quod nempe omnis æquatio rationalis quæ dividi potest per $x+m+n\sqrt{p}=0$, dividi potest etiam per $x+m-n\sqrt{p}=0$, videat an hæc sufficere possit.

Quoniam æquatio proposita dividi potest per

$$x+m+n\sqrt{p}=0;\ \text{est}\ x=-m-n\sqrt{p},\ \&\ O=Q(m+n\sqrt{p})$$

Nam ultimus terminus æquationis conficitur per multiplicationem ex omnibus quantitatibus cognitis Factorum simplicium; inter quas est $m+n\sqrt{p}$; & factum ex reliquis dico $=Q$.

Cum vero sit $x=-m-n\sqrt{p}$, poterit in proposita poni $-m-n\sqrt{p}$, atque hujus potestates, pro x & ejus potestatibus. Quo facto proposita evadet

$$o=Q(m+n\sqrt{p})+N(-m-n\sqrt{p})+M(-m-n\sqrt{p})^2+L(-m-n\sqrt{p})^3+K(-m-n\sqrt{p})^4+\&c.$$

Hinc scribendo potestates ipsas, & separando terminos rationales, ac irrationales, erit per N^{um} 38. ejusdem loci,

$$o=Qm-Nm+M(m^2+n^2p)+L(-m^3-3mn^2p)+\&c.$$

&

$$o=Qn\sqrt{p}-Nn\sqrt{p}+2Mmn\sqrt{p}+L(-3m^2n\sqrt{p}-n^3p\sqrt{p})+\&c.$$

Ergo subducendo æqualia ab æqualibus, secundam a prima

$$o=Qm-Qn\sqrt{p}-Nm+Nn\sqrt{p}+M(m^2-2mn\sqrt{p}+np^2)+L(-m^3+3m^2n\sqrt{p}-3mn^2p+n^3p\sqrt{p})+\&c.$$

id est

$$o = Q(m-n\sqrt{p}) + N(-m+n\sqrt{p}) + M(-m+n\sqrt{p})^2 + L(-m+n\sqrt{p})^3 + \&c.$$

Hæc autem æquatio dividi poteſt per $m - n\sqrt{p}$; & ſubſtituendo x & ejus poteſtates pro hoc binomio & ejus poteſtates, reſtituit propoſitam. Ergo quando

$$x = -m - n\sqrt{p}; \text{ etiam } x = -m + n\sqrt{p}, \ \& \ x + m - n\sqrt{p} = o.$$

Negotium faceſſere poteſt ultimus terminus. Sed dico neceſſario eſſe $Q = R(m - n\sqrt{p})$. Quandoquidem

Per hypotheſim, eſt O quantitas rationalis: hoc poſito nequit eſſe Q quantitas rationalis; nam tunc $O = Q(m + n\sqrt{p})$ eſſet quantitas irrationalis, contra hypotheſim. Sed neque poteſt eſſe Q quantitas ſurda unius nominis; ex. gr. $Q = \alpha\sqrt{\beta}$; quia tunc eſſet $O = \alpha m\sqrt{\beta} + \alpha n\sqrt{\beta p}$, & ſaltem irrationalis eſſet pars $\alpha m\sqrt{\beta}$. Neque poteſt pars radicalis habere exponentem r a binario diverſum. Si enim eſſet $Q = R(\gamma + \alpha\sqrt[r]{\beta})$, eſſet

$$O = QL(m+n\sqrt{p}) = R(\gamma+\alpha\sqrt[r]{\beta})(m+n\sqrt{p}) = R(m\gamma + m\alpha\sqrt[r]{\beta} + \gamma n\sqrt[r]{p} + \gamma n\sqrt[r]{\beta}\sqrt{p})$$

& eſſet quantitas irrationalis. Sit ergo $r = 2$. Erit

$$m\gamma + \gamma n\alpha\sqrt[r]{\beta} + \gamma n\sqrt{p} + \gamma n\sqrt[r]{\beta}\sqrt{p} = m\gamma + m\alpha\sqrt{\beta} + \gamma n\sqrt{p} + \gamma n\sqrt{\beta p}$$

quæ quantitas debet eſſe rationalis. Hoc autem fieri nequit, niſi

$$m\alpha\sqrt{\beta} + \gamma n\sqrt{p} = o; \ m\alpha\sqrt{\beta} = -\gamma n\sqrt{p}; \ \& \ m = \gamma; \text{ ac } \alpha\sqrt{\beta} = -n\sqrt{p}$$

Quare eſt

$$Q = R(m - n\sqrt{p}) \ \& \ O = R(m - n\sqrt{p})\ (m + n\sqrt{p})$$

id eſt ultimus æquationis rationalis terminus, qui dividi poteſt per $m+n\sqrt{p}$, dividi etiam poteſt per $m - n\sqrt{p}$.

Tunc ergo, poſt ſubſtitutionem, ſeparationem, & ſubductionem, habebimus

$$o = R(m^2 - n^2 p) + N(-m+n\sqrt{p}) + M(-m+n\sqrt{p})^2 + L(-m+n\sqrt{p})^3 + \&c.$$

in qua omnes termini dividuntur per $-m + n\sqrt{p}$.

Theorema quod habetur pag. 29. ſub N°. 88. Sic explico. Propoſita æquatio ſit

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} \ldots + Q = o$$

atque hæc conſtet ex

$$(x+\beta)\ (x^{n-1} + ax^{n-2} + bx^{n-3} + cx^{n-4} \ldots + p) = o$$

 erit,

erit, multiplicando,

$$x^n \begin{matrix}+\beta\\+a\end{matrix} \; x^{n-1} \begin{matrix}+a\beta\\+b\end{matrix} \; x^{n-2} \begin{matrix}+b\beta\\+c\end{matrix} \; x^{n-3} \begin{matrix}+c\beta\\+d\end{matrix} \; x^{n-4} \ldots + p\beta = 0;$$

quæ æquatio non tantum propositæ æqualis est, sed *identica*; ita ut tota æquatio totam æquet, & singuli termini singulos terminos. Est igitur

$$A = a + \beta; \; B = b + a\beta; \; C = c + b\beta \text{ \&c.}$$

Neque difficilius explicantur N*i*. 8...10. pag. 58, 59; qui pariter obscuriores visi sunt. Nam

In æquatione proposita litera x exponit ambigue omnes radices, sive positivas, sive negativas.

Quando ipsius x exponentes duo $n-r$, & $n-s$ sunt pares, potestates ipsæ x^{n-r}, & x^{n-s} sunt positivæ, sive x exponat unam e radicibus positivis, sive unam e radicibus negativis.

Sint ergo duo quivis propositæ termini

$$+ Mx^{n-r}, \; \& - Px^{n-s},$$

quatenus exponentes sunt pares, unus Factor ipsius $+ Mx^{n-r}$ est $+ x^{n-r}$; quare alter est $+ M$: sed unus Factor ipsius $- Px^{n-r}$ est $+ x^{n-s}$; & alter $- P$.

Igitur sive radices maneant *quales sunt*, id est positivæ quæ erant positivæ, & negativæ, quæ erant negativæ; sive mutentur in contrarias, ita ut negativæ fiant quæ erant positivæ, & positivæ quæ erat negativæ; manebunt *quales erant* termini æquationis propositæ, in quibus x habet exponentem parem.

Sed quando exponentes $n-r$ & $n-s$ sunt numeri impares, potestates ipsæ x^{n-r}, & x^{n-s} sunt positivæ, quando x exponit unam e radicibus positivis, & negativæ quando x exponit unam e radicibus negativis. Cum autem x exponat ambigue radices positivas vel negativas, unus Factor ipsius $+ Mx^{n-r}$, erit $\pm x^{n-r}$; atque ideo alter $\pm M$; pariter unus Factor ipsius $- Px^{n-s}$ erit $\pm x^{n-s}$; atque idcirco alter $\mp P$. Sed coefficientes M & P non mutantur quando radices positivæ fiunt negativæ & contra; mutantur autem ipsæ potestates, & fiunt $\mp x^{n-r}$; & $\mp x^{n-s}$ atque est

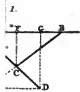
$$\pm M . \mp x^{n-r} = - Mx^{n-r}; \; \& \mp P . \mp x^{n-s} = + Px^{n-s}.$$

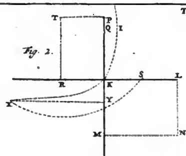
Mutantur ergo signa terminorum in quibus x habet exponentes integros, quando radices positivæ mutantur in negativas, & negativæ in positivas.

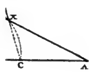
Atque hæc sufficiant. Plura quæ emendanda proculdubio comperiet Lector, ipsius ingenio corrigenda, & benignitati condonanda relinquo.

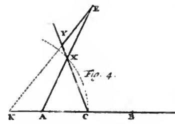
F I N I S.

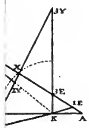


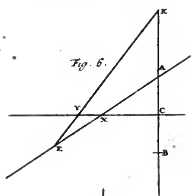

1.
T
G
B
C
D

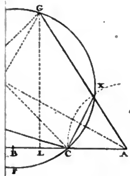

Fig. 2.
T
P
Q
I
R
K
S
L
Y
X
M
N

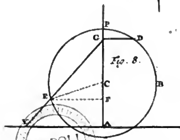

Fig. 3.
X
C
A


E
Y
X
Fig. 4.
K
A
C
B

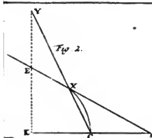

3Y
X
3E
1E
K
A

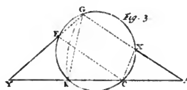

K
Fig. 6.
A
Y
C
X
E
B

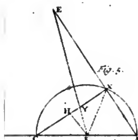

G
X
B
L
C
A
F

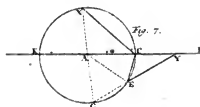

P
C
D
Fig. 8.
C
B
E
F
Y
A

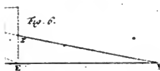


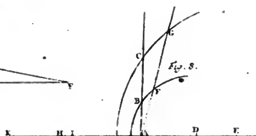

Fig. 2.
Y
E
X
K
C
A

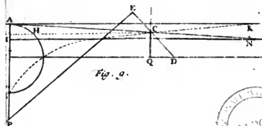

Fig. 3
G
F
X
Y
K
C
A


E
Fig. 5.
X
H
Y
C
K
A


Fig. 7.
K
C
B
Y
E
G

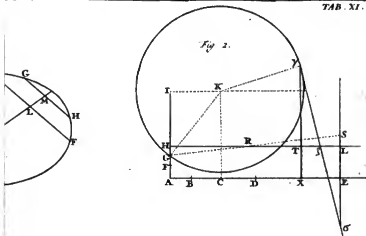

Fig. 6.
Z
E
F

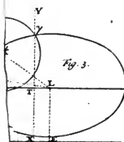

G
C
Fig. 8.
B
F
K
H
I
D
E

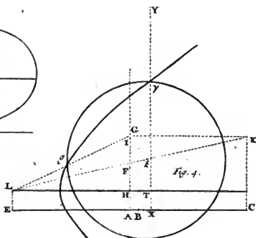

E
A
H
C
K
I
N
Q
D
Fig. 9.
P

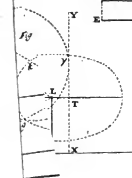

NAPOLI

TAB. XI.


Fig. 2.
G
M
L
H
F
I
K
γ
H
G
F
R
S
T
L
A
B
C
D
X
E
σ


Y
γ
Fig. 3.
L
T
X


Y
γ
G
I
K
F
Fig. 4.
L
H
T
E
A B
X
C


Y
Fig
γ
L
T
X





